Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Ахиезер, Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич, Л. С. Казарин, Д. А. Лейтес, А. М. Лукацкий, А. Н. Щетинин, Аркадий Львович Онищик (некролог), *УМН*, 2020, том 75, выпуск 4, 195–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9941>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:05:20

Аркадий Львович Онищик

12 февраля 2019 г. ушел из жизни выдающийся российский математик Аркадий Львович Онищик.

А.Л. Онищик родился в Москве 14 ноября 1933 г. В 1956 г. он окончил механико-математический факультет МГУ и поступил в аспирантуру кафедры высшей алгебры. Его научным руководителем был Е.Б. Дынкин, областью интересов которого в то время была теория групп и алгебр Ли. Свои первые научные результаты А.Л. Онищик получил еще в студенческие годы. Некоторые из них вошли в большую, совместную с Е.Б. Дынкиным, статью о глобальном строении компактных групп Ли, опубликованную в “Успехах математических наук” [1]. После окончания аспирантуры А.Л. Онищик был оставлен на кафедре высшей алгебры, которой в те годы заведовал А.Г. Курош. В 1960 г. он защитил кандидатскую диссертацию “О транзитивных группах Ли преобразований”, а в 1970 г. – докторскую диссертацию “Компактные однородные пространства и разложения групп Ли”. Однако получить должность профессора в МГУ у него практически не было шансов, так как он был одним из подписавших в 1968 г. “письмо девяти” в защиту математика А.С. Есенина-Вольпина, насильственно помещенного в психиатрическую больницу в связи с его диссидентской деятельностью. Поэтому в 1975 г. он принял предложение перейти во вновь созданный Ярославский государственный университет, где получил должность профессора и проработал до 2016 г.

В 1961 г. А.Л. Онищик и Э.Б. Винберг, также ученик Е.Б. Дынкина, организовали на мехмате МГУ семинар по группам Ли (впоследствии – по группам Ли и теории инвариантов). Этот семинар являлся преемником семинара Е.Б. Дынкина и сохранил многие его традиции. Все последующие годы, в частности и после перехода в Ярославский университет, А.Л. Онищик был одним из руководителей этого семинара. Записки семинара 1967/68 г. легли в основу книги Э.Б. Винберга и А.Л. Онищика “Семинар по группам Ли и алгебраическим группам” [21], которая стала незаменимой для специалистов в этой области и была переведена на английский язык. В 1992 и 2005 гг. Американское математическое общество издало два сборника трудов этого семинара.¹

¹См. библиографические данные этих сборников в [23] и [33].

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9941>

Работа в Ярославском университете имени П. Г. Демидова (ЯрГУ) была важным этапом в жизни Аркадия Львовича, и, с другой стороны, его появление стало важным моментом в становлении ЯрГУ, который был заново открыт в 1970 г. Заведующим кафедрой алгебры и теории функций в ЯрГУ был избран Ю. А. Брудный. Алгебраическую часть кафедры составили А. Л. Онищик, И. М. Яглом, Ю. А. Белов, В. Г. Дурнев, Л. С. Казарин и Л. Ю. Белова. Аркадий Львович организовал научный семинар по группам и алгебрам Ли. Были основаны межвузовские научные сборники “Вопросы теории групп и гомологической алгебры” и “Геометрические методы в задачах анализа”, статьи в которые представляли математики из различных вузов, в том числе ученики Аркадия Львовича. Многие статьи из этих сборников переводились на английский язык. В издании обоих сборников Аркадий Львович принимал активное участие. Кроме того, в Ярославле им были опубликованы учебные пособия “Элементы линейной алгебры и теории групп” [17], “Введение в теорию групп и алгебр Ли” [18]. Ежегодно под его руководством работал семинар для студентов алгебраической специализации “Группы и алгебры Ли”. Ежегодно три-четыре его студента защищали дипломные работы. Он прочитал множество специальных курсов на разные темы, в частности такие, как “Общая алгебра”, “Фундаментальные алгебраические системы”, “Математическая логика”, “Группы и алгебры Ли”.

Аркадий Львович всегда имел много учеников, которых привлекали его математический талант и эрудиция, четкость изложения в его лекциях, а также его доброжелательность и внимательное отношение к ученикам и текстам их статей. Около 30 человек защитили под его руководством кандидатские диссертации, и некоторые из них впоследствии стали докторами наук.

А. Л. Онищик был членом редколлегий международных математических журналов “Annals of Global Analysis and Geometry” и “Transformation groups”. С его участием были переведены на русский язык и изданы некоторые классические монографии, например: С. Хелгасон, “Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства”.

Будучи исключительно дружелюбным и мягким человеком, Аркадий Львович умел проявить твердость в вопросах, которые считал принципиальными. Например, когда в 1988 г. издавалась его совместная с Э. Б. Винбергом монография “Семинар по группам Ли и алгебраическим группам”, в издательстве сообщили авторам о запрете ссылаться на Е. Б. Дынкина (классика в этой области), который к тому времени эмигрировал в США. Было предложено в качестве компромисса оставить в списке литературы названия и координаты статей Дынкина, убрав его фамилию. Положение казалось безвыходным, но благодаря твердой позиции, занятой Аркадием Львовичем, удалось отстоять нормальный вид ссылок.

Аркадий Львович был широко образован, знал и любил мировую литературу, владел в той или иной степени многими иностранными языками. Кроме ряда европейских языков он изучил арабский, китайский и некоторые другие языки.

