Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Качуровский, Скорости сходимости в эргодических теоремах, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 4, 73–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm995>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:50:32

УДК 517.987+519.214

СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ

А. Г. КАЧУРОВСКИЙ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	73
Глава I . Скорости сходимости в индивидуальной эргодической те- ореме	79
§ 1 . Рост дисперсий $DS_n f$	79
§ 2 . Убывание вероятностей ε -уклонений	86
§ 3 . О законе повторного логарифма	94
§ 4 . О равномерной сходимости	95
Глава II . Колебания средних в индивидуальной эргодической тео- реме	98
§ 5 . Пересечение полосы	98
§ 6 . ε -флуктуации	99
§ 7 . p -вариация	103
Глава III . Скорости сходимости и колебания в других эргодических теоремах	104
§ 8 . Скорости сходимости	104
§ 9 . Колебания	106
Приложение 1. Некоторые интерпретации на языке нестандартного анализа	111
Приложение 2. С. А. Утев Оценки больших уклонений случайного чис- ла флуктуаций средних для независимых слагаемых	114
Приложение 3. Флуктуации в ограниченных мартингалах	117
Список литературы	122

Введение

Впервые вопрос о скоростях сходимости в эргодических теоремах рассматривался Дж. фон Нейманом в 1932 году [36]. Было замечено, что оригинальное доказательство

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-00528) и American Mathematical Society's former Soviet Union Aid Fund.

[35] статистической эргодической теоремы дает возможность “численной оценки скорости сходимости”, в то время как из доказательства Г. Биркгофа индивидуальной эргодической теоремы такая информация не извлекается.

Как хорошо известно специалистам, невозможно получить сколько-нибудь общие (т.е. равномерные, зависящие только от усредняемой функции) оценки этих скоростей. Обзору соответствующих запрещающих примеров почти целиком посвящен небольшой раздел “Скорости сходимости” в монографии У. Кренгеля “Эргодические теоремы” [31, с. 14–15]. Основная цель настоящей работы – описание положительных результатов по скоростям сходимости и по тесно примыкающему вопросу о колебательном поведении средних в различных эргодических теоремах. Предлагаемый обзор связан с исследованиями автора и не претендует на законченное изложение в этой области. Более того, систематические исследования тут только начинаются и находятся, в основном, на стадии поиска разумных постановок вопросов и выяснения, от каких параметров зависит та или иная характеристика скорости сходимости.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность В. И. Оселедцу и А. М. Степину за плодотворные обсуждения предлагаемых результатов по скоростным характеристикам сходимости, а также С. В. Нагаеву и С. А. Утеву, Б. И. Голубову и С. В. Конягину за полезные консультации. Благодарен автор и В. В. Иванову – за ряд важных замечаний по колебательным характеристикам.

0.1. Система обозначений. Пусть (Ω, λ) – пространство с вероятностной мерой, T – его автоморфизм. Для каждой $f \in L_1(\Omega)$ обозначим

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \quad \text{и} \quad A_n f = \frac{1}{n} S_n f.$$

Тогда индивидуальная эргодическая теорема утверждает существование п.в. предела

$$f^* = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n f$$

и равенство $\int f d\lambda = \int f^* d\lambda$.

Через U_T обозначают (унитарный) оператор, действующий в (гильбертовом) пространстве $L_2(\Omega)$ по формуле $U_T f = f \circ T$. Статистическая эргодическая теорема утверждает существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_T^k f,$$

равного f^* , причем f^* оказывается ортогональной проекцией f на подпространство неподвижных векторов оператора U_T . Через $b_k f$ будем обозначать корреляционные коэффициенты, т.е. скалярные произведения $(U_T^k f, f)$. Заметим, что они зависят не только от f , но и от T , как и спектральная мера σ_f – такая конечная борелевская мера на единичной окружности, что

$$b_k f = \int_0^{2\pi} e^{ikx} d\sigma_f(x)$$

при всех целых k . В эргодической теории последний интеграл обычно берется по окружности единичной длины, в теории вероятностей – единичного радиуса. Нам здесь удобнее указанный выше второй вариант. Отметим вытекающую из обсуждаемой формулы прямую связь между $\{b_k f\}$ и коэффициентами Фурье меры σ_f , часто используемую в дальнейшем.

Подробную информацию о перечисленных выше и других понятиях и результатах эргодической теории, используемых в этой работе, можно найти в обстоятельных монографиях [12], [31]. Справочниками по рядам Фурье здесь могут служить известные монографии [2], [20], по спектральной теории линейных операторов – [1], по теории вероятностей – [19].

0.2. О равномерности оценок. Вопрос о равномерности получаемых оценок является настолько большим для скоростных характеристик сходимости, что иногда [30], [31] даже пишут, что нет скорости сходимости в эргодических теоремах. Между тем, для колебательных характеристик сходимости этот вопрос так остро не стоит. Следующий совсем простой пример поясняет, в первом приближении, в чем тут дело.

Пусть пространство с мерой – окружность единичной длины с мерой Лебега, f – характеристическая функция ее правой половинки. Для каждого натурального N разобьем нашу окружность на $2N$ равных (полуоткрытых) дуг, по N в каждой ее половине, и рассмотрим автоморфизм T_N периода $2N$, сдвигающий каждую из этих дуг в соседнюю против часовой стрелки.

Тогда, как нетрудно видеть, скорость сходимости средних к пределу $f^* \equiv 1/2$, как эту скорость ни определяй, зависит от N : чем больше N , тем медленнее сходимость. То есть нет равномерной по $\{T_N\}_N$ оценки. Между тем, колебательный характер сходимости от N почти не зависит.

Уже этот тривиальный пример показывает, что нельзя давать оценки скорости сходимости в эргодических теоремах, зависящие только от усредняемой функции f и не зависящие от выбора автоморфизма T (т.е. равномерные по группе автоморфизмов). Напротив, все (рассматриваемые в этой работе) колебательные характеристики допускают такую оценку, равномерную к тому же еще и по шару в L_p , т.е. зависящую только от $\|f\|_p$ и ни от чего больше.

Более глубокий анализ показывает, что дело со скоростями сходимости обстоит еще хуже. Оказывается, уже для любого отдельно взятого эргодического автоморфизма пространства Лебега нет оценок скоростей сходимости, равномерных по $\|f\|_p$ (даже в классе характеристических функций), как эти скорости ни определяй.

А именно, как обнаружили Г. Халаш и У. Кренгель, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1 [27], [30]. *Для любого эргодического автоморфизма отрезка с мерой Лебега можно подобрать характеристические функции со сколь угодно быстрой и сколь угодно медленной скоростями сходимости в эргодической теореме:*

1) *для любой (сколь угодно медленно) монотонно стремящейся к бесконечности последовательности $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $a_1 \geq 2$, найдется подмножество A отрезка любой наперед заданной меры $\lambda(A)$ такое, что*

$$|A_n(\chi_A) - \lambda(A)| \leq \frac{a_n}{n}$$

п.в. для всех n ;

2) для любой (сколь угодно медленно) стремящейся к нулю последовательности положительных чисел $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ найдется подмножество B отрезка, $\lambda(B) \in (0, 1)$, такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} |A_n(\chi_B) - \lambda(B)| = \infty \quad \text{п.в.}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \|A_n(\chi_B) - \lambda(B)\|_p = \infty$$

для всех $p \in [1, \infty]$.

Позднее О'Брайен [37] показал, что для любой последовательности положительных чисел $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условиям

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$,
- 2) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$,

можно построить эргодический автоморфизм T и $\{+1, -1\}$ -значную функцию f с $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n^{-1} S_n f = 1$ п.в. такую, что f и $(-f)$ (а потому и все $\{f \circ T^k\}_k$ и $\{-f \circ T^k\}_k$) имеют одинаковые функции распределения (и, следовательно, $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n^{-1} S_n f = -1$ п.в.). Условие 1) является необходимым для построения соответствующего примера, условие 2) – не необходимо, но и не может быть совсем опущено [37].

Некоторые другие результаты на эту тему можно найти в [31].

Приведенные выше отрицательные результаты не оставляют никакой надежды на получение оценок скоростей сходимости в эргодических теоремах, зависящих только от усредняемой функции f . Между тем, для каждой пары (f, T) сходимость с какими-то (пусть капризными) скоростями имеет место, и имеет смысл вопрос об их оценке – для разумных постановок вопроса.

Оказывается, в случае $f \in L_2$ интересную информацию о скоростях сходимости удастся извлекать из свойств спектральной меры σ_f (например, из ее концентрации в окрестности нуля) или из свойств корреляционных коэффициентов $\{b_n f\}$ (например, из скорости их убывания – если они стремятся к нулю). Понятно, что ни σ_f , ни $\{b_n f\}$ не определяются свойствами одной только функции f , какими бы хорошими эти свойства ни были, а зависят еще и от выбора автоморфизма T . Поэтому разобранные выше запрещающие примеры при такой постановке вопроса ничего не могут запретить.

На зависимость скорости сходимости средних от скорости убывания корреляционных коэффициентов и скорости роста дисперсий $DS_n f$ еще в 70-х годах указывали (для стационарных в широком смысле последовательностей) В. В. Петров и В. Ф. Гапошкин; см. § 3 ниже.

0.3. Краткое описание новых результатов. Основные интересы автора в рассматриваемой области связаны со следующими двумя общими постановками вопроса о скоростях сходимости и колебаниях в предельных теоремах (содержащимися, фактически, в [34] – см. Приложение 1).

Говорят, что числовая последовательность $\{a_n\}$ допускает k ε -флуктуаций, если для некоторых $n_1 < n_2 \leq n_3 < n_4 \leq \dots \leq n_{2k-1} < n_{2k}$

$$|a_{n_1} - a_{n_2}| \geq \varepsilon, \dots, |a_{n_{2k-1}} - a_{n_{2k}}| \geq \varepsilon.$$

Пусть $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность измеримых функций на (Ω, λ) . Положим для каждого $p, q, 1 \leq p < q \leq \infty$:

$$F_{k,\varepsilon}\{X_n\}_{n=p}^q = \{\omega \in \Omega \mid \{X_n(\omega)\}_{n=p}^q \text{ допускает } k \text{ } \varepsilon\text{-флуктуаций}\}.$$

Тогда сходимость п.в. последовательности $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ равносильна выполнению любого из следующих двух (эквивалентных) условий:

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(F_{k,\varepsilon}\{X_n\}_{n=1}^\infty) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$;
- 2) $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda(F_{1,\varepsilon}\{X_n\}_{n=N}^\infty) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$.

Поэтому для любой предельной теоремы (утверждающей сходимость п.в. некоторой последовательности измеримых функций) можно поставить естественный вопрос: каковы скорости сходимости к нулю обеих указанных выше последовательностей (для каждого $\varepsilon > 0$)? Ответ на него позволяет уточнить (а формально – и усилить) исследуемую предельную теорему: кроме утверждения об обычной сходимости он несет дополнительную информацию о некоторых ее скоростных и колебательных характеристиках.

В предлагаемой работе, в частности, даются оценки скоростей сходимости к нулю обеих рассматриваемых последовательностей в индивидуальной и статистической эргодических теоремах (в последней теореме – с естественной поправкой в постановке вопроса для сходимости по норме). Скорость стремления к нулю

$$(0.1) \quad \lambda(F_{k,\varepsilon}\{A_n f\}_{n=1}^\infty)$$

при $k \rightarrow \infty$ является колебательной характеристикой и допускает оценку, зависящую только от f (и даже только от $\|f\|_p$), т.е. равномерную по группе автоморфизмов T . Убывание при $N \rightarrow \infty$ последовательности

$$\lambda(F_{1,\varepsilon}\{A_n f\}_{n=N}^\infty)$$

– или, что фактически одно и то же,

$$(0.2) \quad \lambda\left(\left\{\sup_{n \geq N} |A_n f - f^*| \geq \varepsilon\right\}\right)$$

– является скоростной характеристикой и (см. запрещающие примеры пункта 0.2) не допускает равномерной по группе автоморфизмов оценки.

