Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Болотин, А. В. Борисов, А. В. Карапетян, Б. С. Кашин, Е. И. Кугушев, А. И. Нейштадт, Д. О. Орлов, Д. В. Трещёв, Валерий Васильевич Козлов (к семидесятилетию со дня рождения), *УМН*, 2020, том 75, выпуск 6, 179–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9949>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:23:23

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Валерий Васильевич Козлов

(к семидесятилетию со дня рождения)

1 января 2020 г. исполнилось семьдесят лет выдающемуся ученому – академику Российской академии наук Валерию Васильевичу Козлову. Валерий Васильевич внес фундаментальный вклад в различные области математики и механики: теорию гамильтоновых систем, теорию устойчивости, механику неголономных систем, статистическую механику. Им опубликовано около 300 научных работ по математике и механике, а также восемь монографий, уже ставших классическими. В одной статье невозможно даже кратко осветить все направления его исследований.

Валерий Васильевич Козлов родился 1 января 1950 г. в деревне Костыли Михайловского района Рязанской области. Его мать Ольга Архиповна была учителем математики, а отец Василий Несторович работал машинистом на железной дороге. Василий Несторович прошел всю войну от начала до Победы.

В первый класс Валерий пошел в местную сельскую школу. В небольшой деревне – в ней сейчас уже никто не живет – была только начальная школа со всего лишь одной учительницей, которая в первую смену вела одновременно первый и третий класс, а во вторую смену – второй и четвертый.

Восьмилетним мальчиком Валерий Васильевич вместе с родителями переехал в подмосковный поселок Люблино-Дачное. После строительства кольцевой автодороги это место, как и многие другие, оказалось внутри расширяющейся Москвы. Так Валерий Васильевич стал москвичом.

В двух последних классах Валерий Васильевич серьезно увлекся математикой и физикой. По вечерам три раза в неделю он ездил на занятия в Вечернюю физико-математическую школу на общественных началах (ВФМШ) при МВТУ им. Н.Э. Баумана. Эта школа оказалась замечательной! (Основанная в 1962 г., она существует и по сей день.) Школьников учили в основном студенты МВТУ. Со многими из них у слушателей школы сложились дружеские отношения. В ВФМШ Валерий Васильевич познакомился с Анатолием Нейштадтом, который в дальнейшем стал его близким другом и соавтором. Система обучения была вузовской: лекции и семинары, а в конце обучения – выпускные экзамены. Всего четверо выпускников этой школы сдали все итоговые экзамены на отлично. Среди них – Валерий и Анатолий. В качестве

приза Валерий Васильевич получил университетский учебник математического анализа, который и изучил в летние месяцы перед поступлением в МГУ. Руководство школы предложило ректору принять Валерия и Анатолия в МВТУ без экзаменов, однако он сказал, что такие сильные ребята и так поступят. Но они выбрали МГУ.

Валерий Васильевич окончил школу с золотой медалью и поступил, как и собирался, на отделение механики механико-математического факультета МГУ. В тот год письменный экзамен по математике оказался на редкость сложным даже по высоким стандартам мехмата из-за того, что в качестве самой сложной, четвертой задачи была предложена задача по сферической геометрии, не входившей в школьную программу (об этом можно прочесть в воспоминаниях академика А. А. Болибруха, также поступившего на мехмат в 1967 г.). Это вызвало даже протесты родителей абитуриентов. Валерий Васильевич решил все пять задач, что удалось только 7 абитуриентам из 450 поступивших. Сдав на отлично и письменный, и устный экзамены по математике, Валерий Васильевич стал студентом мехмата.

По окончании второго курса Валерий Васильевич, вместе с Анатолием Нейштадтом, выбрал кафедру теоретической механики, бывшую в то время, возможно, самой сильной кафедрой на отделении механики мехмата МГУ. На кафедре работали корифеи механики космического полета во главе с Дмитрием Евгеньевичем Охоцимским, внесшие большой вклад в развитие космонавтики. В 1969 г. на кафедре сформировалась сильная студенческая группа. Двенадцать студентов этой группы стали впоследствии докторами наук.

К началу учебы Валерия Васильевича на кафедре теоретической механики В. И. Арнольд только что закончил чтение своего знаменитого курса классической механики для студентов-математиков. Появились ротапринтные выпуски, составившие впоследствии книгу В. И. Арнольда *“Математические методы классической механики”*, преобразовавшую понимание классической механики во всем мире. Валерий Васильевич первым среди механиков принял геометрический симплектический подход Анри Пуанкаре и Эли Картана, изложенный в этих выпусках, как основу классической механики и стал развивать его.

Весьма большое влияние на научное развитие Валерия Васильевича оказали работы А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда по классической механике и динамическим системам. В первую очередь это знаменитый доклад А. Н. Колмогорова на Международном математическом конгрессе в Амстердаме (1954). Одной из первых научных статей, которые изучил Валерий Васильевич, была статья В. И. Арнольда *“Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике”* (УМН, 1963). Задачей обращения теоремы Лагранжа, решение которой позже было далеко продвинуто Валерием Васильевичем совместно с В. П. Паламодовым, Валерий Васильевич заинтересовался в 1974 г. после лекции В. И. Арнольда *“Некоторые задачи теории дифференциальных уравнений”* для аспирантов мехмата, хотя следует отметить, что эта задача исследовалась на кафедре теоретической механики начиная с Николая Гурьевича Четаева, который был заведующим кафедрой до Д. Е. Охоцимского.

И в студенческие годы, и позже Валерий Васильевич обсуждал свои работы с Владимиром Михайловичем Алексеевым, одним из творцов гиперболической революции в теории динамических систем. Валерий Васильевич участвовал в семинаре В. М. Алексеева, слушал и сдавал его спецкурс по небесной механике. Позднее В. М. Алексеев был оппонентом по кандидатской диссертации Валерия Васильевича.