Результаты А. Л. Онищика по топологии однородных пространств групп Ли, разложениям групп Ли, однородным многообразиям Штейна широко известны и цитируются в мировой математической литературе. В настоящей статье дан обзор важнейших полученных им результатов по этим и другим темам его исследований.

Топология однородных пространств компактных групп Ли. Одни из первых работ А. Л. Онищика посвящены изучению когомологий пространства петель $\Omega(M)$ на топологическом пространстве M методом спектральных последовательностей. В частности, А. Л. Онищик в работе [3] вычислил алгебру когомологий $H^*(\Omega(M))$, где $M = G/H$ – односвязное однородное пространство полупростой компактной группы Ли G . Выяснилось, что она определяется, если известны алгебры когомологий группы G и подгруппы H , а также образ естественного гомоморфизма этих алгебр, индуцированного вложением $H \hookrightarrow G$. (Этому результату предшествовала совместная

работа с Ф. И. Карпелевичем [2], в которой предполагалось, что $H^*(M)$ – внешняя алгебра.) Теорема о когомологиях пространства петель положила начало многолетним исследованиям А. Л. Онищика по топологии однородных пространств, итоги которых подведены в его книге [25].

Введем необходимые понятия и обозначения.

Выберем максимальный тор T_H группы H и содержащий его максимальный тор T группы G . Пусть W – группа Вейля группы G и S_G – алгебра полиномиальных W -инвариантов на алгебре Ли тора T , градуированная удвоенными степенями многочленов. Аналогично определим алгебру S_H . Ограничение инвариантов задает гомоморфизм

$$\rho: S_G \rightarrow S_H.$$

Умножение $G \times G \rightarrow G$ определяет гомоморфизм алгебр (вещественных) когомологий

$$\delta: H^*(G) \rightarrow H^*(G) \otimes H^*(G).$$

Элемент $x \in H^*(G)$ называется *примитивным*, если $\delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. Пространство P_G примитивных элементов градуировано нечетными степенями $2m_i + 1$, где m_i – показатели группы W . Алгебра $H^*(G)$ изоморфна внешней алгебре $\wedge P_G$.

Далее, обозначим через $(S_G)_+$ максимальный идеал алгебры S_G , порожденный однородными многочленами положительной степени, и через R_G градуированное подпространство, дополнительное к идеалу $((S_G)_+)^2$ разложимых элементов. Имеется канонически определяемый изоморфизм (так называемая *трансгрессия*)

$$\tau_G: P_G \rightarrow R_G,$$

повышающий степени на 1. Положим

$$C = \wedge(P_G) \otimes S_H$$

и определим дифференциал $d: C \rightarrow C$ формулами

$$d(p \otimes 1) = 1 \otimes \rho(\tau_G(p)) \quad (p \in P_G), \quad d(1 \otimes u) = 0 \quad (u \in S_H).$$

Дифференциальная градуированная алгебра (C, d) называется *алгеброй Картана* однородного пространства M . По теореме А. Картана ее алгебра когомологий изоморфна $H^*(M)$.

Подпространство в P_G , задаваемое формулой

$$Q(M) = \{x \in P_G: \rho(\tau_G(x)) \in (S_H)_+ I_{G,H}\},$$

где $I_{G,H}$ – идеал в S_H , порожденный образом идеала $(S_G)_+ \subset S_G$, называется *подпространством Самельсона*. Известно, что

$$\dim Q(M) \leq h(M) := \operatorname{rk} G - \operatorname{rk} H.$$

Число

$$\operatorname{def} M = h(M) - \dim Q(M)$$

называется *дефектом* пространства M (это понятие ввел П. Баум). А. Л. Онищик [14] доказал гомотопическую инвариантность дефекта, а также введенных им более тонких характеристик – так называемых старших дефектов.

Гомоморфизм $H^*(G) \rightarrow H^*(H)$ индуцирует линейное отображение $P_G \rightarrow P_H$, сохраняющее градуировку. Пусть $P_G^0 \subset P_G$ – ядро этого отображения, а $P_H^0 \subset P_H$ – градуированное подпространство, дополнительное к его образу. Числа

$$\operatorname{rank}(M) = \dim P_G^0, \quad \operatorname{corank}(M) = \dim P_H^0$$

называются соответственно *рангом* и *корангом* однородного пространства M . Очевидно, что

$$\text{rank}(M) - \text{corank}(M) = \dim P_G - \dim P_H = h(M).$$

Используя результаты упомянутой выше работы [3] о когомологиях пространств петель, А. Л. Онищик в работе [6] установил гомотопическую инвариантность ранга и коранга (и тем самым числа $h(M)$). Более точно, он доказал, что для любого $k \geq 0$ размерность градуирующего подпространства $(P_G^0)_{2k+1}$ равна рангу гомотопической группы $\pi_{2k+1}(M)$, а размерность подпространства $(P_H^0)_{2k+1}$ равна рангу группы $\pi_{2k+2}(M)$. В той же работе он доказал гомотопическую инвариантность отложения $p(G, t)/p(H, t)$ многочленов Пуанкаре.