Как хорошо известно, в условиях статистической и индивидуальной эргодических теорем для каждой $f \in L_2^0$, т.е. $f \in L_2$ и $\int f d\lambda = 0$, и по σ_f , и по $\{b_k f\}$ можно точно посчитать дисперсии $\{DS_n f\}$ (теорема 2; см. также асимптотические оценки теорем 3 и 6). Именно через эти ключевые параметры – $\{DS_n f\}$ (что совпадает в рассматриваемом случае с $\{\|S_n f\|_2^2\}$), σ_f и $\{b_k f\}$ – и удается получать оценки скоростей сходимости в индивидуальной эргодической теореме для $f \in L_2^0$ при самых разных постановках вопроса. При этом предельно большие скорости во всех рассматриваемых постановках вопроса достигаются при когомولوجичности усредняемой функции f нулю, т.е. для f вида $g \circ T - g$ (с теми или иными ограничениями на функцию g). И не удивительно: в этом случае $A_n f = \frac{1}{n}(g \circ T^n - g)$, и такие средние сравнительно быстро сходятся.

Ниже доказательствами снабжаются только новые, нигде не публиковавшиеся результаты. Основными из них (для индивидуальной эргодической теоремы в случае $f \in L_2^0$) являются:

1) теорема 3, устанавливающая эквивалентность степенного роста дисперсии $DS_n f$ и наличия степенной же особенности у спектральной меры σ_f в нуле;

2) теорема 11, дающая оценку (в случае $f \in L_\infty$ — неухудшаемую) скорости стремления к нулю последовательности (0.2) по скорости роста последовательности $\{DS_n f\}_{n=1}^\infty$; см. также теорему 13, дающую оценку этой скорости непосредственно через σ_f и $\{b_k f\}$.

Следует выделить также:

3) предлагаемую в пункте 2.3 конструкцию аппроксимации любой функции $f \in L_2^0$ когомологичными нулю функциями с гарантированной точностью (и, соответственно, разложения процесса $\{A_n f\}_{n=1}^\infty$ на сумму двух: $\{A_n(f_\delta)\}_{n=1}^\infty$ с $\|f_\delta\|_2 \rightarrow 0$ с гарантированной скоростью при $\delta \rightarrow 0$, и $\{A_n(f - f_\delta)\}_{n=1}^\infty$ — порождаемого когомологичными нулю функциями $(f - f_\delta) = g(\delta) \circ T - g(\delta)$ с гарантированно ограниченной скоростью роста $\|g(\delta)\|_2$ при $\delta \rightarrow 0$);

4) теорему 19, устанавливающую критерий наибольшей возможной скорости равномерной сходимости в индивидуальной эргодической теореме (в общем случае $f \in L_1$), и вытекающую из нее теорему 20, дающую два новых критерия слабого перемешивания эргодического эндоморфизма.

Особо следует отметить полученные коллегами автора важные неухудшаемые результаты по колебательным характеристикам сходимости (в хронологическом порядке):

5) теорему 33 (С. А. Утев, 1992), дающую точную оценку скорости убывания последовательности (0.1) в условиях усиленного закона больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин;

6) теорему 22 (В. В. Иванов, 1992), устанавливающую точную (экспоненциальную) оценку вероятности заданного числа пересечений полосы для индивидуальной эргодической теоремы в случае $f \geq 0$, а также теорему 23 (В. В. Иванов, 1992), дающую наилучшую на сегодня (1995) оценку в так называемой флуктуационной эргодической теореме, т. е. оценку скорости убывания последовательности (0.1) (в общем случае $f \in L_1$);

7) теорему 28 (А. А. Чашка, 1993), дающую наилучшую (предположительно, точную) оценку скорости убывания последовательности (0.1) для ограниченных мартингалов, а также теорему 34 (А. А. Чашка, 1994), устанавливающую оценку математических ожиданий моментов числа ε -флуктуаций ограниченных мартингалов.

Вопросы о скоростях сходимости и колебательном поведении весьма популярны и хорошо изучены для предельных теорем теории вероятностей. Многие из рассматриваемых в этой работе результатов о скоростях сходимости в эргодических теоремах имеют своей отправной точкой соответствующие результаты для усиленного закона больших чисел. Результаты о колебаниях, как правило, имеют прообразом соответствующие работы по колебаниям мартингалов.

Как уже отмечалось, систематические исследования скоростей сходимости в эргодических теоремах только начинаются; заинтересовавшийся читатель найдет в предлагаемом его вниманию тексте подборку из 5 недоказанных гипотез и 5 нерешенных вопросов.

ГЛАВА I
СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В
ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ

Всюду на протяжении этой главы, если только не оговаривается противное, предполагается выполненным условие $f \in L_2^0$, т.е. $f \in L_2$ и $\int f d\lambda = 0$. Условие нулевого среднего не является ограничительным, поскольку добавление к f константы не влияет на скорости сходимости. От условия $f \in L_2$ избавиться пока не удастся — оно необходимо для применения к решению рассматриваемых вопросов аппарата спектральной теории динамических систем. Отметим, что большинство из предлагаемых здесь результатов без труда переносятся и на более общий случай стационарных в широком смысле последовательностей [19].

§ 1. Рост дисперсий $DS_n f$

1.0. Вопрос о скорости роста при $n \rightarrow \infty$ последовательности дисперсий DS_n достаточно популярен в теории вероятностей и возникает, в частности, при доказательствах различных вариантов Центральной предельной теоремы для стационарных процессов. См., например, известную монографию И. А. Ибрагимова и Ю. В. Линника [6], а также специально посвященную росту DS_n работу В. П. Леонова [13].

Скорость убывания дисперсий $DA_n f (= \frac{1}{n^2} DS_n f)$ при $n \rightarrow \infty$ является одной из важнейших характеристик скорости сходимости как для индивидуальной, так и для статистической эргодических теорем. В случае $f^* \equiv 0$, например, дисперсия $DA_n f = \|A_n f\|_2^2$ измеряет L_2 -норму отклонения среднего $A_n f$ от предела f^* . В общем для текущей главы случае $f \in L_2^0$ также $DA_n f = \|A_n f\|_2^2$, и знание асимптотики $\{DA_n f\}_n$ позволяет делать определенные выводы об асимптотике функций распределения величин $\{A_n f\}_n$, т.е., в конечном счете, о скоростях сходимости $\{A_n f\}_n$ к f^* . Поэтому не удивительно, что скорость роста $DS_n f$ является тем ключевым параметром, через который будут оцениваться почти все скоростные характеристики этой главы. Причем нас будет интересовать в основном случай степенного роста $DS_n f$. Именно на нем мы здесь и сосредоточимся.

Положим

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n} \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}, \quad 0 < |x| \leq \pi.$$

Заметим, что Φ_n отличается от $(n-1)$ -го ядра Фейера (Fejer) K_{n-1} лишь коэффициентом: $\Phi_n = 2K_{n-1}$. Отметим вытекающие из свойств ядер Фейера [2] равенства $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x) dx = 2\pi$ и стандартные неравенства

$$(1.1) \quad \Phi_n(x) \leq n \quad \left(\text{для } |x| \leq \frac{\pi}{n} \right);$$

$$(1.2) \quad \Phi_n(x) \leq \frac{1}{n \sin^2 \frac{x}{2}} \leq \frac{\pi^2}{nx^2} \quad \left(\text{для } \frac{\pi}{n} \leq |x| \leq \pi \right).$$

Как хорошо известно, $DS_n f$ может быть точно посчитана через интеграл от Φ_n по спектральной мере σ_f или выражена через корреляционные коэффициенты $\{b_k f\}$. Все

основные результаты этого параграфа получаются анализом асимптотик следующих двух формул, фактически использовавшихся еще Дж. фон Нейманом в [35], [36].

ТЕОРЕМА 2 [6].

- 1) $DS_n f = \int_{-\pi}^{\pi} n \Phi_n d\sigma_f;$
- 2) $DS_n f = \sum_{|k| < n} (n - |k|) b_k f.$

При обдумывании асимптотики первой формулы теоремы 2 полезно иметь перед глазами график ее ядра $n\Phi_n$ (график ядра K_n см. в [2, с. 151]). Основная масса этого ядра сосредотачивается в малой окрестности точки 0, и чем больше n , тем уже можно выбирать такие окрестности. Поэтому не удивительно, что асимптотика $\{DS_n f\}_n$ в точности соответствует асимптотике особенности меры σ_f в нуле (теорема 3 пункта 1.1 ниже).

1.1. Спектральные меры и степенной рост дисперсии. Следующая теорема устанавливает эквивалентность степенного роста $DS_n f$ и наличия степенной же особенности меры σ_f в нуле. Никакие дополнительные ограничения на меру σ_f (абсолютная непрерывность и т. п.) здесь не накладываются.

ТЕОРЕМА 3. Для каждого $\alpha \in [0, 2)$ равносильны следующие соотношения:

- 1) $DS_n f = O(n^{2-\alpha})$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $\sigma_f[-\delta, \delta] = O(\delta^\alpha)$ при $\delta \rightarrow 0$.

Утверждение теоремы верно также при замене обеих “ O ” на “ o ”.

Доказательству теоремы 3 посвящен весь следующий пункт 1.2 этого параграфа.

Для исчерпывающего решения рассматриваемого вопроса остается разобрать случай $\alpha = 2$, т.е. случай $DS_n f = O(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Это делается в замечаниях 1–3. Как показывают эти замечания, наибольшая скорость убывания $DA_n f (= O(n^{-2}))$ в случае перемешивания достигается для кохомологичных нулю функций f и только для них.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 [13]. Если T – перемешивание, то следующие соотношения эквивалентны:

- 1) $DS_n f = O(1)$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) конечен интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} x^{-2} d\sigma_f$;
- 3) кохомологична нулю функция f , т.е. $f = g \circ T - g$ для некоторой $g \in L_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $\alpha = 2$ утверждение теоремы 3 не имеет места: условие $\sigma_f[-\delta, \delta] = O(\delta^2)$ не является, вообще говоря, достаточным для выполнения соотношения $DS_n f = O(1)$.

Докажем это. Для любого автоморфизма T со счетно-кратным лебеговским спектром [12] можно подобрать такую функцию $f \in L_2^0$, что их спектральная мера σ_f при всех k удовлетворяет соотношению

$$\sigma_f \left\{ \frac{\pi}{k+1} < |x| \leq \frac{\pi}{k} \right\} = \frac{c}{k^3}$$

для некоторой константы c . Каждая такая пара (f, T) и будет являться противоречащим примером.

Действительно, для таких (f, T) будет $\sigma_f[-\delta, \delta] = O(\delta^2)$ при $\delta \rightarrow 0$, поскольку

$$\sigma_f \left\{ |x| \leq \frac{\pi}{n} \right\} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{c}{k^3} = O(n^{-2}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Однако последовательность $\{DS_n f\}_n$ неограничена по замечанию 1, так как T — перемешивание, а в нашем случае интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{-2} d\sigma_f$$

расходится — вместе с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sigma_f \left\{ \frac{\pi}{k+1} < |x| \leq \frac{\pi}{k} \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если T — перемешивание, то соотношение $DS_n f = o(1)$ выполняется лишь в случае $f \equiv 0$ (т.е. $\sigma_f \equiv 0$). Поэтому и условие $\sigma_f[-\delta, \delta] = o(\delta^2)$ (случай $\alpha = 2$ в утверждении теоремы 3) не является, вообще говоря, достаточным для выполнения соотношения $DS_n f = o(1)$.

Действительно, так как по замечанию 1 будет $f = g \circ T - g$ для некоторой $g \in L_2$, то (можно считать, что $\int g d\lambda = 0$)

$$DS_n f = (g \circ T^n - g, g \circ T^n - g) = \|g \circ T^n\|_2^2 + \|g\|_2^2 - b_n g - \bar{b}_n g \rightarrow 2\|g\|_2^2 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

поскольку $|b_n g| \rightarrow 0$ в силу перемешивания T [12].

Поэтому в рассматриваемом случае $g \equiv 0$, а значит, и $f \equiv 0$, что и требуется.