Студенческая группа кафедры теоретической механики, в которой учился Валерий Васильевич, была очень дружной. И он был в ней одной из центральных фигур как благодаря своим интеллектуальным и личностным качествам, так и потому, что очень хорошо играл в футбол (а этой игре отдавался любой перерыв в расписании лекций и семинаров). Математические вопросы, волновавшие Валерия Васильевича, он любил обсуждать в более узком кругу, состоявшем, кроме него, из Е. И. Кугушева,

А. И. Нейштадта и Я. В. Татаринова (все трое стали потом профессорами мехмата). Валерий Васильевич был признанным лидером этого кружка. Обладая очень важным качеством: сделать предмет или задачу, о которых он говорит, захватывающе интересными, он побуждал членов кружка тоже узнавать новое и думать об этом предмете. Так, вслед за Валерием Васильевичем члены кружка стали читать выпуски лекций и работы В. И. Арнольда, книгу “Динамические системы” Дж. Биркгофа, а позже, уже после окончания университета, – переведенные на русский язык работы А. Пуанкаре. Математическое общение было очень интенсивным.

Для Валерия Васильевича наибольший интерес представляла аналитическая механика, близкая к математике. В то время основным направлением исследований на кафедре (кроме активно развивавшейся механики космического полета) была теория устойчивости. Методы исследования (в основном теория Ляпунова) не были тесно связаны с современной математикой. Как оказалось в дальнейшем, тематика кафедры кардинально изменится с приходом Валерия Васильевича.

За курсовую работу 3-го курса по теме “Исследование интегрируемого случая Горячева–Чаплыгина в задаче о вращении тяжелого твердого тела”, предложенной ему научным руководителем профессором Ю. А. Архангельским, Валерий Васильевич получил первую премию на конкурсе студенческих научных работ. Однако, будучи не совсем удовлетворенным этой темой, он увлекся чтением только что переведенной на русский язык книги Пуанкаре “Новые методы небесной механики”, которая оказала огромное влияние на формирование его научных интересов. В существенной части последующих научных исследований Валерий Васильевич развивает идеи Пуанкаре и отвечает на поставленные им вопросы.

Начиная с четвертого курса В. В. Козлов сам выбирал темы своих исследований, в чем его поддерживал научный руководитель. Первый крупный результат был им получен на четвертом курсе. Он решил поставленную Пуанкаре в первом томе “Новых методов небесной механики” задачу доказательства неинтегрируемости уравнений движения тяжелого несимметричного твердого тела. Как и большая часть систем классической механики, это натуральная гамильтонова система с гамильтонианом вида

$$H(p, q) = \frac{\|p\|^2}{2} + V(q),$$

где $\|\cdot\|$ – риманова метрика на конфигурационном пространстве M . Для твердого тела пространство M есть $SO(3)$ с левоинвариантной метрикой, описывающей движение тела по инерции (задача Эйлера). После исключения интеграла вертикального кинетического момента, перенормировки и перехода к переменным действие–угол гамильтониан принимает стандартный вид

$$H(I, \theta) = H_0(I) + \mu H_1(I, \theta), \quad (I, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n \quad (n = 2),$$

где $\mu \ll 1$ для быстро закрученного тела. Пуанкаре назвал исследование систем с таким гамильтонианом основной задачей динамики. Он доказал несуществование дополнительного аналитического интеграла такой системы в виде ряда $F(I, \theta) = F_0 + \mu F_1 + \dots$ по параметру μ в случае, когда возмущение $H_1 = \sum a_k(I) e^{ik \cdot \theta}$ имеет много ненулевых коэффициентов Фурье, так что вековое множество $\{I: a_k(I) \neq 0, k \cdot \nabla H_0(I) = 0\}$ всюду плотно. Тогда первые интегралы системы оказываются зависимыми с гамильтонианом на вековом множестве, а значит, и всюду. Этот случай реализуется в рассмотренной Пуанкаре задаче трех тел в небесной механике. Для задач динамики твердого тела, которые гораздо ближе к интегрируемым, чем задача трех тел, ситуация существенно сложнее. Вековое множество в динамике твердого тела не плотно, а его точки накапливаются вблизи множества сингулярности невозмущенного гамильтониана $H_0(I)$, соответствующего сепаратрисам задачи Эйлера. Это делает доказательство неинтегрируемости весьма тонким. В конце концов Валерий Васильевич сумел преодолеть все трудности.

Эти результаты составили дипломную работу Валерия Васильевича, которая была опубликована в четырех статьях. Затем он исследовал условия расщепления сепаратрис (устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий гиперболических периодических траекторий) для быстро закрученного несимметричного тяжелого твердого тела и доказал неинтегрируемость в более сильном смысле (несуществование аналитических интегралов без предположения об их разложимости в ряд по параметру), а также существование хаотических траекторий.

После решения задачи Пуанкаре В. В. Козлов обратился к проблеме Пенлеве: имеется ли связь между однозначностью первых интегралов, продолженных в комплексную область, и мероморфностью решений как функций комплексного времени? Еще Софья Ковалевская обнаружила это соответствие в динамике твердого тела, но было не ясно, является ли оно случайным. В. В. Козлов показал, как ветвление решений препятствует существованию мероморфного первого интеграла. Впоследствии этот результат был обобщен в работах С. Л. Зиглина (тоже выпускника кафедры теоретической механики) и получил окончательную форму в виде теории Моралеса–Рамиса. Следует отметить, что В. В. Козлов – родоначальник не только этой теории, но и всех современных исследований, связанных с препятствиями к интегрируемости гамильтоновых систем. Методы явного интегрирования гамильтоновых систем (метод Л-А-пары, метод обратных задач теории рассеивания и др.) активно развивались в то время, однако задача доказательства неинтегрируемости фактически не рассматривалась со времен Пуанкаре. После работ В. В. Козлова она стала активной областью математики.

За достижения по теории неинтегрируемости Валерию Васильевичу присудили премию Ленинского комсомола – высшую награду в СССР для молодых ученых. В 28 лет он защитил докторскую диссертацию, основу которой составили его результаты по динамике твердого тела. Отметим, что В. В. Козлов пробыл в аспирантуре немногим более года и защитил кандидатскую диссертацию по другой теме. Полученные за время обучения в МГУ фундаментальные результаты стали основой монографии «Методы качественного анализа в динамике твердого тела» (Издательство МГУ, 1980).