В случае, когда H – подгруппа максимального ранга, для многочлена Пуанкаре $p(M, t)$ имеется хорошо известная формула Хирша. А. Л. Онищик [20] нашел простую формулу для $p(M, t)$ в случае, когда H есть подгруппа коразмерности 1 в некоторой подгруппе K максимального ранга, являющаяся ядром регулярного характера. А именно, если в этом случае $(1 - t^2)p(G/K, t) = q_0(t) - q_1(t)$, где коэффициенты многочленов q_0 и q_1 неотрицательны, то

$$p(M, t) = q_0(t) + \frac{q_1(t)}{t}.$$

Группы Ли, транзитивные на компактных многообразиях. В серии работ [7], [8], [10], посвященных произвольным группам Ли, транзитивно действующим на компактных многообразиях, А. Л. Онищик получил важные структурные теоремы, которые в отдельных случаях привели к полному перечислению таких групп. Отправной точкой послужил вещественный аналог теоремы Титса о том, что если G/H – компактное однородное пространство связной комплексной группы Ли G , то нормализатор связной компоненты подгруппы H содержит максимальную связную разрешимую (борелевскую) подгруппу группы G .

Пусть G – связная вещественная группа Ли. Подгруппа Ли группы G называется *треугольной*, если ее образ при присоединенном представлении группы G в некотором базисе записывается треугольными матрицами. Известно, что все максимальные связные треугольные подгруппы сопряжены. Их можно рассматривать как аналог борелевских подгрупп в комплексных группах Ли.

А. Л. Онищик [7] доказал, что если G/H – компактное однородное пространство группы G , то нормализатор связной компоненты подгруппы H содержит максимальную связную треугольную подгруппу группы G . Эта теорема в дальнейшем позволила в работах самого автора и других математиков существенно продвинуться в описании алгебраического и топологического строения компактных однородных пространств связных вещественных групп Ли. Ранее такие пространства в полной общности практически никем не рассматривались.

Если подгруппа H связна и G эффективно действует на G/H , то из теоремы Онищика выводится, в частности, что коммутант радикала группы G коммутативен. Далее, с помощью топологических методов доказывается, что если многообразие G/H является односвязным однородным пространством K/L компактной группы Ли K , причем $\text{rk } K - \text{rk } L = 1$, то радикал группы G коммутативен [7]. Это утверждение применимо, в частности, к сферам, но уже для разности рангов, равной 2, оно, вообще говоря, неверно.

Пусть теперь G/H – односвязное компактное однородное пространство связной полупростой группы Ли G , причем G действует на G/H эффективно. В силу теоремы Монтгомери максимальная компактная подгруппа K группы G действует на G/H транзитивно, так что $G/H = K/L$, где $L = H \cap K$. А. Л. Онищик нашел все возможные подгруппы H и L для всех полупростых групп Ли G . Ранее эта задача была решена в двух случаях: когда G – полупростая комплексная группа Ли, а H – ее

комплексная подгруппа Ли и когда K/L – симметрическое пространство. Кроме того, максимальные связные подгруппы Ли $H \subset G$, для которых пространство G/H компактно, нашел Дж. Мостов.

С помощью этих результатов А. Л. Онищик в работе [10] нашел все связные группы Ли, транзитивно действующие на односвязных компактных однородных пространствах ранга 1. Эти результаты обобщают ранее известные результаты Д. Монтгомери, Г. Самельсона и А. Бореля о транзитивных действиях групп Ли на сферах. Описание групп Ли, транзитивно действующих на односвязных компактных однородных пространствах ранга, большего 1, известно пока лишь в отдельных случаях. Например, А. Л. Онищик перечислил связные группы Ли, транзитивно действующие на вещественных, комплексных и кватернионных многообразиях Грассмана и Штифеля [12]. Полученные им результаты стали основой многочисленных работ других авторов.

Еще один результат А. Л. Онищика по этому кругу вопросов относится к асистатическим действиям произвольных групп Ли. Эффективное действие группы Ли G на однородном пространстве $M = G/H$ называется *асистатическим*, если связные компоненты подгруппы H и ее нормализатора совпадают. Для компактного однородного пространства $M = G/H$ с конечной фундаментальной группой А. Л. Онищик доказал [16], что если ее действие на M асистатично, то она допускает лишь конечное число существенно различных связных расширений. В частности, существуют максимальные связные расширения. При этом сама группа G и все ее расширения автоматически полупросты.

Разложения групп Ли и алгебр Ли. А. Л. Онищику принадлежат важные результаты о разложениях групп и алгебр Ли. Разложение группы Ли G – это ее представление в виде произведения $G = G' \cdot G''$ двух связных подгрупп Ли $G', G'' \subset G$. Аналогично вводится понятие разложения алгебр Ли. Для случая, когда группа G компактна, задача описания всех разложений была решена А. Л. Онищиком в 1962 г. [5]. Это равносильно описанию всех подгрупп Ли, транзитивно действующих на заданном однородном пространстве компактной группы Ли.

Многие разложения простых компактных групп Ли хорошо известны и имеют наглядные геометрические интерпретации. Перечислим эти разложения:

$$\begin{aligned} \mathrm{SU}_{2n} &= \mathrm{Sp}_n \cdot \mathrm{SU}_{2n-1} \quad (n \geq 2); & \mathrm{SO}_{2n} &= \mathrm{SO}_{2n-1} \cdot \mathrm{SU}_n \quad (n \geq 4); \\ \mathrm{SO}_{4n} &= \mathrm{SO}_{4n-1} \cdot \mathrm{Sp}_n \quad (n \geq 2); & \mathrm{SO}_{16} &= \mathrm{SO}_{15} \cdot \mathrm{Spin}_9; \\ \mathrm{SO}_8 &= \mathrm{SO}_7 \cdot \mathrm{Spin}_7; & \mathrm{SO}_7 &= \mathrm{G}_2 \cdot \mathrm{SO}_6; & \mathrm{SO}_7 &= \mathrm{G}_2 \cdot \mathrm{SO}_5. \end{aligned}$$

Окончательный ответ, полученный А. Л. Онищиком, состоит в том, что любое нетривиальное разложение связной простой компактной группы Ли с точностью до локального изоморфизма и перестановки множителей получается из одного из приведенных выше разложений нормальным расширением группы G'' . Эта теорема имеет многочисленные приложения. Например, с ее помощью А. Л. Онищик вычислил группы изометрий римановых однородных пространств простых компактных групп Ли с метрикой, индуцированной формой Киллинга [22]. Отсюда получаются результаты Дж. Вольфа о группах изометрий неприводимых компактных римановых однородных пространств.