Следующие замечания 4, 5 касаются численных значений предельно малой ($O(1)$) и предельно большой ($O(n^2)$) скоростей роста $DS_n f$ при $n \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. 1) [40]. Всегда существует (конечный или бесконечный) предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} DS_k f$, равный интегралу

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\sigma_f}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

2) [13]. Более того, если T — перемешивание, то существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} DS_n f$ (равный тому же интегралу).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Всегда существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} DA_n f (= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} DS_n f)$, равный $\|f^*\|_2^2 (= \sigma_f\{0\})$.

Это следует из разложения $DS_n f = DS_n(f^*) + DS_n(f - f^*)$, поскольку $DS_n f^* = n^2 \|f^*\|_2^2$, а $DS_n(f - f^*) = o(n^2)$ при $n \rightarrow \infty$ в силу теоремы 3.

Следующее хорошо известное утверждение доставляет достаточный признак линейного роста $DS_n f$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6 [6]. Если σ_f абсолютно непрерывна с непрерывной в точке 0 плотностью ρ , то $DS_n f = 2\pi\rho(0)n + o(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 3 позволяет получить следующий аналог этого утверждения.

ТЕОРЕМА 4. Если σ_f абсолютно непрерывна с плотностью $\rho \in L_p$, то $DS_n f = o(n^{1+1/p})$ при $n \rightarrow \infty$ для $p \in [1, \infty)$. В случае $p = \infty$ будет $DS_n f = O(n)$.

Теорему 4 легко вывести из теоремы 3 с помощью неравенства Гёльдера:

$$\begin{aligned} \sigma_f[-\delta, \delta] &= \int_{-\delta}^{\delta} \rho dx \leq \left(\int_{-\delta}^{\delta} \rho^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{-\delta}^{\delta} dx \right)^{1-1/p} \\ &= \begin{cases} o(\delta^{1-1/p}), & \text{если } 1 \leq p < \infty, \\ O(\delta), & \text{если } p = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Следующее утверждение было высказано в качестве гипотезы Я. Г. Синаем и доказано В. П. Леоновым.

ТЕОРЕМА 5 [13]. Если T – перемешивание и χ_A – характеристическая функция множества $A \subset \Omega$ такого, что $0 < \lambda(A) < 1$, то $DS_n(\chi_A) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Как показано Ю. К. Беляевым в [3], для потоков аналогичное утверждение неверно. Сравнение теоремы 5 с теоремой 20 (см. далее пункт 4.2) приводит к предположению о справедливости и обратного утверждения.

ГИПОТЕЗА 1. Для эргодического эндоморфизма условие перемешивания равносильно соотношению $DS_n(\chi_A) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $A \subset \Omega$, $\lambda(A) \in (0, 1)$.

Условие эргодичности тут, очевидно, не может быть опущено: достаточно рассмотреть разбиение Ω на два T -инвариантных множества положительной меры λ , на каждом из которых T перемешивает. Возможно, при доказательстве этого предположения могут оказаться полезными работы А. Реньи по характеристизации перемешивания (см. [39] и приведенный там список литературы).

1.2. Доказательство теоремы 3 опирается на следующую числовую лемму.

ЛЕММА. Если $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных действительных чисел и $\alpha \in [0, 2)$, то

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} \sigma_k = O(n^{-\alpha}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \right) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n k^2 \sigma_k = O(n^{2-\alpha}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \right).$$

Утверждение леммы верно также при замене обеих “ O ” на “ o ”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ – невозрастающая последовательность такая, что

$$\sum_{k=n}^{\infty} \sigma_k \leq c_n n^{-\alpha} \quad \text{при всех } n \geq 1;$$

здесь имеется в виду $c_n \equiv c_1$ в случае “ O ” леммы и $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ в случае “ o ”. Оценим максимум

$$\sum_{k=1}^n k^2 \sigma_k$$

при условии

$$\sum_{k=l}^n \sigma_k \leq c_l l^{-\alpha} \quad \text{для каждого } l, \quad 1 \leq l \leq n.$$

Так как веса (k^2) при σ_k в максимизируемой сумме с ростом k растут, то эта сумма будет наибольшей в случае

$$\sigma_n = \frac{c_n}{n^\alpha} \text{ и } \sigma_{n-l} = \frac{c_{n-l}}{(n-l)^\alpha} - \frac{c_{n-l+1}}{(n-l+1)^\alpha}$$

для каждого $l, 1 \leq l \leq n-1$, т.е.

$$\sum_{k=1}^n k^2 \sigma_k \leq c_n n^{2-\alpha} + \sum_{l=1}^{n-1} (n-l)^2 \left(\frac{c_{n-l}}{(n-l)^\alpha} - \frac{c_{n-l+1}}{(n-l+1)^\alpha} \right).$$

Правую часть последнего неравенства можно переписать как

$$(1.3) \quad c_n n^{2-\alpha} + \sum_{l=1}^{n-1} \left\{ (n-l)^{2-\alpha} \left(c_{n-l} - c_{n-l+1} \left(\frac{n-l}{n-l+1} \right)^\alpha \right) \right\}.$$

Пусть константа C_α такова, что $(1 - 1/m)^\alpha \geq 1 - C_\alpha \alpha/m$ при всех натуральных m ; существование такой константы сразу следует из разложения $(1+x)^\alpha$ по формуле Тейлора. Тогда

$$\left(\frac{n-l}{n-l+1} \right)^\alpha \geq 1 - C_\alpha \frac{\alpha}{n-l+1}$$

при всех l , и второе слагаемое в (1.3) не превосходит

$$\sum_{l=1}^{n-1} \left\{ (n-l)^{2-\alpha} (c_{n-l} - c_{n-l+1}) \right\} + \sum_{l=1}^{n-1} \left\{ (n-l)^{2-\alpha} \alpha C_\alpha \frac{c_{n-l+1}}{n-l+1} \right\},$$

что не более

$$(1.4) \quad \sum_{k=1}^{n-1} (c_k - c_{k+1}) k^{2-\alpha} + \alpha C_\alpha \sum_{k=1}^{n-1} c_{k+1} k^{1-\alpha}.$$

Если $c_k \equiv c_1$, то (1.4) имеет асимптотику $O(n^{2-\alpha})$, что и требуется. Если же $c_n \rightarrow 0$, то второе слагаемое в (1.4) будет $o(n^{2-\alpha})$ из-за соотношения $\sum_{k=1}^{n-1} k^{1-\alpha} = O(n^{2-\alpha})$, а первое – в силу монотонности c_n по цепочке неравенств

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (c_k - c_{k+1}) k^{2-\alpha} &\leq m^{2-\alpha} \sum_{k=1}^{m-1} (c_k - c_{k+1}) + n^{2-\alpha} \sum_{k=m}^{n-1} (c_k - c_{k+1}) \\ &\leq n^{2-\alpha} \left(c_1 \left(\frac{m}{n} \right)^{2-\alpha} + c_m \right) \end{aligned}$$

для любого m . Лемма доказана.

Любопытно, что при $\alpha > 0$ в условиях леммы верна и обратная импликация:

$$\sum_{k=1}^n k^2 \sigma_k = O(n^{2-\alpha}) \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} \sigma_k = O(n^{-\alpha}).$$

Нам это в дальнейшем не понадобится, и доказывать этот факт мы здесь не будем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 получается анализом асимптотики первой формулы теоремы 2. Рассмотрим случай “ O ” утверждения теоремы 3; случай “ o ” разбирается аналогично.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\sigma_k = \sigma_f \{ \pi/(k+1) < |x| \leq \pi/k \}$. Заметим, что

$$\sum_{k=n}^{\infty} \sigma_k = \sigma_f \left\{ |x| \leq \frac{\pi}{n} \right\} = O(n^{-\alpha}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

так что к последовательности $\{\sigma_k\}$ применима лемма. Имеем по неравенствам (1.1) и (1.2):

$$DS_n f = \int_{-\pi}^{\pi} n \Phi_n(x) d\sigma_f \leq n^2 \int_{\{|x| \leq \pi/n\}} d\sigma_f + \int_{\{|x| \geq \pi/n\}} \frac{d\sigma_f}{\sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Первое слагаемое есть $O(n^{2-\alpha})$ по условию на особенность σ_f . Второе не превосходит

$$\begin{aligned} \int_{\{|x| \geq \pi/n\}} \frac{\pi^2}{x^2} d\sigma_f &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\{\pi/(k+1) < |x| \leq \pi/k\}} \frac{\pi^2}{x^2} d\sigma_f \\ &\leq \sum_{k=1}^n (k+1)^2 \sigma_k = O\left(\sum_{k=1}^n k^2 \sigma_k\right) = O(n^{2-\alpha}) \end{aligned}$$

по лемме.

1) $\Rightarrow$ 2). Как показывают элементарные выкладки, функция $\frac{1}{n} \Phi_n$ строго монотонно возрастает (от 0 до 1) на интервале $[-2\pi/n, 0)$ и строго монотонно убывает (от 1 до 0) на $(0, 2\pi/n]$. Поэтому

$$\min_{|x| \leq \pi/n} \left\{ \frac{1}{n} \Phi_n(x) \right\} = \frac{1}{n} \Phi_n\left(\frac{\pi}{n}\right) \rightarrow \frac{4}{\pi^2}$$

при $n \rightarrow \infty$, и из условия

$$\int_{-\pi/n}^{\pi/n} \frac{1}{n} \Phi_n(x) d\sigma_f \left(\leq \frac{1}{n^2} DS_n \right) = O(n^{-\alpha})$$

при $n \rightarrow \infty$ следует соотношение

$$\sigma_f \left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n} \right] \leq \frac{\int_{-\pi/n}^{\pi/n} \frac{1}{n} \Phi_n d\sigma_f}{\min_{|x| \leq \pi/n} \left\{ \frac{1}{n} \Phi_n(x) \right\}} = O(n^{-\alpha}) = O\left(\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}\right)$$

при $\pi/n \rightarrow 0$, откуда и вытекает доказываемое утверждение.

1.3. Корреляционные коэффициенты и рост дисперсии. Как показывает теорема 3, степенной рост дисперсии $DS_n f$ при $n \rightarrow \infty$ полностью определяется поведением спектральной меры σ_f , а значит, поведением ее коэффициентов Фурье, т.е. корреляционных коэффициентов $b_k f$. Следующая приводимая с подробным доказательством теорема, конечно же, не нова, но дать ссылку на первоисточник не представляется возможным.

ТЕОРЕМА 6. 1) Пусть $b_n f = O(n^{-\alpha})$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда если $\alpha \in [0, 1)$, то $DS_n f = O(n^{2-\alpha})$; если $\alpha = 1$, то $DS_n f = O(n \ln n)$ (эти утверждения верны также при замене всех “ O ” на “ o ”); если $\alpha > 1$, то σ_f абсолютно непрерывна с непрерывной плотностью ρ , и $DS_n f = 2\pi\rho(0)n + o(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

2) Если $\{b_n f\} \in \ell^p$ для $p \in [1, \infty]$, то $DS_n f = O(n^{2-1/p})$ при $n \rightarrow \infty$.

Действительно, так как $b_n f = \bar{b}_{-n} f$, то из теоремы 2 вытекает неравенство

$$DS_n f \leq 2n \sum_{k=0}^{n-1} |b_k f|.$$

Первое утверждение теоремы 6 получается отсюда: для $\alpha \in [0, 1]$ — немедленно; для $\alpha > 1$ — по замечанию 6 пункта 1.1, поскольку при таких α гарантированы существование плотности ρ спектральной меры σ_f (и даже принадлежность ее классу L_p для некоторого $p > 1$ — по теореме Хаусдорфа–Юнга для мер [20]) и ее непрерывность (даже, как минимум, липшицевость [2, с. 210]). Второе утверждение доказываемой теоремы сразу вытекает из неравенства Гёльдера:

$$2n \sum_{k=0}^{n-1} |b_k f| \leq 2n \|\{b_k f\}\|_p n^{1-1/p} = O(n^{2-1/p}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если для $p \in (1, \infty)$ при $q = p/(p-1)$ будет

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{|k| \leq N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) b_k f \cdot e^{ikx} \right\|_q < \infty,$$

то $DS_n f = o(n^{2-1/p})$ при $n \rightarrow \infty$.