В 1974 г. В. В. Козлов был принят ассистентом на кафедру теоретической механики механико-математического факультета. Заведующий кафедрой теоретической механики Д. Е. Охоцимский без колебаний брал на кафедру талантливых молодых ученых, даже если направление их исследований в корне отличалось от его научных интересов. Вскоре В. В. Козлов стал доцентом, а в 1983 г. профессором кафедры, где он проработал до 1999 г., воспитав множество учеников, впоследствии ставших известными математиками и механиками. Его лекционный курс классической механики до сих пор является основой обязательного курса теоретической механики на мехмате МГУ.

Еще в студенческие годы В. В. Козлов размышлял о возможных топологических препятствиях к интегрируемости, и даже однажды обсуждал это с В. М. Алексеевым. Наконец в 1979 г. Валерий Васильевич открыл топологические препятствия к интегрируемости, доказав отсутствие непостоянных аналитических первых интегралов геодезических потоков на замкнутой поверхности M^2 рода ≥ 2 (доказательство потребовало комбинации новых идей геометрии и динамики). Отсюда вытекает неинтегрируемость натуральной гамильтоновой системы с конфигурационным пространством M на уровне энергии

$$H = h > \max_M V$$

(при $h < \max V$ система может быть интегрируемой, но и в этом случае В. В. Козлов вместе с его учеником В. Теном получили интересные результаты).

Статья «Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем» была представлена в «Доклады Академии наук» Андреем Николаевичем

Колмогоровым. Как и многие великие результаты, по прошествии лет неинтегрируемость геодезического потока на поверхности рода больше единицы кажется почти сама собой разумеющейся, поскольку геодезический поток на гиперболическом многообразии M имеет положительную топологическую энтропию, что для потоков на трехмерном многообразии $T_1 M^2$ влечет несуществование аналитических интегралов. Однако для других классов интегралов, и тем более для систем большей размерности, связь положительности топологической энтропии с неинтегрируемостью весьма неочевидна, и часто доказательство неинтегрируемости сложнее, чем доказательство положительности топологической энтропии. В дальнейшем И. А. Тайманов распространил результат Валерия Васильевича о топологических препятствиях к интегрируемости на большие размерности. В частности, он доказал, что если $\text{rank } H_1(M^n) > n$, то геодезический поток на M не имеет полного набора аналитических интегралов.

В связи с исследованием вращения твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина В. В. Козлов пришел к изучению поведения интеграла от квазипериодических функций:

$$I(t) = \int_0^t f(\omega_1 t + x_1^0, \dots, \omega_n t + x_n^0) dt,$$

где $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – функция на торе с нулевым средним значением, а числа $\omega_1, \dots, \omega_n$ рационально несоизмеримы. Если f непрерывна, то (по теореме Г. Вейля)

$$I(t) = o(t) \quad \text{при } |t| \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, при $n = 2$ Пуанкаре привел пример непрерывной функции f с нулевым средним, для которой

$$I(t) \rightarrow +\infty \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad \text{как } t^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

В 1977 г. В. В. Козлов получил неожиданный результат: если $f \in C^2$ и $n = 2$, то функция $I(t)$ обладает свойством возвращаемости ($I(t_m) \rightarrow 0$ по некоторой последовательности $t_m \rightarrow +\infty$). Он также показал, что функция f в примере Пуанкаре нигде не дифференцируема. В 1979 г. Е. А. Сидоров усовершенствовал метод Козлова и доказал свойство возвращаемости для абсолютно непрерывных функций на двумерном торе. В. В. Козлов также показал, что если $f(x^0) \neq 0$ и $n = 2$, то интеграл I имеет бесконечно много нулей при $|t| \rightarrow \infty$. С другой стороны, для любой непрерывной функции f с нулевым средним найдутся точки $x^0 \in \mathbb{T}^n$, $f(x^0) = 0$, такие, что $I(t) \geq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Это найденное Валерием Васильевичем усиление классической теоремы П. Боля справедливо при всех $n \geq 1$.

В. В. Козлов сформулировал задачу о возвращаемости интеграла от квазипериодической функции при $n \geq 3$. Она оказалась значительно сложнее, чем в двумерном случае. Для гладких нечетных функций f она была решена С. В. Конягиным (1997), а в самом общем случае возвращаемость была доказана Н. Г. Мощевитиным, учеником Валерия Васильевича. Решение этой задачи связано с тонкими вопросами теории диофантовых приближений.

В первой половине 1980-х годов во Всесоюзном институте научно-технической информации (ВИНИТИ) готовилась к изданию новая серия обзорных работ по математике “Современные проблемы математики. Фундаментальные направления” под общей редакцией Р. В. Гамкрелидзе. Планировалось (и это осуществилось), что книги этой серии будут переводиться на английский язык издательством Springer как серия “Encyclopaedia of Mathematical Sciences”. Владимир Игоревич Арнольд отвечал за несколько обзоров по теории динамических систем. В качестве темы одного из обзоров он предложил классическую механику. Такое предложение было, по-видимому, не очень обычным, так как в то время классическая механика еще не так сильно ассоциировалась с теорией динамических систем, как сейчас. Этой теме был отведен целый том. В. И. Арнольд предложил В. В. Козлову и А. И. Нейштадту написать совместно с ним такой обзор. Участие в этом проекте пришлось Валерию Васильевичу

очень по душе. Работа давала возможность изложить сложившееся у него понимание предмета от основ до современного состояния. В то же время она делала необходимым освоение тех разделов предмета, которыми Валерий Васильевич сам ранее не занимался. Он писал быстро, в свойственном ему стиле – когда предмет излагается по возможности просто, в общем контексте математики, с историческими замечаниями и цитатами из классиков. Книга “Динамические системы – 3: Математические аспекты классической и небесной механики” была издана ВИНТИ в 1985 г. и получила известность как “зеленая книга”. Она стала одним из основных источников информации по классической и небесной механике и примыкающим к ним разделам теории динамических систем для исследователей как в России, так и за рубежом. В издательстве Springer книга вышла в 1988 г. и впоследствии допечатывалась, а также была переиздана в 1993 и 1997 гг.