В дальнейшем А. Л. Онищик перешел от изучения разложений компактных групп Ли к изучению разложений некомпактных редуктивных групп Ли и соответствующих алгебр Ли [11]. Он описал все разложения связных редуктивных групп Ли в произведение двух связных редуктивных подгрупп Ли. Оказалось, что эта задача равносильна описанию локальных разложений (т.е. разложений соответствующих алгебр Ли). Эта тема была в дальнейшем развита в разных направлениях его учениками.

Полученные результаты были применены для вычисления групп комплексных автоморфизмов флаговых многообразий, т.е. однородных пространств вида G/P , где

P – параболическая подгруппа полупростой комплексной группы G . При рассмотрении флаговых многообразий разумно предполагать, что G – присоединенная группа и что P не содержит простых множителей группы G . Тогда G действует на X эффективно и связная компонента $(\text{Aut } X)^0$ группы автоморфизмов многообразия X содержит G . Как правило, эта группа совпадает с G ; например, это так, если P – борелевская подгруппа. Вычисление группы $(\text{Aut } X)^0$ сводится к случаю, когда G – простая группа. Обозначим через $\mathbf{Q}^m$ невырожденную квадрику в $\mathbb{CP}^{m+1}$ и через $\mathbf{IG}_m$ одну из двух связных компонент грассманиана m -мерных подпространств в $\mathbb{C}^{2m}$, изотропных относительно заданной невырожденной симметрической билинейной формы. Многообразия флагов простых групп Ли, для которых $(\text{Aut } X)^0 \neq G$, исчерпываются следующим списком, который был получен А. Л. Онищиком в качестве следствия теоремы о разложениях:

- (i) $G = \text{PSp}_l(\mathbb{C})$, $X = \mathbb{CP}^{2l-1}$, $(\text{Aut } X)^0 = \text{PSL}_{2l}(\mathbb{C})$ при $l \geq 2$;
- (ii) $G = G_2(\mathbb{C})$, $X = \mathbf{Q}^5$, $(\text{Aut } X)^0 = \text{PSO}_7(\mathbb{C})$;
- (iii) $G = \text{SO}_{2l-1}(\mathbb{C})$, $X = \mathbf{IG}_l$, $(\text{Aut } X)^0 = \text{PSO}_{2l}(\mathbb{C})$ при $l \geq 4$.

Разложение связной полупростой комплексной группы Ли называется параболическим, если одна из двух подгрупп, входящих в разложение, является параболической. Приведенный выше список дает все параболические разложения простых комплексных алгебраических групп. Именно, группа $\hat{G} = (\text{Aut } X)^0$ разлагается в произведение подгруппы G и параболической подгруппы – стационарной подгруппы действия группы $\hat{G}$ на многообразии X .

На флаговых многообразиях, помимо комплексных и компактных групп Ли, могут транзитивно действовать и некомпактные вещественные группы голоморфных преобразований. Из результатов А. Л. Онищика следует, что для флагового многообразия простой группы Ли это возможно лишь в случаях (i) и (iii). Соответствующими группами являются SU_{2l}^* для $\mathbb{CP}^{2l-1}$ и $\text{SO}_{2l-1,1}^0$ для $\mathbf{IG}_l$.

А. Л. Онищиком были изучены также параболические разложения связных линейных алгебраических групп над произвольным алгебраически замкнутым полем [19]. Для поля характеристики 0 это было сделано ранее И. Л. Кантором. Интересно отметить, что в случае характеристики 2 появляются дополнительные разложения простых групп, а именно групп SL_6 и Sp_3 .

Комплексные многообразия и группы голоморфных преобразований.

А. Л. Онищику принадлежит следующий фундаментальный результат, одинаково важный для комплексного анализа и для теории алгебраических групп преобразований. Опубликованный в заметке [4], он по времени совпадает с периодом расцвета теории комплексных пространств. Начало этому периоду было положено в семинаре А. Картана (1951–1952 гг.), где впервые были сформулированы и доказаны так называемые теоремы А и В для многообразий Штейна. Эти теоремы, в доказательстве которых основную роль играет новая в то время теория когерентных пучков, привели к переосмыслению классических понятий и результатов, таких как проблемы Кузена и теорема Пуанкаре о мероморфных функциях. Выяснилось, что многообразия Штейна, введенные в 1951 г. как некоторые обобщения областей голоморфности, составляют естественный класс, аналогичный классу аффинных алгебраических многообразий и содержащий последние в случае поля $\mathbb{C}$. Ввиду важности самого понятия особую роль приобретает задача о многообразиях Штейна, однородных относительно группы Ли голоморфных преобразований. В общем виде эта задача не решена и сегодня даже для комплексных групп преобразований.

В заметке А. Л. Онищика речь идет о многообразиях Штейна, однородных относительно голоморфного действия редуکتивной комплексной алгебраической группы.