Действительно, в этом случае критерий того, что данный ряд является рядом Фурье функции класса L_q [20] гарантирует абсолютную непрерывность спектральной меры σ_f с плотностью класса L_q , $q = p/(p-1)$. Поэтому доказываемое утверждение следует из теоремы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\{b_n f\} \in \ell^p$ для $p \in (1, 2]$, то оценка теоремы 6 может быть уточнена до $DS_n f = o(n^{2-1/p})$ при $n \rightarrow \infty$.

Действительно, по уже упоминавшейся теореме Хаусдорфа–Юнга у меры σ_f в данном случае есть плотность класса L_q для $q = p/(p-1)$. Далее достаточно сослаться на теорему 4. Верно ли аналогичное уточнение теоремы 6 для $p > 2$ — неизвестно.

Отметим, что все приведенные в этом пункте степенные оценки роста DS_n имеют показатели не ниже 1. И это не случайно: чтобы $DS_n f = \sum_{|k| < n} (n - |k|) b_k f$ росло медленнее n , нужно, чтобы корреляционные коэффициенты $b_k f$ в этой сумме друг друга взаимно компенсировали; по грубым параметрам $|b_k f|$ и скорости их стремления к нулю (даже экспоненциальной) тут ничего сказать уже нельзя, только по всей совокупности $\{b_k f\}_k$. По теореме 3, рассматриваемый вопрос эквивалентен вопросу об определении особенности меры σ_f в нуле по ее коэффициентам Фурье. Этот трудный вопрос гармонического анализа пока не имеет, по-видимому, удовлетворительного решения.

Именно этим объясняется отсутствие здесь критерия степенного роста $DS_n f$ в терминах корреляционных коэффициентов, аналогичного критерию теоремы 3. Однако и тут имеются положительные результаты. В случае действительности f и абсолютной непрерывности σ_f , как нетрудно видеть, плотность меры σ_f разлагается в ряд по косинусам. При монотонном убывании соответствующих коэффициентов Фурье (равных здесь $b_n f$) и некоторых других дополнительных предположениях удается исследовать особенность плотности в точке 0. Доказательству и обсуждению соответствующих результатов Р. Салема (Salem) и Р. Боса (Boas) посвящен отдельный параграф в [2, с. 668–676].

§ 2. Убывание вероятностей ε -уклонений

2.0. Положим в условиях индивидуальной эргодической теоремы

$$p_n^\varepsilon = \lambda\{|A_n f - f^*| \geq \varepsilon\} \quad \text{и} \quad P_n^\varepsilon = \lambda\left\{\sup_{N \geq n} |A_N f - f^*| \geq \varepsilon\right\}.$$

Тогда эта теорема эквивалентна следующему утверждению: $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^\varepsilon = 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Как и прочие скоростные характеристики, скорость сходимости к нулю указанной последовательности для каждого $\varepsilon > 0$ в общем случае зависит от выбора пары (f, T) и не может быть оценена только по f (или только по T): см. пункт 0.2 введения.

Оказывается, в случае $f \in L_2^0$ можно давать оценки рассматриваемой характеристики через скорость роста дисперсии $DS_n f$ при $n \rightarrow \infty$, которая, как мы знаем (см. §1), полностью определяется особенностью спектральной меры σ_f в нуле или тесно с ней связанной скоростью убывания корреляций $b_n f$, т.е. самыми обычными параметрами пары (f, T) . Тем не менее, для точной оценки скорости стремления P_n^ε к нулю знания скорости роста $DS_n f$ в общем случае, конечно же, недостаточно. Любой специалист по эргодической теории интуитивно чувствует, что рассматриваемая в этом параграфе задача при сегодняшнем общем положении дел с эргодическими теоремами исчерпывающего решения не имеет. Вопрос о точном вычислении асимптотики убывания P_n^ε напрямую связан с вопросом об асимптотическом поведении функций распределения случайных величин $A_n f$ и $S_n f$ при $n \rightarrow \infty$ (а именно этому вопросу посвящена замечательная монография [6], как это специально отмечается в ее авторском предисловии) и не поддается полному изучению даже в случае взаимной независимости $\{f \circ T^k\}_k$. Очевидна и его связь с классической задачей об оценке вероятностей больших уклонений. Например, в случае линейного роста дисперсии, т.е. $DS_n f = \sigma_0 n$, неравенство $\frac{S_n f}{\sqrt{DS_n f}} > \varepsilon \sqrt{n}$ равносильно неравенству $A_n f > \varepsilon \sigma_0$.

Подытоживая сделанные замечания, можно сказать, что вопрос о вычислении скорости убывания P_n^ε (т.е. о поведении функций распределения величин $S_n f$) по скорости роста $DS_n f$ (т.е. $\|S_n f\|_2^2$) аналогичен вопросу об описании фигуры незнакомой вам дамы по ее весу. Эта задача и решается ниже в пунктах 2.2–2.4.

2.1. Случай независимости $\{f \circ T^k\}_{k=0}^\infty$. Рассматриваемая характеристика скорости сходимости хорошо изучена в случае независимости случайных величин $\{f \circ T^k\}_{k=0}^\infty$ — для степенного и экспоненциального убывания P_n^ε при $n \rightarrow \infty$. В этом

случае все определяется видом функции f и не зависит ни от каких параметров автоморфизма T . Тем не менее, эти результаты служат естественным отправным пунктом для общего случая и обнаруживают интересные аналогии.

Пусть $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $M|X_1| < \infty$, $MX_1 = 0$. Положим $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Усиленный закон больших чисел утверждает в нашем случае сходимость $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ к нулю п.в.

ТЕОРЕМА 7 ([22], см. также [14]). *При любом $t > 0$ равносильно:*

- 1) $\lambda\{|X_1| \geq n\} = o(n^{-t-1})$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $\lambda\{|A_n| \geq \varepsilon\} = o(n^{-t})$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$;
- 3) $\lambda\{\sup_{N \geq n} |A_N| \geq \varepsilon\} = o(n^{-t})$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

ТЕОРЕМА 8 (следствие теоремы 7; см., например, [14]). *Если $M|X_1|^r < \infty$ при некотором $r \geq 1$, то $\lambda\{\sup_{N \geq n} |A_N| \geq \varepsilon\} = o(n^{-r+1})$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.*

Следующая изящная теорема может быть значительно обобщена (см. [22]).

ТЕОРЕМА 9 [22]. *При каждом $t > 1$ равносильно:*

- 1) $M|X_1|^t < \infty$;
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-2} \lambda\{|A_n| \geq \varepsilon\} < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-2} \lambda\{\sup_{N \geq n} |A_N| \geq \varepsilon\} < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

В [22] рассматривался также вопрос о возможных аналогах теоремы 9 при отказе от взаимной независимости $\{X_k\}$. Единственным положительным результатом в этом направлении там является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 10 [22]. *Пусть T — эргодический автоморфизм и $t > 1$. Тогда если $\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-2} \lambda\{|A_n f| \geq \varepsilon\} < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$, то $\int |f|^{t-1} d\lambda < \infty$.*

Как показывают следующие два замечания, обратное к теореме 10 утверждение не имеет места, а уточнить ее оценку (т.е. уменьшить показатель $t - 1$) невозможно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 [22]. Существуют эргодический автоморфизм отрезка с мерой Лебега λ и функция $f \in L_{\infty}^0$, $|f| \equiv 1$, такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \lambda\{|A_n f| \geq 1\} = \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2 [22]. Для каждого $t > 1$ найдутся эргодический автоморфизм T отрезка с мерой Лебега λ и функция f , $\int |f|^{t-1} d\lambda < \infty$, такие, что $\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-2} \lambda\{|A_n f| \geq \varepsilon\}$ для любого $\varepsilon > 0$ и $\int |f|^{t-1+\delta} d\lambda = \infty$ для любого $\delta > 0$.

Кроме того, в [22] приводятся и некоторые другие результаты о степенном убывании $\lambda\{|A_n| \geq \varepsilon\}$ и $\lambda\{\sup_{N \geq n} |A_N f| \geq \varepsilon\}$ в случае взаимной независимости $\{X_k\}$. В [21] с аналогичных позиций изучается экспоненциальное убывание этих величин.

В [41] условие взаимной независимости заменялось ограничениями на моменты величин $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Основные результаты статьи [22] удастся перенести и на слабо зависимые $\{X_k\}$. Например, в [38] это сделано для достаточно быстро φ -перемешивающих (в [6] они носят название “равномерно сильно перемешивающих”) стационарных последовательностей. Мы не будем здесь подробно останавливаться на этих результатах.

2.2. Убывание P_n^ε и рост дисперсии $DS_n f$. Приводимые в этом пункте результаты никаких ограничений на f и T не требуют – кроме общего для всей текущей главы условия $f \in L_2^0$. Доказательства теорем 11 и 12 приводятся в пункте 2.4, доказательство теоремы 14 – в пункте 2.3.

ТЕОРЕМА 11. *Если $DS_n f = O(n^{2-\alpha})$ при $n \rightarrow \infty$ для некоторого $\alpha \in (0, 2]$, то для каждого $\varepsilon > 0$:*

- 1) $p_n^\varepsilon = O(n^{-\alpha})$;
- 2) $P_n^\varepsilon = O(n^{-\alpha})$ для $f \in L_\infty^0$; $P_n^\varepsilon = O(n^{-\alpha/2})$ в общем случае $f \in L_2^0$.

Утверждение теоремы верно также при замене всех “O” на “o”.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как показывает приводимый ниже в пункте 2.4 пример 1, для любого $\alpha \in (0, 2]$ оценки теоремы 11 в случае $f \in L_\infty^0$ являются, вообще говоря, неулучшаемыми.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Примеры с попарно независимыми $\{f \circ T^k\}_{k \geq 0}$ (соответствующие случаю $\alpha = 1$ теоремы 11) показывают, что убывание P_n^ε может быть и экспоненциальным [21]. Более того, в условиях теоремы 11 при каждом $\alpha \in (0, 2]$ сходимость $A_n f$ к f^* может быть и равномерной, т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ может быть $|A_n f - f^*| < \varepsilon$ при всех $n \geq N_0(\varepsilon)$ на всем Ω , что ведет к занулению всех p_n^ε и P_n^ε с $n \geq N_0(\varepsilon)$ (пример 2, см. ниже пункт 2.4). Таким образом, p_n^ε и P_n^ε могут стремиться к нулю (асимптотически) сколь угодно быстро.

Как следует из приведенных выше двух замечаний, скорость убывания P_n^ε по скорости роста $DS_n f$ точно вычислить невозможно, что уже отмечалось – из общих соображений – в пункте 2.0.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть T – перемешивание. Так как наибольшая скорость убывания $DA_n f$ (случай $\alpha = 2$ теоремы 11) достигается при когомولوجичности f нулю (см. замечание 1 пункта 1.1), то и наибольшая скорость убывания P_n^ε , которую может гарантировать теорема 11, получается при таких же f .

ГИПОТЕЗА 2. *В условиях теоремы 11 можно заменить $\alpha/2$ на все α .*

Следующая теорема, используемая далее при доказательстве теоремы 11, представляет и самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 12. *Если $f \in L_\infty$, то, каков бы ни был T , для любого $\alpha > 0$ равномерно:*

- 1) $p_n^\varepsilon = O(n^{-\alpha})$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$;
- 2) $P_n^\varepsilon = O(n^{-\alpha})$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Утверждение теоремы справедливо также при замене обеих “O” на “o”.

Сопоставление теоремы 12 с теоремами 7 и 8 приводит к следующему естественно-му вопросу.

ВОПРОС 1. При каких $p \geq 1$ утверждение теоремы 12 верно для каждой $f \in L_p$?