Теория динамических систем – быстро развивающийся предмет. К 2000 г. был достигнут значительный прогресс в ряде задач этой теории, напрямую связанных с классической механикой и только вскользь упомянутых в “Динамических системах – 3” издания 1985 г. Совсем другой вид приобрела теория Колмогорова–Арнольда–Мозера, теория Обри–Мазера стала стандартным разделом теории динамических систем, стали достаточно обыденными вопросы об экспоненциально малых явлениях, представлявшие ранее совершенно недоступными. В связи с этим было подготовлено новое издание книги, которое вышло на русском языке в издательстве УРСС в 2002 г. и на английском языке в издательстве Springer в 2006 г. Замечательные результаты Валерия Васильевича по проблеме интегрируемости гамильтоновых систем были предметом его приглашенного доклада на Международном конгрессе математиков в Беркли (США, 1986) и вошли в широко цитируемую обзорную статью в УМН (1983) “Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике”.

Дальнейшее развитие методы Пуанкаре исследования препятствий к интегрируемости гамильтоновых систем получили в совместных работах Валерия Васильевича с его учеником (в то время студентом механико-математического факультета МГУ) Д. В. Трещёвым. Для систем с конфигурационным пространством T^n и гамильтонианом $H = \|p\|^2/2 + \mu V(q)$, где кинетическая энергия задается плоской метрикой, а потенциальная энергия есть тригонометрический полином $V(q) = \sum a_k e^{ik \cdot q}$, удалось проанализировать вековое множество (множество зависимости первых интегралов) во всех порядках теории возмущений. Необходимость в таком подробном анализе была вызвана тем, что для рассматриваемого класса систем в любом конечном порядке по малому параметру μ вековое множество недостаточно велико для того, чтобы дать препятствие к интегрируемости. В результате было установлено, что интегрируемость в таких системах возможна лишь в случае, когда имеется полный набор первых интегралов, являющихся линейными или квадратичными функциями импульса.

Впоследствии это и другие наблюдения привели Валерия Васильевича к гипотезе, что в случае вещественно-аналитической натуральной гамильтоновой системы с конфигурационным пространством $M = \mathbb{T}^2$ интегрируемость равносильна существованию дополнительного первого интеграла степени не выше 2 по скорости, а для $M = S^2$ эта степень не превосходит четырех. Несмотря на усилия многих математиков, эта гипотеза до сих пор полностью не доказана.

В. В. Козлов обнаружил, что похожие методы анализа векового множества эффективно работают в другом важном классе систем – в обобщенных цепочках Тоды. Конфигурационным пространством в этих системах является евклидово пространство, а потенциал – сумма конечного набора экспоненциальных функций $V(q) = \sum a_k e^{k \cdot q}$, аргументами которых являются линейные формы от координат. Системы такого вида хорошо известны в математической физике. Усилиями ряда математиков (А. М. Переломов, А. Г. Рейман, М. А. Семёнов-Тян-Шанский и др.) были найдены серии интегрируемых случаев и установлена их связь с диаграммами Дынкина простых алгебр

Ли и их обобщений. Подход Валерия Васильевича к этой проблеме был противоположным: решалась задача о поиске препятствий к существованию полиномиальных по импульсу интегралов. Анализ векового множества во всех порядках теории возмущений позволил установить, что полного набора независимых интегралов нет для всех потенциалов, кроме потенциалов из некоторого исключительного множества, определяемого в терминах диаграмм Дынкина. Эти диаграммы включали в качестве подмножества диаграммы интегрируемых цепочек, найденные ранее. Однако там были и новые диаграммы. Интегрируемость большинства новых систем из классификации Валерия Васильевича была доказана.

Упомянем также совместные работы Валерия Васильевича с Д. В. Трещёвым о неинтегрируемости квантовых систем с конфигурационным пространством T^n и потенциалом в виде тригонометрического полинома по координатам системы. Здесь под интегрируемостью понималось существование полного набора полиномиальных по квантовому импульсу $p = i\nabla$ операторов, коммутирующих с гамильтонианом $H = -\nabla^2/2 + V(q)$. Оказалось, что, как и для классических систем, интегрируемость возможна только в случае, когда коммутирующие операторы могут быть взяты линейными или квадратичными по импульсу, другими словами, являются дифференциальными операторами первого или второго порядка. Далее с аналогичной точки зрения был проанализирован случай квантовых систем с экспоненциальным взаимодействием. Было установлено, что интегрируемые системы являются квантовыми версиями классических интегрируемых обобщенных цепочек Тоды. Эти результаты как будто указывают на то, что интегрируемых квантовых систем очень мало. Однако в своих недавних исследованиях В. В. Козлов установил, что свойство интегрируемости для квантовой системы чрезвычайно чувствительно к определению интегрируемости. Это обстоятельство радикально отличает квантовые системы от классических, подавляющее число которых интегрируемы или неинтегрируемы одновременно в смысле всех разумных определений интегрируемости.

В другой недавней совместной работе с Д. В. Трещёвым (2019) Валерий Васильевич применил метод Пуанкаре–Козлова в задаче существования нетривиальных полиномиальных по импульсам первых интегралов для движения частицы по n -мерному евклидову тору в силовом поле, потенциал которого имеет сингулярности типа $r^{-\alpha_k}$, $0 < \alpha_k < n$. Оказалось, что, за исключением нескольких критических значений показателя α_k , наличие сингулярности влечет несуществование полиномиальных по импульсу первых интегралов, независимых от интеграла энергии.

В развитие своих результатов о топологических препятствиях к интегрируемости, в совместной работе с С. В. Болотиным (2016) В. В. Козлов доказал, что если потенциал натуральной системы на двумерном многообразии M имеет сингулярности типа $r^{-\alpha_k}$, причем $\frac{1}{2} \sum \alpha_k > \chi(M)$ (эйлерова характеристика), то система неинтегрируема, а ее топологическая энтропия положительна.