Пусть G – такая группа и $M = G/H$ – ее комплексное однородное пространство. Результат А. Л. О니щика состоит в следующем:

(а) для того чтобы однородное пространство M было многообразием Штейна, необходимо и достаточно, чтобы стационарная подгруппа H была замкнута в топологии Зариского и редуکتивна как алгебраическая группа;

(б) при выполнении этого условия M обладает структурой аффинного алгебраического многообразия, причем действие группы G на этом многообразии алгебраично.

Примерно в то же время эта теорема была доказана Й. Мацусимой.

Отметим, что сама группа G по определению является многообразием Штейна или, как говорят, штейновой группой. Достаточность в (а) обобщается на любые штейновы группы и их замкнутые комплексные подгруппы. В доказательстве необходимости в части (а) и в доказательстве части (б) А. Л. Онищик существенно использовал свойство плотности алгебры представляющих функций на компактной группе Ли. Впоследствии В. Барт и М. Отте применили аналогичный метод к голоморфно отделимым однородным пространствам G/H редуکتивных комплексных алгебраических групп. Они показали, что подгруппа H алгебраична и для этого более широкого класса однородных пространств, причем G/H является квазиаффинным алгебраическим многообразием (1973 г.).

По ходу дела А. Л. Онищик получил следующий важный результат [4]. Пусть K – компактная группа линейных преобразований вещественного векторного пространства V . Тогда комплексификация $G = K^{\mathbb{C}}$ транзитивно действует на комплексификации в $V^{\mathbb{C}}$ орбиты $K \cdot v$ любой точки $v \in V$, причем стационарная подгруппа G_v совпадает с комплексификацией стационарной подгруппы K_v . Этот факт, важный в теории алгебраических групп, впоследствии передоказывался А. Борелем и Хариш-Чандрой и другими авторами.

Инварианты и сферические функции компактных групп преобразований. Как известно, алгебраическая теория инвариантов изучает полиномиальные инварианты действий алгебраических групп на аффинных алгебраических многообразиях. В контексте действий групп Ли естественно рассматривать гладкие (бесконечно дифференцируемые) инварианты. А. Л. Онищику принадлежат принципиально важные теоремы конечности для гладких инвариантов действий компактных групп Ли, аналогичные хорошо известным теоремам для действий редуکتивных алгебраических групп.

Пусть компактная группа Ли G действует на компактном многообразии M . Гладкая функция на M называется *сферической* (или почти инвариантной), если линейная оболочка ее сдвигов под действием группы G конечномерна. Обозначим через $C^{\infty}(M)^G$ и $C^{\infty}(M)_G$ алгебры инвариантных и соответственно сферических гладких функций на M . Далее, пусть E – гладкое векторное G -расслоение над M . В работе А. Л. Онищика [15] доказано, что

1) модуль инвариантных гладких сечений расслоения E над алгеброй $C^{\infty}(M)^G$ имеет конечный тип;

2) алгебра $C^{\infty}(M)_G$ допускает конечную систему образующих над $C^{\infty}(M)^G$.

Существенным моментом доказательства является использование известной теоремы Мальгранжа о существовании конечных систем образующих в идеалах кольца гладких функций.

А. Л. Онищиком также построен пример, показывающий, что для непрерывных функций теоремы конечности перестают быть справедливыми. Простейшим контрпримером является действие группы $\mathbb{Z}_2$ на окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, при котором образующая действует как комплексное сопряжение.

Неабелевы когомологии и их применение к дифференциальным уравнениям. Неабелевы когомологии групп впервые появились в виде когомологий Галуа –

когомологий группы Галуа алгебраического расширения K/k со значениями в группе K -точек алгебраической группы G , определенной над k . Одномерные когомологии Галуа описывают различного рода алгебраические объекты (например, тензоры того или иного вида или алгебраические многообразия), определенные над k и изоморфные заданному объекту над K (группа автоморфизмов которого берется в качестве группы G).

А. Л. Онищик одним из первых в нашей стране стал изучать общие неабелевы когомологии как когомологии со значениями в неабелевой группе или в пучке неабелевых групп. К этим вопросам его привело предыдущее изучение расслоенных пространств и их деформаций.

Как известно, коцепной комплекс в теории неабелевых когомологий – это тройка $C = \{C^0, C^1, C^2\}$, где C^0 и C^1 – группы, C^2 – множество с отмеченной точкой e' , причем заданы действия ρ и σ группы C^0 на C^1 и C^2 соответственно такие, что для любого $a \in C^0$ преобразование $\rho(a)$ нормализует группу правых сдвигов, а преобразование $\sigma(a)$ сохраняет e' . Дифференциалы $\delta_0: C^0 \rightarrow C^1$ и $\delta_1: C^1 \rightarrow C^2$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\delta_0(a) = \rho(a)(e), \quad \delta_1(e) = e', \quad \delta_1 \circ \rho(a) = \sigma(a) \circ \delta_1$$

для любого $a \in C^0$. По этим данным определяются нульмерная группа когомологий $H^0(C)$ и одномерное множество когомологий $H^1(C)$.