Отметим в связи с поставленным вопросом, что условие $P_n^\varepsilon = O(n^{-\alpha})$ влечет за собой (см. теорему 10) условие $\int |f|^p d\lambda < \infty$ для всех (положительных) $p < \alpha$.

Суперпозиция теоремы 11 с теоремами 3 и 4 и теоремой 6 приводит, в частности, к следующим утверждениям.

ТЕОРЕМА 13. Пусть $f \in L_\infty^0$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$:

- 1) если $\sigma_f[-\delta, \delta] = o(\delta^\alpha)$ при $\delta \rightarrow 0$ для $\alpha \in (0, 2]$, то $P_n^\varepsilon = o(n^{-\alpha})$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) если σ_f имеет плотность класса L_p для $p > 1$, то $P_n^\varepsilon = o(n^{-1+1/p})$ при $n \rightarrow \infty$;
- 3) если $b_n f = o(n^{-\alpha})$ при $n \rightarrow \infty$ для $\alpha \in [0, 1)$, то $P_n^\varepsilon = o(n^{-\alpha})$ при $n \rightarrow \infty$.

Утверждение теоремы верно также при замене всех “ o ” на “ O ”.

Сопоставление теоремы 13 с теоремами 7 и 8 обнаруживает чрезвычайно важную для понимания существа вопроса двойственность: роль “хвоста распределения” и “момента” функции f для хорошо изученного случая независимости в общем случае переходят к “хвосту распределения” и “моменту” спектральной меры σ_f и ее плотности. Взгляд с этой точки зрения на теорему 9 приводит, с учетом показателей теоремы 13, к следующему предположению.

ГИПОТЕЗА 3. Если σ_f имеет плотность класса L_p для $p > 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/p} P_n^\varepsilon < \infty$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Как показывает следующая теорема, скорость убывания P_n^ε всегда может быть оценена по концентрации спектральной меры σ_f в окрестности точки 0 – какой бы эта мера ни была. Утверждение этой теоремы используется далее для доказательства теоремы 11. Определение и свойства используемых ниже ядер Φ_n см. в пункте 1.0.

ТЕОРЕМА 14. Пусть $f^* \equiv 0$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$

- 1) $P_n^\varepsilon \leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n d\sigma_f$;
- 2) $P_n^\varepsilon \leq \inf_{\delta > 0} \left\{ \frac{16}{\varepsilon^2} \int_{-\delta}^{\delta} d\sigma_f + \sum_{N \geq n} \frac{4}{N\varepsilon^2} \int_{\{|x| \geq \delta\}} \Phi_N(x) d\sigma_f \right\}$
 $\leq \inf_{\delta > 0} \left\{ \frac{16}{\varepsilon^2} \int_{-\delta}^{\delta} d\sigma_f + \frac{4}{\varepsilon^2(n-1) \sin^2 \frac{\delta}{2}} \|f\|_2^2 \right\}.$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Поскольку из теоремы 14 легко следует стремление к нулю P_n^ε при $n \rightarrow \infty$ для любой пары (f, T) с $f \in L_2$ и всех $\varepsilon > 0$, то формально из нее следует и индивидуальная эргодическая теорема для таких (f, T) . Этот факт не представляет

большого интереса, поскольку при доказательстве существенно используется доминантная эргодическая теорема.

2.3. О скорости аппроксимации f когомологичными нулю функциями.

Заметим, что аппроксимируемость (по норме L_2) функции $f \in L_2$ когомологичными нулю функциями, т.е. функциями вида $U_T g - g$ для $g \in L_2$, возможна тогда и только тогда, когда $f^* \equiv 0$. Достаточность этого условия для аппроксимируемости хорошо известна [12, с. 40]. Необходимость следует из того, что все когомологичные нулю функции лежат в (замкнутом) подпространстве функций с $f^* \equiv 0$.

Итак, пусть $f \in L_2$ и $f^* \equiv 0$. Возьмем разложение единицы E_t , $t \in [0, 2\pi]$, унитарного оператора U_T и для каждого $\delta \in (0, \pi)$ положим

$$f_\delta = E[-\delta, \delta]f = (E_{2\pi} - E_{2\pi-\delta} + E_\delta - E_0)f.$$

Рассмотрим разложение f на две ортогональные компоненты: $f = f_\delta + (f - f_\delta)$. Заметим, что $\|f_\delta\|_2 \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, так как проекция f на собственное подпространство оператора U_T , отвечающее собственному значению 1, есть f^* , т.е. $\sigma_f\{0\} = \|f^*\|_2^2 = 0$.

Второе же слагаемое разложения, $(f - f_\delta)$, при каждом δ является когомологичной нулю функцией, т.е. $f - f_\delta = U_T g(\delta) - g(\delta)$ для некоторой $g(\delta) \in L_2$, так как 1 является регулярным значением сужения оператора U_T на подпространство H_δ функций $h \in L_2$ с $E[-\delta, \delta]h = 0$. Кроме того, на H_δ справедлива следующая оценка нормы резольвенты [1, с. 235]:

$$\|(U_T - I)^{-1}\| = \left\| \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{1}{e^{it} - 1} dE_t \right\| \leq \max_{\delta \leq t \leq 2\pi-\delta} \left| \frac{1}{e^{it} - 1} \right| = \frac{1}{2 \sin \frac{\delta}{2}}.$$

Соответственно, получаем разложение процесса $\{A_n f\}$ на сумму двух: $A_n f = A_n f_\delta + A_n(f - f_\delta)$. Здесь $\|A_n f_\delta\|_2 \leq \|f_\delta\|_2 \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, а $A_n(f - f_\delta) = \frac{1}{n}(U_T^n g(\delta) - g(\delta))$, причем $\|f_\delta\|_2 = \left(\int_{-\delta}^{\delta} d\sigma_f \right)^{1/2}$, а $\|g(\delta)\|_2 \leq 2\|f\|_2 \sin^{-1} \frac{\delta}{2}$, т.е. $\|A_n(f - f_\delta)\|_2 \leq \frac{4}{n}\|f\|_2 \sin^{-1} \frac{\delta}{2}$.

Это разложение, используемое ниже при доказательстве теоремы 14, может оказаться полезным и при решении других задач.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 14. Первая оценка сразу следует из теоремы 2:

$$\lambda\{|A_n f| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \|A_n f\|_2^2 = \frac{1}{n\varepsilon^2} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n d\sigma_f.$$

Для получения второй оценки воспользуемся описанным выше разложением процесса $A_n f = A_n f_\delta + A_n(f - f_\delta)$ для каждого $\delta \in (0, \pi)$:

$$(2.1) \quad P_n^\varepsilon \leq \lambda \left\{ \sup_{N \geq n} |A_N f_\delta| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} + \lambda \left\{ \sup_{N \geq n} |A_N(f - f_\delta)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Для оценки первого слагаемого правой части (2.1) используем доминантную эргодическую теорему [31, с. 52], дающую для любой $f \geq 0$, $f \in L_p$ при $p \in (1, \infty)$, неравенство

$$\left\| \sup_{n \geq 1} A_n f \right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p.$$

В нашем случае отсюда получаем неравенство

$$\left\| \sup_{N \geq n} |A_N f_\delta| \right\|_2 \leq \left\| \sup_{n \geq 1} |A_n f_\delta| \right\|_2 \leq 2 \|f_\delta\|_2$$

для любой вещественнозначной f_δ . Эта же выкладка доказывает это же неравенство и для комплекснозначных f_δ . Поэтому во всех случаях

$$\lambda \left\{ \sup_{N \geq n} |A_N f_\delta| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \left\| \sup_{N \geq n} |A_N f_\delta| \right\|_2^2 \leq \frac{16}{\varepsilon^2} \|f_\delta\|_2^2.$$

Для оценки второго слагаемого правой части (2.1) можно воспользоваться теоремой 2, поскольку $(f - f_\delta)^* \equiv 0$ как проекция $f - f_\delta$ на собственное пространство U_T , отвечающее собственному значению 1, т.е. заведомо $f - f_\delta \in L_2^0$. Имеем (используя неравенство (1.2)):

$$\begin{aligned} \lambda \left\{ \sup_{N \geq n} |A_N(f - f_\delta)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} &\leq \sum_{N \geq n} \lambda \left\{ |A_N(f - f_\delta)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ &\leq \sum_{N \geq n} \frac{4}{\varepsilon^2} \|A_N(f - f_\delta)\|_2^2 \\ &= \sum_{N \geq n} \frac{4}{N\varepsilon^2} \int_{\{|x| \geq \delta\}} \Phi_N(x) d\sigma_f \\ &\leq \sum_{N \geq n} \frac{4\|f - f_\delta\|_2^2}{N^2\varepsilon^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}} \leq \frac{4\|f\|_2^2}{\varepsilon^2(n-1) \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \end{aligned}$$

что и требуется. Теорема доказана.

Отметим, что доказательство можно было вести несколько иначе, воспользовавшись полученной выше оценкой нормы резольвенты оператора U_T на подпространстве H_δ :

$$\frac{4}{\varepsilon^2} \|A_N(f - f_\delta)\|_2^2 = \frac{4}{N^2\varepsilon^2} \|U_T^N (U_T - I)^{-1}(f - f_\delta) - (U_T - I)^{-1}(f - f_\delta)\|_2^2 \leq \frac{4\|f - f_\delta\|_2^2}{N^2\varepsilon^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

2.4. Доказательство теорем 11 и 12.

Доказательство теоремы 12 получается оцениванием P_N^ε через $\sum_{k=0}^\infty p_{n_k}^{\varepsilon/2}$ по некоторой лакуарной подпоследовательности $\{n_k\}$. Действительно, если $|A_n f| < \varepsilon/2$ для некоторого n , то

$$|A_{n+k} f| < \frac{n \frac{\varepsilon}{2} + k \|f\|_\infty}{n+k} < \varepsilon$$

при всех $k \in [0, n \frac{\varepsilon/2}{\|f\|_\infty}]$. Поэтому для $\gamma = 1 + \varepsilon/(2\|f\|_\infty)$ справедливы неравенства

$$P_N^\varepsilon \leq \sum_{k=0}^\infty \lambda \left\{ \sup_{N\gamma^k \leq n < N\gamma^{k+1}} |A_n f| > \varepsilon \right\} \leq \sum_{k=0}^\infty p_{n_k}^{\varepsilon/2},$$

где n_k — минимальное целое число, не меньшее $N\gamma^k$. Если $p_{n_k}^{\varepsilon/2} = O(n_k^{-\alpha})$ при $n_k \rightarrow \infty$, т.е. $p_{n_k}^{\varepsilon/2} \leq C(N\gamma^k)^{-\alpha}$, то

$$P_N^\varepsilon \leq CN^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma^{-\alpha})^k = O(N^{-\alpha});$$

если $p_{n_k}^{\varepsilon/2} = o(n_k^{-\alpha})$, т.е. $p_{n_k}^{\varepsilon/2} = o((N\gamma^k)^{-\alpha})$, то

$$P_N^\varepsilon = o(N^{-\alpha}),$$

что и требуется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 11. Так как $\alpha > 0$, то $\|f^*\|_2^2 = \sigma_f\{0\} = 0$ (см. замечание 5 пункта 1.1), т.е. $f^* \equiv 0$.

Первое неравенство теоремы сразу следует из неравенства Чебышёва:

$$\lambda\{|A_n f| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \|A_n f\|_2^2 = \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} D S_n f = O(n^{-\alpha}).$$

По теореме 12 в случае $f \in L_\infty^0$ будет и $P_n^\varepsilon = O(n^{-\alpha})$.

Для доказательства второго утверждения теоремы в общем случае $f \in L_2^0$ воспользуемся теоремой 14. Положим $\delta = \pi N^{-1/2}$; тогда по указанной теореме

$$(2.2) \quad P_N^\varepsilon \leq \frac{16}{\varepsilon^2} \sigma_f\{|x| \leq \pi N^{-1/2}\} + \sum_{n \geq N} \frac{4}{n^2 \varepsilon^2} \int_{\{\pi N^{-1/2} \leq |x| \leq \pi\}} \Phi_n(x) d\sigma_f.$$

По теореме 3 $\sigma_f[-\delta, \delta] = O(\delta^\alpha)$ при $\delta \rightarrow 0$. Поэтому первое слагаемое правой части (2.2) есть $O(N^{-\alpha/2})$ при $N \rightarrow \infty$.