В 1974 г. В. В. Козлов начал заниматься вариационными методами в динамике. Со времен Якоби известно, что для натуральных гамильтоновых систем исследование периодических траекторий на уровне энергии $H = h > \max V$ сводится к задаче о замкнутых геодезических римановой метрики Мопертюи $ds = \sqrt{2(h - V(q))} \|dq\|$. Для задачи о замкнутых геодезических со времен Пуанкаре и Биркгофа получены многочисленные фундаментальные результаты. Проблема гораздо сложнее для значений энергии $h < \max V$, когда область возможности движения $D = \{q: V(q) \leq h\}$ имеет край и метрика Мопертюи вырождается. Следуя Пуанкаре, В. В. Козлов назвал периодические траектории с выходом на границу ∂D либрациями. Либрации (обратимые периодические траектории) имеют с границей ровно две общие точки, и в этих точках скорость системы обращается в нуль. В 1974 г. В. В. Козлов доказал существование либраций в областях возможности движения с несвязной границей. Позднее он узнал о забытой работе Г. Зейфerta 1948 г., в которой был рассмотрен случай, когда область возможности движения диффеоморфна шару. В 1978 г. случай $D \cong B^n$

рассмотрел также А. Вейнштейн. В общем случае существование либраций доказано С. В. Болотиным (1978). Для критического значения энергии $h = \max V$ похожим вариационным методом было доказано существование гомоклинических траекторий. Затем В. В. Козлов вместе с С. В. Болотиным дали оценки снизу числа либраций через топологию области возможности движения. Много лет спустя эти результаты были обобщены методами симплектической топологии. Работы Валерия Васильевича по вариационным методам стали основой обзорной статьи в УМН “[Вариационное исчисление в целом и классическая механика](#)” (1985). За эти работы ему в 1986 г. была присуждена Ломоносовская премия I степени – высшая награда МГУ.

В 1980-х годах В. В. Козлов получил фундаментальные результаты в задаче доказательства гипотезы Ляпунова – обращение теоремы Лагранжа–Дирихле об устойчивости положений равновесия натуральных систем в случае аналитической потенциальной энергии. Гипотеза Ляпунова утверждает, что если положение равновесия не является точкой строгого локального минимума потенциальной энергии, то оно неустойчиво. Эта задача исследовалась на кафедре теоретической механики Н. Г. Четаевым и его учениками методом функций Ляпунова–Четаева. Для доказательства неустойчивости В. В. Козлов предложил новый метод, когда асимптотические решения к положению равновесия ищутся в виде ряда по обратным дробным степеням времени, а коэффициенты рядов – многочлены от логарифмов времени. Этим методом им установлены фундаментальные результаты о неустойчивости для сильно нелинейных систем. Из полученных общих результатов, в частности, вытекает, что все равновесия в поле с гармоническим потенциалом неустойчивы. Тем самым было впервые дано строгое доказательство теоремы Ирншоу (1839) о неустойчивости равновесий системы зарядов в электростатическом силовом поле.

Недавно В. В. Козлов вернулся к задаче об асимптотических траекториях в совместной работе с Д. В. Трещёвым (2019), где обсуждается тонкая связь неустойчивости состояния равновесия гамильтоновой системы с наличием асимптотических траекторий.

В разработку метода асимптотических решений для многомерных сильно нелинейных систем Валерий Васильевич вовлек В. П. Паламодова. С помощью теории Кодаиры разрешения особенностей В. П. Паламодов доказал обращение теоремы Лагранжа–Дирихле для аналитических систем с двумя степенями свободы. В многомерном случае гипотеза Ляпунова, по-видимому, до сих пор не доказана.

В работах со своим учеником С. Д. Фуртой Валерий Васильевич обобщил теорию асимптотических решений на случай систем с бесконечным числом степеней свободы, включая динамику нерастяжимых нитей. Эти и другие результаты подытожены в их монографии “[Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений](#)” (2009), опубликованной на английском языке издательством Springer (2013). Совсем недавно (2019) Валерий Васильевич вернулся к задаче об устойчивости нити. Он получил новые варианты классических изопериметрических неравенств для моментов инерции замкнутой кривой и применил их для доказательства устойчивости стационарных движений гибкой нити.

Упомянем еще работу Валерия Васильевича, в которой исследована задача об устойчивости положений равновесия неавтономной системы с потенциальной энергией $f(t)V(q)$, где $f(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Такие системы описывают, например, вращение твердого тела, падающего в идеальной жидкости. Особенность поведения таких систем состоит в том, что амплитуда колебаний стремится к нулю, а частота, наоборот, неограниченно возрастает.

Валерию Васильевичу удастся получать интересные новые результаты в, казалось бы, полностью изученных областях. В качестве примера упомянем его работы о гироскопической стабилизации положений равновесия натуральных систем гироскопическими силами $F = \Gamma \dot{q}$, $\Gamma^* = -\Gamma$. В. В. Козлов преобразовал теорию гироскопической стабилизации, обогатив ее новыми идеями симплектической геометрии и топологии.

В развитие этих идей он показал, что любая невырожденная линейная система, допускающая первый интеграл в виде невырожденной квадратичной формы, является мультигамильтоновой и имеет полный набор квадратичных первых интегралов. Недавно В. В. Козлов обобщил эту теорию на бесконечномерные системы, включая уравнения Максвелла и Шрёдингера (см. статью [“Квадратичные законы сохранения уравнений математической физики”](#), опубликованную в УМН в 2020 г.), а также на нелинейные квазиоднородные системы дифференциальных уравнений.

В начале 1980-х годов В. В. Козлов обратился к проблеме обоснования теории связей – фундаментального понятия лагранжевой и гамильтоновой механики, которое, однако, плохо поддается сведению к первичным принципам ньютоновой механики и подвержено известным парадоксам. Эта задача лучше всего изучена для голономных связей. Голономная связь – это подмногообразие в конфигурационном пространстве, локально задающееся уравнением $f(q) = 0$. Для разрешения парадоксов теории связей Л. Прандтлем, Ф. Клейном, Л. Лекорню было предложено заменить твердые тела, реализующие голономные связи, упругими телами с большим коэффициентом упругости. Общая теорема о реализации голономных связей силовым полем с потенциальной энергией вида $V = N|f(q)|^2$, $N \gg 1$, впервые высказана Р. Курантом. Доказательство этой теоремы в общем случае непотенциальных сил было впервые дано в работе В. В. Козлова и А. И. Нейштадта.