Пусть M – гладкое многообразие, G – группа Ли, а $F_G = F_G(M)$ – группа всех гладких функций на M со значениями в G . Пусть, далее, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ и $L_{\mathfrak{g}}^p$ – пространство гладких $\mathfrak{g}$ -значных p -форм на M . Для любой функции $f \in F_G$ определим 1-форму $Df \in L_{\mathfrak{g}}^1$ по формуле

$$Df(\xi) = f(x)^{-1} df(\xi) \quad \text{для любого } \xi \in T_x(M).$$

Наконец, зададим отображение $\mathcal{D}: L_{\mathfrak{g}}^1 \rightarrow L_{\mathfrak{g}}^2$ формулой

$$\mathcal{D}(\alpha) = d\alpha - \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] \quad \text{для любого } \alpha \in L_{\mathfrak{g}}^1.$$

А. Л. Онищик показал, что тройка $\{F_G, L_{\mathfrak{g}}^1, L_{\mathfrak{g}}^2\}$ с отображениями

$$D: F_G \rightarrow L_{\mathfrak{g}}^1 \quad \text{и} \quad \mathcal{D}: L_{\mathfrak{g}}^1 \rightarrow L_{\mathfrak{g}}^2$$

является коцепным комплексом [9]. Опираясь на этот результат, он построил резольвенту постоянного пучка G на M , обобщающую резольвенту де Рама пучка $\mathbb{R}$. Она имеет вид пятичленной точной последовательности пучков

$$\{e\} \rightarrow G \rightarrow \mathcal{F}_G \rightarrow \mathcal{L}_{\mathfrak{g}}^1 \rightarrow \mathcal{L}_{\mathfrak{g}}^2,$$

в которой $\mathcal{F}_G$, $\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}^1$, $\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}^2$ – пучки ростков гладких функций на M со значениями в G и соответственно гладких $\mathfrak{g}$ -значных 1- и 2-форм на M , $G \rightarrow \mathcal{F}_G$ – естественное вложение, а два последующих отображения между пучками получаются локализацией операторов D и $\mathcal{D}$.

Как известно, классы изоморфных гладких главных расслоений над M со слоем G находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с элементами множества $H^1(M, \mathcal{F}_G)$. Предыдущие результаты позволяют для каждого такого расслоения выяснить, можно ли сделать его функции перехода постоянными и если да, то сколькими разными способами.

В дальнейшем А. Л. Онищиком на основе указанных выше результатов были рассмотрены вполне интегрируемые дифференциальные уравнения вида $Df = \alpha$, где $f \in F_G$ – неизвестная функция, а $\alpha \in L_{\mathfrak{g}}^1$ [13]. В случае, когда G – линейная группа, это

уравнение представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно матричных элементов отображения f . Если на многообразии M задан абсолютный параллелизм, то естественным образом выделяется класс уравнений с постоянными коэффициентами. В [13] изучен случай, когда $M = H/\Gamma$, где H – группа Ли, Γ – ее дискретная подгруппа, причем параллелизм на M определяется правыми сдвигами на группе H . Вполне интегрируемые уравнения на M , приводимые к уравнениям с постоянными коэффициентами, характеризуются тем, что их гомоморфизм монодромии $\Gamma \rightarrow G$ продолжается до некоторого гомоморфизма $H \rightarrow G$. Этот факт можно рассматривать как аналог теоремы А. М. Ляпунова о дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами.

Супералгебры Ли и супермногообразия. Начиная с 1972 г. значительная часть работ А. Л. Онищика была посвящена супералгебрам Ли и аналитическим супермногообразиям.

В работах Ф. А. Березина была высказана идея о возможности построения анализа, в котором на равных правах выступают коммутирующие и антикоммутирующие переменные. Эта идея привела к понятию супермногообразия. Напомним, что комплексное аналитическое супермногообразие размерности $n|m$ есть окольцованное пространство $(M, \mathcal{O})$, локально изоморфное $(D, \bigwedge_{\mathcal{F}_n}(\xi_1, \dots, \xi_m))$, где D – область в $\mathbb{C}^n$ с пучком ростков голоморфных функций $\mathcal{F}_n$. Координаты $x_1, \dots, x_n$ в D и элементы $\xi_1, \dots, \xi_m$ называются соответственно четными и нечетными локальными координатами для $(M, \mathcal{O})$.

Пространство M обладает естественной структурой комплексного многообразия размерности n , называемого *редукцией* или *подстилающим многообразием* супермногообразия $(M, \mathcal{O})$. Если M – комплексное многообразие со структурным пучком $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$ – локально свободный пучок на M , то, полагая $\mathcal{O} = \bigwedge_{\mathcal{F}} \mathcal{E}$, мы получим супермногообразие $(M, \mathcal{O})$, называемое *расщепимым*. Имеется важная естественная конструкция, ставящая в соответствие каждому супермногообразию $(M, \mathcal{O})$ канонически определенное расщепимое супермногообразие той же размерности, называемое *ретрактом* супермногообразия $(M, \mathcal{O})$. Как и в классической теории С. Ли, определяются однородные супермногообразия. При этом поскольку голоморфные векторные поля на $(M, \mathcal{O})$ образуют супералгебру Ли, то помимо однородных супермногообразий можно рассматривать и четно однородные, т. е. такие, для которых четная компонента этой супералгебры Ли отображается эпиморфно на четную часть каждого касательного пространства.

В 1996 г. А. Л. Онищик поставил задачу классификации с точностью до изоморфизма всех однородных комплексных супермногообразий, редукцией которых является заданное компактное комплексное однородное многообразие [27]. Другая, близкая проблема состоит в том, чтобы классифицировать с точностью до изоморфизма все однородные супермногообразия, имеющие заданный ретракт.