Пусть $\sigma_k = \sigma_f\{\pi/(k+1) < |x| \leq \pi/k\}$. Тогда

$$\sum_{k=N}^{\infty} \sigma_k = \sigma_f\left\{|x| \leq \frac{\pi}{N}\right\} = O(N^{-\alpha}) \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

так что к последовательности $\{\sigma_k\}$ применима лемма пункта 1.2. Поэтому второе слагаемое правой части (2.2) не превосходит (см. неравенство (1.2))

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq N} \frac{4}{n^2 \varepsilon^2} \int_{\{\pi/\sqrt{N} \leq |x| \leq \pi\}} \frac{\pi^2}{x^2} d\sigma_f &\leq \sum_{n \geq N} \frac{4}{n^2 \varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \int_{\{\pi(k+1) < |x| \leq \pi/k\}} \frac{\pi^2}{x^2} d\sigma_f \\ &\leq \sum_{n \geq N} \frac{4}{n^2 \varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} (k+1)^2 \sigma_k \\ &= O\left(\frac{1}{N} (\sqrt{N})^{2-\alpha}\right) = O(N^{-\frac{\alpha}{2}}) \end{aligned}$$

по указанной лемме.

ПРИМЕР 1 (показывающий неулучшаемость оценок теоремы 11 в случае $f \in L_\infty^0$ для любого $\alpha \in (0, 2]$). Представим Ω в виде объединения счетного набора непересекающихся (инвариантных) подпространств $\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$, $\lambda(\Omega_n) = C_\alpha n^{-1-\alpha}$, где константа C_α подбирается так, чтобы $\lambda(\Omega) = 1$. Положим $\lambda_n = e^{i\pi/n}$ и на каждом Ω_n возьмем автоморфизм T_n с собственным числом λ_n и соответствующей собственной функцией f_{λ_n} с $|f_{\lambda_n}| \equiv \varepsilon n \sin \frac{\pi}{2n} (\leq \frac{\pi\varepsilon}{2})$ и $f_{\lambda_n}^* \equiv 0$ (годится, например, автоморфизм периода $2n$, переставляющий $2n$ атомов меры $\frac{1}{2n}\lambda(\Omega_n)$ каждый, и функция f_{λ_n} , равная $\lambda_n^k \varepsilon n \sin \frac{\pi}{2n}$ на k -м атоме, $0 \leq k \leq 2n-1$; возможны и другие примеры [12]). Тогда пара (f, T) , сужение которой на каждое Ω_n совпадает с (f_{λ_n}, T_n) и обладает требуемыми свойствами.

Действительно, $\|f\|_\infty \leq \pi\varepsilon/2$ и

$$\sigma_f[-\delta, \delta] = \sum_{|\arg \lambda_n| \leq \delta} \|f_{\lambda_n}\|_2^2 \leq \sum_{n \geq \pi/\delta} \frac{\pi^2 \varepsilon^2}{4} \lambda(\Omega_n) = O(\delta^\alpha) \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Остается заметить, что на каждом Ω_n

$$\begin{aligned} |A_m f| &= |A_m f_{\lambda_n}| = \left| \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_n^k f_{\lambda_n} \right| = \left| \frac{f_{\lambda_n}}{m} \frac{1 - \lambda_n^m}{1 - \lambda_n} \right| \\ &= \frac{\varepsilon n \sin \frac{\pi}{2n}}{m} \frac{|1 - e^{i\pi m/n}|}{|1 - e^{i\pi/n}|} = \frac{n\varepsilon}{m} \left| \sin \frac{\pi m}{2n} \right|, \end{aligned}$$

поскольку, как показывают элементарные выкладки, $|1 - e^{ix}| = 2|\sin \frac{x}{2}|$. Следовательно, $|A_m f| \geq \varepsilon$ при $m \leq n$ и $|A_m f| < \varepsilon$ при $m > n$. Поэтому $P_N^\varepsilon = p_N^\varepsilon = \sum_{n \geq N} \lambda(\Omega_n) = CN^{-\alpha}$, что совпадает с соответствующими оценками теоремы 10.

ПРИМЕР 2 (показывающий, что в условиях теоремы 11 возможна равномерная сходимость $A_n f$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ возможно задуление всех P_n^ε при $n \geq N_0(\varepsilon)$). Пример строится модификацией конструкции примера 1. Внесем в нее следующие два изменения:

- 1) выберем $\lambda(\Omega_n) = C_{\alpha/2} n^{-1-\alpha/2}$;
- 2) выберем f_{λ_n} так, чтобы $|f_{\lambda_n}| \equiv \varepsilon_n n \sin \frac{\pi}{2n} (\leq \frac{\pi\varepsilon_n}{2})$ для $\varepsilon_n = n^{-\alpha/4} (\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty)$.

Тогда $\|f\|_\infty \leq \pi/2$, и

$$\sigma_f[-\delta, \delta] \leq \sum_{n \geq \pi/\delta} \frac{\pi^2 n^{-\alpha/2}}{4} \lambda(\Omega_n) = O(\delta^\alpha) \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

В то же время на каждом Ω_n будет $|A_m f| = \varepsilon_n \frac{n}{m} |\sin(\frac{\pi}{2} \frac{m}{n})|$. Равномерная сходимость $A_m f$ (к нулю) следует теперь из неравенств $|A_m f| \leq \frac{\pi}{2} \varepsilon_n$ (для $m < n$) и $|A_m f| \leq \varepsilon_n \frac{n}{m}$ (для $m \geq n$) на каждом Ω_n .

§ 3. О законе повторного логарифма

3.0. Пусть, как и всюду в этой главе, $f \in L_2^0$. В случае взаимной независимости $\{f \circ T^k\}_{k \geq 0}$ классический закон повторного логарифма состоит в том, что справедливо соотношение

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n f}{\Psi(n)} = 1 \quad \text{п.в. для} \quad \Psi(n) = \sqrt{\frac{2\|f\|_2^2 \ln \ln n}{n}}.$$

По симметрии и $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n f}{\Psi(n)} = -1$, т.е.

$$A_n f = O(\varphi(n)) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{для} \quad \varphi(n) = \sqrt{\frac{\ln \ln n}{n}}.$$

Как справедливо замечает У. Кренгель в [31, с. 14], при отказе от условия независимости никакой общий положительный результат этого типа не имеет места, даже ни для каких меньших скоростей (см. результаты работ [27], [30], [37], приводимые в пункте 0.2 введения).

Тем не менее оказывается, можно представить широкое множество рассматриваемых пар (f, T) в виде возрастающего объединения классов так, что для каждого такого класса удастся указать соответствующую последовательность $\varphi(n)$. Ключом к выделению этих классов, как и в § 2, служит скорость роста дисперсии $DS_n f$ при $n \rightarrow \infty$ и тесно с ней связанная скорость убывания корреляционных коэффициентов $b_n f$.

3.1. Рост дисперсии $DS_n f$ и закон повторного логарифма. Первым, по-видимому, на возможность обсуждаемого здесь эффекта указал В. В. Петров в 1973 году [15]. Свой окончательный вид эти оценки приобрели в работах В. Ф. Гапошкина (см. [4] и приводимый там список литературы). Приведем их тут в виде, удобном для сравнения с оценками теоремы 11.

ТЕОРЕМА 15 [4]. Пусть $DS_n f = O(n^{2-\alpha})$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $A_n f = o(\varphi(n))$ п.в. при $n \rightarrow \infty$, где в зависимости от α функция $\varphi(n)$ имеет вид ($\delta > 0$ – любое):

- 1) $n^{-\alpha/2} (\ln n)^{1/2} (\ln \ln n)^{1/2+\delta}$, если $0 < \alpha < 1$;
- 2) $n^{-1/2} (\ln n)^{3/2} (\ln \ln n)^{1/2+\delta}$, если $\alpha = 1$;
- 3) $n^{-1/2} (\ln n)^{1/2} (\ln \ln n)^{1/2} (\ln \ln \ln n)^{1/2+\delta}$, если $\alpha > 1$.

Соотношения 1–3, вообще говоря, теряют силу, если $\delta = 0$.

ТЕОРЕМА 16 [4]. Пусть $b_n f = O(n^{-\alpha})$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $A_n f = o(\varphi(n))$ п.в. при $n \rightarrow \infty$, где в зависимости от α функция $\varphi(n)$ имеет вид ($\delta > 0$ – любое):

- 1) $n^{-\alpha/2} (\ln n)^{1/2} (\ln \ln n)^{1/2+\delta}$, если $0 < \alpha < 1$;
- 2) $n^{-1/2} (\ln n) (\ln \ln n)^{1/2+\delta}$, если $\alpha = 1$;
- 3) $n^{-1/2} (\ln n)^{3/2} (\ln \ln n)^{1/2} (\ln \ln \ln n)^{1/2+\delta}$, если $\alpha > 1$.

Во всех этих оценках нельзя, вообще говоря, положить $\delta = 0$.

Отметим, что в [4] доказаны значительно более общие утверждения. Шкала роста $DS_n f$ и убывания $b_n f$ там имеет бóльшую разрешающую способность и охватывает все скорости вида $O(n^{-\alpha} (\ln n)^{-\beta} (\ln \ln n)^{-\gamma})$. Соответственно, для всех возможных троек (α, β, γ) , $\alpha \geq 0$, приводятся и получаемые оценки (и отмечается возможность их вывода не только для двойных логарифмов, но и для итерированных логарифмов любого порядка). Кроме того, эти оценки доказываются в большей общности: для стационарных в широком смысле последовательностей и процессов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как будет показано ниже (пункт 4.1, теорема 19), в случае эргодичности T условие $A_n f = O(1/n)$ п.в. (и даже неравенство $\lambda\{A_n f = O(1/n)\} > 0$) равносильно соотношению $f = g \circ T - g$ для некоторой $g \in L_\infty$. Эта скорость убывания $A_n f$ является наибольшей возможной: неравенство $\lambda\{A_n f = o(1/n)\} > 0$ выполняется в рассматриваемом случае лишь для $f \equiv 0$ (замечание 1 пункта 4.1).

По понятным причинам рассматриваемую характеристику сходимости в теории вероятностей обычно называют “скоростью сходимости в усиленном законе больших чисел” (как это и делает В. Ф. Гапошкин) и очень редко – “законом повторного логарифма”.

Имеются вполне удовлетворительные аналоги закона повторного логарифма для φ -перемешивающих стационарных последовательностей (см., например, [44], [42]). Историю вопроса и другие возможные обобщения можно найти в специальном обзоре [23].

§ 4. О равномерной сходимости

4.0. Первые нетривиальные примеры пар (f, T) с равномерной сходимостью в индивидуальной эргодической теореме были обнаружены еще до появления самой этой теоремы.

Рассмотрим d -мерный тор $[0, 1)^d$ с d -мерной мерой Лебега $\mu = \lambda^d$. Действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d, 1$ называют *интегрально независимыми*, если $\sum_{k=1}^d \alpha_k m_k$ является целым только при $m_1 = m_2 = \dots = m_d = 0$.

ТЕОРЕМА 17 (Г. Вейль, 1916 г. [45]). *Если автоморфизм T действует на $([0, 1)^d, \mu)$ сдвигом mod 1 на $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ и числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d, 1$ интегрально независимы, то для каждой непрерывной функции f средние $A_n f$ сходятся равномерно к $\int f d\mu$.*

Этот результат легко вытекает из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 18 [31]. *Пусть Q – метрический компакт с метрикой ρ . Если отображение $T: Q \rightarrow Q$ непрерывно и функции $\{A_n f\}_{n \geq 1}$ равномерно непрерывны, то $A_n f$ сходится равномерно на Q .*

Для индивидуальной эргодической теоремы естественный вопрос с этой точки зрения представляет равномерная сходимость п.в., т.е. на подмножестве полной меры: на $\Omega' \subseteq \Omega$, $\lambda(\Omega') = 1$.