Задача обоснования принципов механики для неголономных связей гораздо сложнее. Неголономная связь – это распределение $\Gamma_q \subset T_q M$, локально заданное линейным по скорости уравнением вида $g(q, \dot{q}) = 0$ (дифференциальной 1-формой). Классическая модель неголономных связей утверждает, что уравнения движения неголономной системы получаются из принципа Даламбера–Лагранжа $[L] \perp \Gamma_q$, где $L(q, \dot{q})$ – лагранжиан, а $[L] = -\frac{d}{dt}L\dot{q} + L_q$ – вариационная производная. Идея о реализации неголономных связей предельным переходом в системах с большим анизотропным вязким трением $F = -\partial_{\dot{q}}R$ с диссипативной функцией Релея типа $R = N|g(q, \dot{q})|^2$, $N \gg 1$, была высказана К. Каратеодори и полностью обоснована сотрудниками кафедры теоретической механики (в самом общем случае это было сделано А. В. Карапетьяном, одногруппником Валерия Васильевича). Классическая неголономная модель достаточно хорошо описывает системы с качением без проскальзывания. Давно известно, что эта модель не удовлетворяет фундаментальному вариационному принципу наименьшего действия.

Валерий Васильевич задался вопросом: как изменится механика неголономных систем, если в качестве аксиомы взять не принцип Даламбера–Лагранжа, а принцип наименьшего действия? В этом случае траектории системы являются экстремалами вариационной задачи Лагранжа $\delta \int L(q, \dot{q}) dt = 0$ на множестве кривых с ограничениями $\dot{q}(t) \in \Gamma_{q(t)}$. Если неголономная связь интегрируема, то система удовлетворяет принципу Даламбера–Лагранжа. Разработанная Валерием Васильевичем модель механики неголономных систем тесно связана с теорией оптимального управления и субримановой геометрий. Такую модель движения систем с неголономными связями теперь принято называть закономерной механикой.

Далее Валерий Васильевич рассмотрел вопрос, как закономерные системы возникают в природе. Он предложил новый способ реализации неголономных связей путем введения анизотропии в инерционные свойства системы, когда лагранжиан содержит член вида $M|g(q, \dot{q})|^2$ с большой “массой” $M \gg 1$. Пример такой анизотропии дает движение пластинки в идеальной жидкости. При движении острой кромкой вперед пластинка не испытывает сопротивления, а при движении широкой стороной вперед к ее массе добавляется присоединенная масса жидкости. В. В. Козлов доказал общую теорему о предельном переходе при $M \rightarrow +\infty$ в системах с анизотропией кинетической энергии. Оказалось, что в пределе движение системы описывается закономерной

механикой. Цикл работ В. В. Козлова по динамике систем с неголономными связями удостоен премии АН СССР им. С. А. Чаплыгина (1988).

Затем В. В. Козлов занялся вопросами реализации односторонних связей, когда движение системы происходит в области с краем $D \subset M$, а при попадании на границу ∂D происходит удар. В разработанной им модели запрещенная для движения область $M \setminus D$ заменяется вязко-упругой средой, а затем коэффициенты упругости и диссипации устремляются к бесконечности. Таким образом возникает семейство моделей систем с ударами. При большой диссипации получается модель неупругого удара, а при отсутствии диссипации – модель абсолютно упругого удара.

С помощью полученных общих результатов В. В. Козлов развил новый подход к исследованию устойчивости движения систем с ударами. Этот метод сводит исследование устойчивости периодических траекторий бильярдных систем к задаче устойчивости для гладких динамических систем. Полученные результаты вошли в монографию В. В. Козлова и Д. В. Трещёва [“Биллиарды. Генетическое введение в теорию систем с ударами”](#) (1991), в том же году переведенную на английский язык Американским математическим обществом. В ней представлены также новые результаты авторов об интегрируемости бильярдных систем.

В. В. Козлову принадлежат фундаментальные результаты и для классических неголономных систем, удовлетворяющих принципу Даламбера–Лагранжа. В частности, он доказал, что типичные неголономные системы не допускают инвариантной меры (голономные и вакономные системы гамильтоновы и имеют инвариантную меру Лиувилля). Наличие инвариантной меры часто приводит к интегрируемости неголономной системы. Проблема существования инвариантной меры оказалась тесно связанной с экзотической динамикой кельтских камней. В дальнейшем эти вопросы развивались группой А. В. Борисова и И. С. Мамаева. Среди многих достижений В. В. Козлова по неголономной механике отметим еще, что он существенно обобщил задачу Чаплыгина о качении шара и задачу Суслова, что привело к открытию новых интегрируемых неголономных систем.

В 1983 г. В. В. Козлов начал новый цикл работ под названием “Гидродинамика гамильтоновых систем”. Им установлены глубокие аналогии между гамильтоновыми системами, гидродинамикой идеальной жидкости, геометрической оптикой и равновесной термодинамикой.

Пусть $N \subset T^*M$ – инвариантное многообразие гамильтоновой системы, диффеоморфно проектирующееся на конфигурационное пространство M . Стандартным примером являются лагранжевы многообразия, для которых ограничение симплектической формы нулевое. В. В. Козлов обнаружил, что когда эта форма невырождена, проекция v гамильтонова векторного поля на M удовлетворяет многомерным аналогам гидродинамических уравнений Ламба $\partial_t \omega + i_v \omega = -dh$, где ω есть 1-форма на M , аналог завихренности. Один из простейших примеров таких инвариантных многообразий дает задача о геодезических левоинвариантной метрики на группе Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Соответствующая гамильтонова система имеет первый интеграл момента $J: T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Фиксируя постоянную $c \in \mathfrak{g}^*$, получаем инвариантное многообразие $N = J^{-1}(c)$ в фазовом пространстве, диффеоморфно проектирующееся на группу. Например, для волчка Эйлера постоянны проекции вектора кинетического момента на неподвижные оси. Фиксируя эти постоянные, получаем поток на группе $SO(3)$, похожий на вихревое течение идеальной жидкости.

Гидродинамический подход к теории гамильтоновых систем позволил В. В. Козлову развить “вихревой” метод их интегрирования, тесно связанный с теорией некоммутативного интегрирования гамильтоновых систем. Для потенциальных течений этот метод переходит в классический метод Гамильтона–Якоби. Полученные результаты подытожены в монографии [“Общая теория вихрей”](#) (1998), вышедшей на английском языке в издательстве Springer (2003).