Предположим, что M – неприводимое компактное эрмитово симметрическое пространство. С. А. Игонин классифицировал все супермногообразия с ретрактом (M, Ω) , где Ω – пучок голоморфных форм на M , и, в частности, доказал, что единственными однородными и нерасщепимыми среди них являются Π -симметрические суперграссманианы $\Pi \mathbf{Gr}_{n|n, k|k}$, построенные Ю. И. Маниным (см. обзор [32]). А. Л. Онищик изучил однородные комплексные супермногообразия, редукция которых есть комплексный грассманиан $\mathbf{Gr}_{n, k}$. Выяснилось, что при условии неприводимости нечетного представления изотропии и при некоторых ограничениях на (n, k) единственным нерасщепимым супермногообразием этого вида также является лишь Π -симметрический суперграссманиан [34]. Этим результатам предшествовали совместные работы с О. В. Платоновой [30], [31], в которых были классифицированы однородные и четно однородные супермногообразия, редукция которых есть комплексное проективное

пространство $M = \mathbb{CP}^n$ при $n \geq 2$ и $n \geq m$. Для $M = \mathbb{CP}^1$ В. А. Бунегина и А. Л. Онищик полностью исследовали случай малых нечетных размерностей $n = 2$ и $n = 3$ [29]. Им же принадлежит пример однопараметрического семейства однородных супермногообразий, ретрактом которых является $\mathbb{CP}^{1|4}$ [24].

В работах А. Л. Онищика и А. А. Серова получены интересные результаты о супералгебрах Ли векторных полей на некоторых супермногообразиях [26], [28], [33]. Эти супералгебры вычислены для расщепимых супермногообразий, связанных с некоторыми однородными расслоениями на флаговых многообразиях, а также для суперграссманианов $\mathbf{Gr}_{m|n,k|l}$, где $0 < k < m$, а $0 < l < n$, и для изотропных суперграссманианов максимального типа, связанных с ортосимплектическими супералгебрами Ли.

Одной из последних работ А. Л. Онищика стала его совместная статья с Е. Г. Вишняковой о локально свободных пучках на комплексных супермногообразиях [35].

Д. Н. Ахизер, Э. Б. Винберг, В. В. Горбачевич, Л. С. Казарин,
Д. А. Лейтес, А. М. Лукацкий, А. Н. Щетинин

Список литературы

- [1] Е. Б. Дынкин, А. Л. Онищик, “Компактные группы Ли в целом”, *УМН*, **10**:4(66) (1955), 3–74; англ. пер.: E. B. Dynkin, A. L. Oniščik, “Compact global Lie groups”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **21**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1962, 119–192.
- [2] А. Л. Онищик, Ф. И. Карпелевич, “Алгебра гомологий пространства путей”, *Докл. АН СССР*, **106** (1956), 967–969.
- [3] А. Л. Онищик, “О когомологиях пространств путей”, *Матем. сб.*, **44(86)**:1 (1958), 3–52; англ. пер.: A. Oniščik, “On cohomologies of spaces of paths”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **25**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963, 283–334.
- [4] А. Л. Онищик, “Комплексные оболочки компактных однородных пространств”, *Докл. АН СССР*, **130**:4 (1960), 726–729; англ. пер.: A. L. Oniščik, “Complex hulls of compact homogeneous spaces”, *Soviet Math. Dokl.*, **1** (1960), 88–91.
- [5] А. Л. Онищик, “Отношения включения между транзитивными компактными группами преобразований”, *Тр. ММО*, **11**, ГИФМЛ, М., 1962, 199–242; англ. пер.: A. L. Oniščik, “Inclusion relations among transitive compact transformation groups”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **50**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966, 5–58.
- [6] А. Л. Онищик, “О транзитивных компактных группах преобразований”, *Матем. сб.*, **60(102)**:4 (1963), 447–485.
- [7] А. Л. Онищик, “О группах Ли, транзитивных на компактных многообразиях”, *Матем. сб.*, **71(113)**:4 (1966), 483–494; англ. пер.: A. L. Oniščik, “On Lie groups transitive on compact manifolds”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **73**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968, 59–72.
- [8] А. Л. Онищик, “О группах Ли, транзитивных на компактных многообразиях. II”, *Матем. сб.*, **74(116)**:3 (1967), 398–416; англ. пер.: A. L. Oniščik, “On Lie groups transitive on compact manifolds. II”, *Math. USSR-Sb.*, **3**:3 (1967), 373–388.
- [9] А. Л. Онищик, “Некоторые понятия и применения теории неабелевых когомологий”, *Тр. ММО*, **17**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1967, 45–88; англ. пер.: A. L. Oniščik, “Some concepts and applications of non-abelian cohomology theory”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **17** (1967), 49–98.
- [10] А. Л. Онищик, “О группах Ли, транзитивных на компактных многообразиях. III”, *Матем. сб.*, **75(117)**:2 (1968), 255–263; англ. пер.: A. L. Oniščik, “On Lie groups, transitive on compact manifolds. III”, *Math. USSR-Sb.*, **4**:2 (1968), 233–240.
- [11] А. Л. Онищик, “Разложения редуктивных групп Ли”, *Матем. сб.*, **80(122)**:4(12) (1969), 553–599; англ. пер.: A. L. Oniščik, “Decompositions of reductive Lie groups”, *Math. USSR-Sb.*, **9**:4 (1969), 515–554.