Непонятно, что за параметры пары (f, T) отвечают за наличие такой сходимости. В отличие от всех других постановок задачи о скоростях сходимости, обсуждаемых в этой главе, в общем случае $f \in L_2^0$ скорость роста $DS_n f$ тут оказывается ни при чем, как показывает пример 2 пункта 2.4 (это и понятно: рассматриваемая характеристика теснее других связана с функциями распределения величин $S_n f$; см. замечания в конце пункта 2.0). Хотя знание роста $DS_n f$ и позволяет оценить снизу скорость равномерной сходимости при ее наличии: если $|A_n f| \leq \varepsilon$ п.в., то $\varepsilon^2 \geq \|A_n f\|_2^2 = \frac{1}{n^2} DS_n f$.

ВОПРОС 2. *Найти если не критерий равномерной сходимости в индивидуальной эргодической теореме, то хотя бы как можно более слабые достаточные и сильные необходимые признаки такой сходимости.*

Заметим, что в случае равномерной сходимости $A_n f$ п.в., для любого $\varepsilon > 0$ зануляются с некоторого момента $N_0(\varepsilon)$ все

$$P_N^\varepsilon = \lambda \left\{ \sup_{n \geq N} |A_n f| \geq \varepsilon \right\}$$

для $N \geq N_0(\varepsilon)$, так что поставленный вопрос интересен и для оценок скорости убывания вероятностей ε -уклонений (см. §2).

4.1. Самая быстрая равномерная сходимость. Несмотря на все перечисленные выше неясности, удастся дать критерий равномерной сходимости с наибольшей возможной скоростью – в терминах когомологичности усредняемой функции f нулю, как и следовало ожидать. Доказательства обеих теорем этого пункта в значительной степени опираются на результаты замечательной работы Г. Халаша [27].

ТЕОРЕМА 19. Пусть T – эргодический эндоморфизм. Для каждой $f \in L_1$ равносильно:

- 1) существует такая константа C , что $|A_n f| \leq C/n$ п.в. для всех n ;
- 2) $\lambda\{A_n f = O(1/n) \text{ при } n \rightarrow \infty\} > 0$;
- 3) $f = h \circ T - h$ для некоторой $h \in L_\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Неравенство $\lambda\{A_n f = o(1/n)\} > 0$ в случае эргодичности T выполняется лишь для $f \equiv 0$, т.е. скорость равномерной сходимости в теореме 19 и в самом деле наибольшая возможная.

Действительно, если $\lambda\{A_n f = o(1/n)\} > 0$, то в силу эргодичности $A_n f = o(1/n)$ п.в. По теореме 19 $f = h \circ T - h$ для некоторой $h \in L_\infty$, т.е. $A_n f = \frac{1}{n}(h \circ T^n - h)$. Если $\text{ess inf } h \neq \text{ess sup } h$ то, рассмотрев множества уровня функции h , в силу эргодичности легко построить множество положительной меры, на котором $A_n f$ не есть $o(1/n)$: противоречие. Если же $h = \text{Const}$, то $f \equiv 0$, что и требуется.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если (Ω, λ) – пространство Лебега, а T – автоморфизм, то условие эргодичности в формулировке теоремы в части 1) $\Leftrightarrow$ 3) можно опустить (и нельзя опустить в части касающейся 2)).

Действительно, соотношение 1) $\Leftrightarrow$ 3) в этом случае сразу следует из возможности разбиения фазового пространства на эргодические компоненты [16], на каждой из которых это соотношение справедливо – в силу теоремы 19. Однако общей для всех таких компонент константы C , определяемой в пункте 1) теоремы 19, при выполнении на каждой из компонент условия 2), очевидно, может и не быть. Поэтому в рассматриваемом случае из 2) не следует 1), а значит, и 3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 19. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2), 3) $\Rightarrow$ 1) очевидны (последняя – в силу формулы $A_n f = \frac{1}{n}(h \circ T^n - h)$). Докажем 2) $\Rightarrow$ 3).

По эргодичности 2) $\Rightarrow \lambda\{A_n f = O(1/n)\} = 1$. Поэтому $f^* \equiv 0$, т.е. заведомо $\int f d\lambda = 0$. Кроме того,

$$\underline{h}(x) = \inf_{n \geq 1} \{S_n f(x)\} \quad \text{и} \quad \bar{h}(x) = \sup_{n \geq 1} \{S_n f(x)\}$$

– конечные п.в. функции. Как показано в [27, с. 390–391], в этой ситуации $f = \underline{h} - \underline{h} \circ T$ и $f = \bar{h} - \bar{h} \circ T$. Но тогда $\bar{h} - \underline{h} = (\bar{h} - \underline{h}) \circ T$, и в силу эргодичности $\bar{h} - \underline{h} = \text{Const}$ п.в., причем $\text{Const} \neq \infty$, поскольку и $\underline{h}$, и $\bar{h}$ п.в. конечны. Остается доказать ограниченность функций $\underline{h}$ и $\bar{h}$. Если было бы $\text{ess inf } \underline{h} = -\infty$, то последовательность $\{S_n f(x)\}_n = \{\underline{h}(x) - \underline{h} \circ T^n(x)\}_n$ в силу эргодичности была бы неограничена сверху для п.в. x : противоречие с конечностью п.в. функции $\bar{h}(x)$. По аналогичной причине $\text{ess sup } \bar{h} \neq +\infty$. Так как $\bar{h} - \underline{h} = \text{Const}$, то обе функции $\underline{h}$, $\bar{h}$ ограничены (п.в.).

Переход от доказанного разложения $f = h - h \circ T$ к требуемому разложению $f = h \circ T - h$ делается переходом от f к $(-f)$. Теорема доказана.

Кроме уже отмечавшейся связи теоремы 19 с результатами §3 (замечание 1 пункта 3.1), интересно сопоставить ее утверждение с утверждением замечания 1 пункта 1.1. Это сопоставление приводит к следующей своеобразной иерархии кохомологичности нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть T – перемешивание. Для любой $f \in L_1$ условие $f = h \circ T - h$ равносильно:

- 1) в случае $h \in L_2$ – соотношению $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n f\|_2 < \infty$;
- 2) в случае $h \in L_\infty$ – соотношению $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n f\|_\infty < \infty$.

Возникает следующее естественное предположение.

ГИПОТЕЗА 4. Пусть T – перемешивание. Для любой $f \in L_1$ при каждом $p \in [1, \infty]$ равносильно:

- 1) $f = h \circ T - h$ для некоторой $h \in L_p$;
- 2) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n f\|_p < \infty$.

4.2. Два критерия слабого перемешивания. Приводимая ниже теорема, тесно связанная с теоремой 5 (“гипотеза Синая”), дает критерий слабого перемешивания эргодического эндоморфизма в терминах скоростей сходимости.

ТЕОРЕМА 20. Для эргодического эндоморфизма T равносильно:

- 1) T – слабо перемешивает;
- 2) нет $A \subset \Omega$, $\lambda(A) \in (0, 1)$, такого, что для некоторой константы C будет $|S_n(\chi_A - \lambda(A))| \leq C$ п.в. для всех n ;
- 3) нет $A \subset \Omega$, $\lambda(A) \in (0, 1)$, такого, что $\chi_A - \lambda(A) = h \circ T - h$ для некоторой $h \in L_\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае (сильного) перемешивания для любого $A \subset \Omega$, $\lambda(A) \in (0, 1)$, не существует такой константы C , что

$$\|S_n(\chi_A - \lambda(A))\|_2 = \sqrt{DS_n(\chi_A - \lambda(A))} (= \sqrt{DS_n(\chi_A)}) \leq C \text{ для всех } n$$

(теорема 5). Один и тот же пример Ю.К. Беляева [3] показывает, что на потоки оба эти свойства не переносятся, т.е. что (в нашем случае) существуют такой перемешивающий поток T^t , $t \in \mathbb{R}$, и множество $A \subset \Omega$, $\lambda(A) \in (0, 1)$, для которых

$$\left| \int_0^{t_0} (\chi_A - \lambda(A)) \circ T^t dt \right| \leq C \text{ п.в. при всех } t_0$$

для некоторой константы C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 20 опирается на следующий принадлежащий Г. Халашу замечательный результат.

ЛЕММА [27]. Пусть T — эргодический эндоморфизм. Если для измеримого $A \subset \Omega$ последовательность $\{S_n(\chi_A) - n\lambda(A)\}_n$ ограничена снизу на множестве положительной меры, то $e^{2\pi i\lambda_0} = e^{2\pi i\lambda(A)}$ является собственным значением оператора U_T , т.е. для некоторой функции $g_{\lambda_0} (\in L_2)$, не равной тождественно нулю п.в., будет $g_{\lambda_0} \circ T = e^{2\pi i\lambda_0} g_{\lambda_0}$.

Наоборот, если $e^{2\pi i\lambda_0}$ ($0 \leq \lambda_0 \leq 1$) есть собственное значение, то найдется $A \subset \Omega$, $\lambda(A) = \lambda_0$, такое, что $|S_n(\chi_A) - n\lambda_0| \leq 1$ п.в.

Ослабив, переформулируем эту лемму в удобном для нас виде.

Для эргодического эндоморфизма T равносильно:

- 1) существует множество $A \subset \Omega$, $\lambda(A) \in (0, 1)$, такое, что для некоторой константы C

$$|S_n(\chi_A - \lambda(A))| \leq C \quad \text{п.в.}$$

при всех n ;

- 2) существует $\mu \in (0, 1)$ такое, что $e^{2\pi i\mu}$ есть собственное значение оператора U_T , т.е. для некоторой не равной тождественно нулю п.в. функции $g_\mu \in L_2$

$$g_\mu \circ T = e^{2\pi i\mu} g_\mu.$$

Как хорошо известно [31, с. 97], условие слабого перемешивания T равносильно отсутствию у оператора U_T собственных функций, отличных от констант. Поэтому по (переформулированной) лемме Халаша в условиях теоремы 20 верны импликации $1) \Leftrightarrow 2)$. Импликации $2) \Leftrightarrow 3)$ сразу следуют из теоремы 19.

ГЛАВА II КОЛЕБАНИЯ СРЕДНИХ В ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ

§ 5. Пересечение полосы

Говорят, что числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ делает l пересечений снизу вверх полосы $[\alpha, \beta]$ (здесь предполагается $\alpha < \beta$), если можно указать такие натуральные числа $\{a_i\}_{i=1}^l$ и $\{b_i\}_{i=1}^l$, что $1 \leq a_1 < b_1 < a_2 < \dots < a_l < b_l$, и для всех i справедливы неравенства $x_{a_i} \leq \alpha$, $x_{b_i} \geq \beta$.

В условиях индивидуальной эргодической теоремы для любых $f \in L_1$ и $\omega \in \Omega$ через $\nu_{[\alpha, \beta]}(\omega)$ обозначим (максимальное) число [19, с. 536] пересечений снизу вверх полосы $[\alpha, \beta]$ последовательностью $\{A_n f(\omega)\}_{n=1}^\infty$. Следующая редко упоминаемая теорема Э. Бишопа является точным аналогом классической теоремы Дуба [19] о математическом ожидании числа пересечений полосы мартингалом.

ТЕОРЕМА 21 [24].

$$\int_{\Omega} \nu_{[\alpha, \beta]} d\lambda \leq \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\Omega} (f - \alpha)^+ d\lambda.$$

Понятно, что конечность математического ожидания числа пересечений полосы для предельных теорем, утверждающих сходимость п.в., является своего рода патологией сходимости и нечасто встречается. Любопытно отметить, в связи с этим, что указанная патология и для мартингалов, и для индивидуальной эргодической теоремы вызывается, как это заметил Э. Бишоп, одной и той же причиной (см. [24]). Природа удивительной двойственности между мартингалами и эргодическими средними $A_n f$, проявляющейся, в частности, при изучении их колебательного поведения, проясняется в редко упоминаемой (указанной автору С.В. Нагаевым) замечательной работе М. Джерисона [28].