С помощью развитой им техники В.В. Козлов получил интересные результаты о движении в жидкости твердого тела, геометрия масс которого меняется за счет внутренних сил. В отсутствие жидкости центр масс тела был бы неподвижен. В.В. Козлов показал, что в жидкости (в том случае, когда не все присоединенные массы равны между собой) движение тела вполне управляемо внутренними силами: его можно переместить из любого положения в любое заданное.

Большой цикл работ Валерия Васильевича связан с обобщением первых интегралов дифференциальных уравнений – тензорных инвариантов. Сюда относятся векторные поля симметрий, инвариантные дифференциальные формы, инвариантные меры и т. д. Локально, в окрестности неособой точки, где векторное поле выпрямляемо, имеются инвариантные тензорные поля любой структуры. Ситуация меняется, когда тензорные поля определены глобально или в окрестности особой точки.

Для квазиоднородных систем дифференциальных уравнений (сюда относятся уравнения Эйлера–Пуассона, задача многих тел в небесной механике и многие другие) В.В. Козлов открыл резонансные соотношения для показателей Ковалевской, зависящие от структуры тензорного инварианта. В развитие своих результатов о топологических препятствиях к интегрируемости он доказал, что геодезические потоки на поверхностях рода ≥ 2 не допускают нетривиальных полей симметрии и линейных интегральных инвариантов. Среди многих других результатов, В.В. Козлов решил задачу Пуанкаре о несуществовании нетривиальных линейных интегральных инвариантов ограниченной задачи трех тел. За работы по тензорным законам сохранения В.В. Козлов и С.В. Болотин были удостоены премии им. С.В. Ковалевской РАН (2000). Большая часть результатов Валерия Васильевича по теории интегрируемости и тензорным инвариантам вошли в монографию [“Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике”](#) (1995), переведенную на английский язык издательством Springer (1996).

В недавней работе [“Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений”](#) (УМН, 2019) В.В. Козлов доказал общую теорему об интегрируемости динамических систем, допускающих полный набор интегральных инвариантов по Картану. Он ввел новое понятие флага тензорных инвариантов и открыл соотношения между показателями Ковалевской квазиоднородных систем дифференциальных уравнений и флагами квазиоднородных тензорных инвариантов.

В 1999 г. В.В. Козлов стал заведующим кафедрой математической статистики и случайных процессов МГУ, что стимулировало его интерес к термодинамике, статистической механике и эргодической теории. Он много сделал для развития как равновесной, так и неравновесной статистической механики. В равновесном случае Валерий Васильевич предложил новое обоснование распределения Гиббса, не опирающееся на эргодическую гипотезу и не требующее предельного перехода к бесконечному числу степеней свободы.

Основное его достижение в неравновесной статистической механике – математически корректное обоснование нулевого начала термодинамики в рамках теории ансамблей Гиббса. В.В. Козлов дал новое решение известной проблемы обратимости. Центральное место в его подходе занимает идея слабой сходимости решений уравнения Лиувилля. В неявном виде эта идея появилась в работе Пуанкаре [“Замечания о кинетической теории газов”](#) (1906), которую до Валерия Васильевича не удавалось полностью понять и оценить.

Напомним, что согласно Гиббсу механическая система – это обыкновенное дифференциальное уравнение в конечномерном фазовом пространстве P большой размерности. Предполагается, что система обладает вероятностной инвариантной мерой μ . Стандартный пример – гамильтонова система, ограниченная на компактный уровень энергии. Рассмотрим еще одну (вообще говоря, не инвариантную) вероятностную меру $d\nu = \rho d\mu$ на P . Неотрицательная функция ρ называется плотностью меры ν отно-

сительно μ . Мера ν трактуется как начальное распределение вероятностей в системе, а величина $s = - \int \rho \ln \rho d\mu$ называется энтропией Больцмана–Гиббса. Динамика системы заставляет меру ν эволюционировать: в момент времени t мера принимает вид $d\nu_t = \rho_t d\mu$, где ρ_t удовлетворяет уравнению Лиувилля. Пуанкаре хорошо знал, что соответствующая энтропия $s_t = - \int \rho_t \ln \rho_t d\mu$ от времени не зависит, что с точки зрения термодинамики выглядит несколько обескураживающе. В. В. Козлов обратил внимание на следующее важное обстоятельство. Рассмотрим предел (в метрике L^2)

$$\rho_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho_t dt,$$

который существует по эргодической теореме фон Неймана. Тогда энтропия s_∞ предельной меры $d\nu_\infty = \rho_\infty d\mu$ оказывается, вообще говоря, строго больше начальной энтропии s . Несложно установить, что в тех случаях, когда существует (слабый) предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_t$, он обязан совпасть с ρ_∞ .

Далее В. В. Козлов ставит вопрос: когда этот предел существует? Доказать его существование удалось в нескольких важных частных случаях: в системах с сильными эргодическими свойствами, а также для так называемых слоистых потоков (например, для геодезических потоков). В качестве технического средства, используемого для доказательства теорем, Валерию Васильевичу пришлось придумать новые формы эргодических теорем, которые представляют самостоятельный интерес.

Одной из простейших, но весьма важных моделей статистической механики является бесстолкновительный газ Больцмана–Гиббса. Он представляет собой систему частиц (обычно бесконечно малого размера) в “резервуаре”. Частицы друг с другом не сталкиваются и движутся равномерно и прямолинейно до столкновения со стенками резервуара, причем отражение от стенок является абсолютно упругим: угол падения равен углу отражения. Таким образом, движение индивидуальных частиц описывается бильярдной системой. Валерий Васильевич посвятил исследованию газа Больцмана–Гиббса несколько интересных статей. Предположив, что частиц в системе континуум, так что состояние системы описывается плотностью распределения в фазовом пространстве бильярдной задачи, он обнаружил, что для некоторого класса резервуаров, включающих прямоугольный ящик, плотность в проекции на конфигурационное пространство быстро выравнивается. Это означает, что газ стремится заполнить резервуар равномерно. Этот эффект позволил объяснить механизм трения газа о стенки трубы в случае шероховатостей определенного типа. Указанные результаты о свойствах газа Больцмана–Гиббса опираются на утверждения о структуре первых интегралов в соответствующих бильярдных задачах, развивающие ранние фундаментальные результаты Валерия Васильевича. Классические и современные результаты об интегрируемости бильярдных систем собраны Валерием Васильевичем в обзоре “Полиномиальные законы сохранения для газа Лоренца и газа Больцмана–Гиббса” (УМН, 2016).