- [12] А. Л. Онищик, “Группы Ли, транзитивные на многообразиях Грассмана и Штифеля”, *Матем. сб.*, **83(125)**:3(11) (1970), 407–428; англ. пер.: A. L. Oniščik, “Lie groups transitive on Grassmann and Stiefel manifolds”, *Math. USSR-Sb.*, **12**:3 (1970), 405–427.
- [13] А. Л. Онищик, “О вполне интегрируемых уравнениях на однородных пространствах”, *Матем. заметки*, **9**:4 (1971), 365–373; англ. пер.: A. L. Onishchik, “Completely integrable equations on homogeneous spaces”, *Math. Notes*, **9**:4 (1971), 211–215.
- [14] А. Л. Онищик, “О некоторых топологических инвариантах однородных пространств”, *Матем. заметки*, **12**:6 (1972), 761–768; англ. пер.: A. L. Onishchik, “Topological invariants of homogeneous spaces”, *Math. Notes*, **12**:6 (1972), 893–896.
- [15] А. Л. Онищик, “Об инвариантах и почти-инвариантах компактных групп преобразований”, Тр. ММО, **35**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1976, 235–264; англ. пер.: A. L. Onishchik, “On invariants and almost-invariants of compact transformation groups”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **35** (1979), 237–267.
- [16] А. Л. Онищик, “О расширениях транзитивных групп преобразований”, *Изв. вузов. Матем.*, 1977, №3, 53–65; “Исправления”, 1981, №7, 88; англ. пер.: A. L. Onishchik, “Extensions of transitive transformation groups”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **21**:3 (1977), 42–51; “Corrections”, **25**:7 (1981), 104–105.
- [17] А. Л. Онищик, *Элементы линейной алгебры и теории групп*, ЯрГУ, Ярославль, 1978, 110 с.
- [18] А. Л. Онищик, *Введение в теорию групп и алгебр Ли*, ЯрГУ, Ярославль, 1979.
- [19] A. L. Oniščik, “Parabolic factorizations of semisimple algebraic groups”, *Math. Nachr.*, **104** (1981), 315–329.
- [20] А. Л. Онищик, “О топологии некоторых комплексных однородных пространств”, *Многомерный комплексный анализ*, СО АН СССР, Красноярск, 1985, 109–121.
- [21] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М., 1988, 344 с.; англ. пер.: A. L. Onishchik, È. B. Vinberg, *Lie groups and algebraic groups*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1990, xx+328 pp.
- [22] A. L. Onishchik, “The group of isometries of a compact Riemannian homogeneous space”, *Differential geometry and its applications* (Eger, 1989), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **56**, North Holland, Amsterdam, 1992, 597–616.
- [23] A. L. Onishchik, A. A. Serov, “Holomorphic vector fields on super-Grassmannians”, *Lie groups, their discrete subgroups, and invariant theory*, Adv. Soviet Math., **8**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 113–129.
- [24] V. A. Bunegina, A. L. Onishchik, “Two families of flag supermanifolds”, *Differential Geom. Appl.*, **4**:4 (1994), 329–360.
- [25] А. Л. Онищик, *Топология транзитивных групп преобразований*, Физматлит, М., 1995, 384 с.; англ. пер.: A. L. Onishchik, *Topology of transitive transformation groups*, Johann Ambrosius Barth Verlag GmbH, Leipzig, 1994, xvi+300 pp.
- [26] A. L. Onishchik, A. A. Serov, “Vector fields and deformations of isotropic super-Grassmannians of maximal type”, *Lie groups and Lie algebras: E. B. Dynkin’s seminar*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **169**, Adv. Math. Sci., 26, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 75–90.
- [27] А. Л. Онищик, “О комплексных однородных супермногообразиях”, *Математика в Ярославском университете*, Сб. обзорных статей. К 20-летию матем. ф-та, ЯрГУ, Ярославль, 1996, 133–153.
- [28] A. L. Onishchik, A. A. Serov, *On isotropic super-Grassmannians of maximal type associated with an odd bilinear form*, Preprint № 340, E. Schrödinger Int. Inst. for Math. Phys., Vienna, 1996, 18 pp.

- [29] V. A. Bunegina, A. L. Onishchik, “Homogeneous supermanifold associated with the complex projective line”, *J. Math. Sci.*, **82**:4 (1996), 3503–3527.
- [30] А. Л. Онищик, О. В. Платонова, “Однородные супермногообразия, связанные с комплексным проективным пространством. I”, *Матем. сб.*, **189**:2 (1998), 111–136; англ. пер.: A. L. Onishchik, O. V. Platonova, “Homogeneous supermanifolds associated with complex projective space. I”, *Sb. Math.*, **189**:2 (1998), 265–289.
- [31] А. Л. Онищик, О. В. Платонова, “Однородные супермногообразия, связанные с комплексным проективным пространством. II”, *Матем. сб.*, **189**:3 (1998), 103–124; англ. пер.: A. L. Onishchik, O. V. Platonova, “Homogeneous supermanifolds associated with complex projective space. II”, *Sb. Math.*, **189**:3 (1998), 421–441.
- [32] А. Л. Онищик, “Проблемы классификации комплексных супермногообразий”, *Математика в Ярославском университете*, Сб. обзорных статей. К 25-летию матем. ф-та, ЯрГУ, Ярославль, 2001, 7–33.
- [33] A. L. Onishchik, A. A. Serov, “On isotropic super-Grassmannians of maximal type associated with an odd bilinear form”, *Lie groups and invariant theory*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **213**, Adv. Math. Sci., 56, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 173–189.
- [34] A. L. Onishchik, “Homogeneous supermanifolds over Grassmannians”, *J. Algebra*, **313**:1 (2007), 320–342.
- [35] A. L. Onishchik, E. G. Vishnyakova, “Locally free sheaves on complex supermanifolds”, *Transform. Groups*, **18**:2 (2013), 483–505.