Подробное изложение статистической теории В. В. Козлова можно найти в монографиях “Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре” (2002) и “Ансамбли Гиббса и неравновесная статистическая механика” (2008).

Отметим еще работу В. В. Козлова “Обобщенное кинетическое уравнение Власова” (УМН, 2008), в которой исследована задача о слабых пределах решений обобщенного уравнения Власова из теории плазмы при неограниченном возрастании времени. Эта задача имеет важное значение при переходе от микро- к макроописанию, когда изучается поведение средних значений динамических величин. В. В. Козлов показал, как формально обратимое уравнение Власова приводит к необратимому поведению. Результаты общего характера применены к изучению континуумов взаимодействующих частиц и статистических свойств плоских течений идеальной жидкости.

Научная продуктивность Валерия Васильевича не ослабевает со временем. Достаточно упомянуть темы его работ за последний год: теория тензорных инвариантов, уравнения Максвелла, ускорение Ферми, динамика систем с односторонними неинтегрируемыми связями, теория интегрируемости уравнения Шрёдингера, асимптотические траектории и проблема устойчивости, изопериметрические неравенства.

Удивительно, как Валерию Васильевичу удается активно и плодотворно работать в математике, несмотря на огромные административные нагрузки. Он всегда активно участвовал в административной работе, понимая ее значимость для развития науки, и прекрасно проявлял себя на всех постах. Валерий Васильевич работал зам. декана мехмата по научной работе, проректором МГУ, заместителем министра образования, вице-президентом РАН, исполняющим обязанности президента РАН. В 2017 г. Валерий Васильевич отказался баллотироваться на пост президента РАН, поскольку хотел иметь больше времени для научной работы. В приемной вице-президента РАН В. В. Козлова от его референта Любови Николаевны можно иногда услышать: “Где это видано, чтобы не молодежь писала статьи, а он сам, да еще включал их в соавторы!”

В 2004 г. Валерий Васильевич был избран директором Математического института им. В. А. Стеклова. За время его работы на этом посту условия работы сотрудников института кардинально улучшились. За эти годы в МИАН был принят целый ряд талантливых молодых математиков, часть из которых вернулась на работу в Россию из-за рубежа. Одним из нововведений Валерия Васильевича на посту директора явилось создание Научно-образовательного центра МИАН, предназначенного для подготовки сильных студентов, желающих заниматься математикой, механикой и физикой на профессиональном уровне.

В августе 2010 г. Валерий Васильевич принял решение о создании в МИАН Лаборатории популяризации и пропаганды математики – первого в современной истории Российской академии наук структурного подразделения по популяризации науки. Решение было принято в обстановке, когда, несмотря на очевидную необходимость подобной деятельности как для науки в целом, так и для конкретного института, юридических возможностей для функционирования такого подразделения было немного. Но с тех пор лаборатория стала главным центром популяризации математики в нашей стране, а Валерий Васильевич и по сей день принимает действенное и далеко не формальное участие в работе лаборатории. Сотрудники и гости лаборатории всегда рады видеть Валерия Васильевича на вечерних чаепитиях около шкафа Чебышёва. Когда текущие дела уже обсуждены, речь заходит про науку, ее историю, историю вообще, литературу, живопись, музыку... И всегда Валерий Васильевич выступает глубоким, широко эрудированным, живым собеседником и рассказчиком.

В 2018 г. В. В. Козлов ушел с поста директора МИАН, оставшись рядовым (но самым продуктивным!) сотрудником отдела механики. В настоящее время он является вице-президентом Российской академии наук и академиком-секретарем отделения математических наук. Валерий Васильевич также заведует кафедрой дифференциальных уравнений мехмата МГУ.

В. В. Козлов – создатель школы по динамическим системам классической механики, которая хорошо известна как в нашей стране, так и за рубежом. В числе его учеников академик и член-корреспондент РАН, 9 докторов и 30 кандидатов физико-математических наук. Многие крупные математики более молодого поколения, не являющиеся прямыми учениками Валерия Васильевича, с благодарностью отмечают его поддержку и научное влияние.

Семинар Валерия Васильевича (совместно с его учениками С. В. Болотиным и Д. В. Трещёвым) по классической динамике и статистической механике на мехмате МГУ охватывает широкий круг проблем, возникающих в разных областях математики, механики и физики. В. В. Козлов является главным редактором журнала

“Известия РАН. Серия математическая”, членом редколлегии журналов “Регулярная и хаотическая динамика”, “Доклады Академии наук”, “Математические заметки”, “Российский журнал математической физики”, “Нелинейная динамика”.

У Валерия Васильевича много научных наград. Кроме упомянутых выше он удостоен Государственной премии РФ (1994), Золотых медалей им. Л. Эйлера (2007) и С. А. Чаплыгина (2015) РАН, международной премии “Джили и Агостинелли” Туринской академии наук (2009), Демидовской премии (2018).

В 1997 г. В. В. Козлов был избран членом-корреспондентом, а в 2000 г. – действительным членом Российской академии наук. Он также является иностранным членом Научного общества Сербии (2003), иностранным членом Черногорской академии наук и искусств (2011), иностранным членом Сербской академии наук и искусств (2012), членом Европейской академии наук и искусств по отделению естественных наук (2016). Валерий Васильевич награжден орденом Почета (1999), орденами “За заслуги перед Отечеством” IV степени (2005), III степени (2009) и II степени (2014), орденом Александра Невского (2019).

От всей души поздравляем Валерия Васильевича с 70-летним юбилеем и желаем ему крепкого здоровья, счастья и дальнейших успехов на благо российской науки.

*С. В. Болотин, А. В. Борисов, А. В. Карпетян, Б. С. Кашин,
Е. И. Кугушев, А. И. Нейштадт, Д. О. Орлов, Д. В. Трещев*