Имеются обобщения теоремы 21 на сжатия в L_1 [25] и для субаддитивных процессов [43] (как отмечается в [31, с. 48], доказательство последнего результата дано в неопубликованной диссертации, написанной в Йеле).

Обозначим через $\Omega_{[\alpha, \beta]}^{k\uparrow}$ ($\Omega_{[\alpha, \beta]}^{k\downarrow}$) множество тех точек ω из Ω , для которых последовательность $\{A_n f(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ делает не менее k пересечений снизу вверх (сверху вниз) полосы $[\alpha, \beta]$. Как сразу следует из неравенства Бишопы,

$$\lambda(\Omega_{[\alpha, \beta]}^{k\uparrow}) \leq \frac{1}{k} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\Omega} (f - \alpha)^+ d\lambda.$$

Оказывается, для неотрицательных f меры таких множеств убывают экспоненциально. Этот удивительный факт, разумеется, не вытекает из неравенства Бишопы.

ТЕОРЕМА 22 [7]. В случае $f \geq 0$

$$\lambda(\Omega_{[\alpha, \beta]}^{k\downarrow}) \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k.$$

Приведенная оценка устанавливает своеобразный рекорд равномерности: она не зависит не только от T , но и от f . Эта оценка точна. Аналогичное неравенство верно и для эндоморфизмов и полупотоков, а также для неотрицательных супермартингалов — для мер множеств $\Omega_{[\alpha, \beta]}^{k\uparrow}$ [7]. Подробные доказательства всех этих анонсированных в [7] утверждений (и многих других, не менее интересных, фактов теории функций и теории мартингалов) будут в скором времени опубликованы их автором, В.В. Ивановым, в Сибирском математическом журнале.

§ 6. ε -флуктуации

В условиях индивидуальной эргодической теоремы положим, в терминах пункта 0.3 введения,

$$F_{k, \varepsilon}(f, T) = \{\omega \in \Omega \mid \{A_n f(\omega)\}_{n=1}^{\infty} \text{ допускает } k \text{ } \varepsilon\text{-флуктуаций}\}.$$

Тогда эта теорема эквивалентна следующему утверждению: $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(F_{k,\varepsilon}(f, T)) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$. И возникает вопрос: какова скорость сходимости к нулю указанной последовательности для каждого $\varepsilon > 0$?

Оказывается, можно дать оценку скорости убывания рассматриваемой последовательности, зависящую только от усредняемой функции f , т.е. равномерную по группе автоморфизмов T , что представляется довольно неожиданным. Впервые этот факт был замечен автором в [9] (и доказан в [11]). Основным элементом доказательства была грубая, но, тем не менее, равномерная по T оценка мер $\lambda(\Omega_{[\alpha, \beta]}^{k\uparrow})$ (см. § 5). Позднее (автором, 1993 г.) было замечено, что эта оценка следует из (до того ему неизвестного) неравенства Бишоп (теорема 21), опубликованного еще в 1966 г. Неравенства Дуба и Бишоп для математического ожидания числа пересечений полосы позволяют легко и единообразно вывести оценку вида

$$\lambda(F_{k,\varepsilon}) \leq \frac{C \|f\|_1}{k^{1/3} \varepsilon}$$

сразу для трех предельных теорем: индивидуальной эргодической теоремы, теоремы Дуба о сходимости мартингалов и усиленного закона больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин (см. теорему 27, § 9, и комментарии к ней). Оказывается, ни для одной из перечисленных теорем указанная выше общая оценка не точна. Наилучшая из имеющихся в настоящее время (1995) оценок для индивидуальной эргодической теоремы получается применением неравенства теоремы 22 и была получена В. В. Ивановым в 1992 г., рассказана на семинаре Ю. Г. Решетняка по анализу и геометрии и не публиковалась автором как предположительно не точная.

ТЕОРЕМА 23. *Для любой пары (f, T) при любых $k > 1$ и $\varepsilon > 0$*

- 1) $\lambda(F_{k,\varepsilon}(f, T)) \leq \frac{C \ln^{1/2} k}{k^{1/2}}$ в случае $f \in L_1$,
- 2) $\lambda(F_{k,\varepsilon}(f, T)) \leq A e^{-Bk}$ в случае $f \in L_\infty$

для некоторых констант A и B , зависящих только от $\|f\|_\infty/\varepsilon$, и константы C , зависящей только от $\|f\|_1/\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 23 ведется по общей схеме доказательства теоремы 27 (§ 9). Укажем необходимые изменения в этом доказательстве.

Пусть неотрицательные функции f^+ и f^- — положительная и отрицательная части f . Тогда $f = f^+ - f^-$, т.е. $A_n f = A_n f^+ - A_n f^-$, и если $\{A_n f\}$ делает k ε -флуктуаций, то либо $\{A_n f^+\}$, либо $\{A_n f^-\}$ делает не менее $k/2$ $\varepsilon/2$ -флуктуаций. Поскольку точные константы нас здесь не интересуют, то можно, таким образом, без ограничения общности считать $f \geq 0$, т.е. использовать экспоненциальную оценку теоремы 22.

В случае $f \in L_1$

$$\begin{aligned} \lambda(\nu_J \geq l) &\leq \left(\frac{m - |J|}{m} \right)^l \leq \left(\frac{m - \varepsilon/3}{m} \right)^{\frac{k}{8m/\varepsilon} - \frac{1}{2}} \\ &= \left(1 + \frac{\varepsilon/3}{m - \varepsilon/3} \right)^{-\frac{k\varepsilon}{8m} + \frac{1}{2}} \leq A_1 e^{-B_1 k (\frac{\varepsilon}{m})^2} \end{aligned}$$

для некоторых абсолютных констант A_1 и B_1 , поскольку $m \geq \varepsilon/2$ (неравенство (9.2)) и $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$. Поэтому

$$\lambda(F_{k,\varepsilon}) \leq \left(\frac{4m}{\varepsilon} + 1\right) A_1 e^{-B_1 k (\frac{\varepsilon}{m})^2} + \frac{\|f\|_1}{m}.$$

Требуемое неравенство получается отсюда при $m = \varepsilon k^{1/2} \ln^{-1/2} k$. В случае $f \in L_\infty$ при $m = \|f\|_\infty$ выполняется равенство $F_{k,\varepsilon}^m = F_{k,\varepsilon}$, и

$$\lambda(F_{k,\varepsilon}) \leq \left(\frac{4m}{\varepsilon} + 1\right) A_1 e^{-B_1 k (\frac{\varepsilon}{m})^2},$$

что и требуется (так как всегда $m/\varepsilon \geq 1/2$ — по (9.2)). Теорема доказана.

Как видно из приведенного доказательства, в условиях теоремы 23 заведомо можно выбрать $A = A_2 \|f\|_\infty / \varepsilon$, $B = B_2 (\varepsilon / \|f\|_\infty)^2$ и $C = C_2 (1 + \|f\|_1 / \varepsilon)$ для некоторых абсолютных констант A_2 , B_2 и C_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Существуют абсолютные положительные константы a и b , такие, что при любых k, ε удастся подобрать пару (f, T) с $f \in L_\infty$ ($\|f\|_\infty > \varepsilon/2$), для которой

$$\lambda(F_{k,\varepsilon}(f, T)) \geq a e^{-bk \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}}.$$

Действительно, зафиксируем число $M > \varepsilon/2$ и для достаточно большого числа N (как будет видно из дальнейшего, $N \sim (1 + \varepsilon/(2M))^k$) рассмотрим пространство (Ω, λ) , состоящее из N атомов, меры $1/N$ каждый, расставленных по окружности, и автоморфизм T , переводящий каждый атом в соседний против часовой стрелки.

Положим $f = M$ ($> \varepsilon/2$) на первом атоме. На втором атоме (в который переходит первый под действием T) положим $f = -M$. На последующих атомах, до s -го включительно, берем $f = -M$ до тех пор, пока среднее $A_s f(x)$, вычисляемое для x из первого атома, не опустится до $-\varepsilon/2$, т.е. сделает первую ε -флуктуацию. Далее берем $f = M$ до тех пор, пока это среднее не достигнет $+\varepsilon/2$ (и сделает вторую ε -флуктуацию), и т.д. Простая выкладка (см., например, доказательство теоремы 12) показывает, что k -я ε -флуктуация произойдет на атоме с номером $N \sim (1 + \varepsilon/(2M))^k$ (переходящем под действием T в первый атом).

Для указанной пары (f, T) с $\|f\|_\infty = M > \varepsilon/2$

$$\lambda(F_{k,\varepsilon}(f, T)) \geq a_1 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2M}\right)^{-k} = a_1 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2M}\right)^{\frac{2M}{\varepsilon}(-k \frac{\varepsilon}{2M})} \geq a e^{-bk \frac{\varepsilon}{M}}$$

для некоторых положительных абсолютных констант a_1 , a и b , поскольку, по построению, $0 < \varepsilon/(2M) < 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Существует абсолютная положительная константа c такая, что при любых k, ε удастся подобрать пару (f, T) с $f \in L_1$, для которой

$$\lambda(F_{k,\varepsilon}(f, T)) \geq c \frac{\ln^{1/2} k}{k} \frac{\|f\|_1}{\varepsilon}.$$

Поясним устройство соответствующего примера. Зафиксировав k и ε , на (T -инвариантной) части Ω меры $\sim (1 - (\ln^{1/2} k)/k)$ положим $f \equiv 0$, а оставшуюся (T -инвариантную) часть Ω меры $\sim (\ln^{1/2} k)/k$ разобьем на $4N$ атомов (равной меры $\sim (\ln^{1/2} k)/(4Nk)$ каждый), расставим их по окружности и рассмотрим автоморфизм T , передвигающий каждый из этих атомов в соседний против часовой стрелки. Положим $f = \text{Const} \sim \varepsilon k \ln^{-1/2} k$ на каждом из $2N$ атомов левой половины окружности и $f = \text{Const} \sim -\varepsilon k \ln^{-1/2} k$ на правой половине, так, чтобы $\|f\|_1 = \varepsilon$. Тогда, как показывают элементарные выкладки, при достаточно больших N (обеспечивающих плавные колебания средних $A_n f$) для каждой точки из левой верхней и правой нижней четвертушек окружности средние $\{A_n f\}$ делают $\sim k \ln^{-1/2} k (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{k}) \sim k \ln^{1/2} k > k \varepsilon$ -флуктуаций (за $\sim k/2$ полных оборотов окружности). Действительно, если занумеровать атомы верхней левой четвертушки числами от 1 до N (против часовой стрелки), то для атома с номером l : на 1-м обороте

$$\max_{1 \leq n < 4N} \{A_n f\} = \varepsilon k \ln^{-1/2} k, \quad \min_{1 \leq n < 4N} \{A_n f\} \sim -\frac{l}{4N-l} \varepsilon k \ln^{-1/2} k;$$

на 2-м обороте

$$\max_{4N \leq n < 8N} \{A_n f\} \sim \frac{2N-l}{6N-l} \varepsilon k \ln^{-1/2} k, \quad \min_{4N \leq n < 8N} \{A_n f\} \sim -\frac{l}{8N-l} \varepsilon k \ln^{-1/2} k;$$

на 3-м обороте

$$\max_{8N \leq n < 12N} \{A_n f\} \sim \frac{2N-l}{10N-l} \varepsilon k \ln^{-1/2} k, \quad \min_{8N \leq n < 12N} \{A_n f\} \sim \frac{l}{12N-l} \varepsilon k \ln^{-1/2} k,$$

и т. д., откуда все и следует.

Как показывают приведенные выше примеры, характер сходимости по k последовательности $\lambda(F_{k,\varepsilon}(f))$ в теореме 23 (степенной для $f \in L_1$ и экспоненциальный для $f \in L_\infty$) является точным. Последние оценки для мартингалов (теорема 28, §9) наводят на следующее предположение (то, что порядок убывания по k должен быть именно таким, высказывал в качестве гипотезы В. В. Иванов еще в 1992 году, т. е. до появления теоремы 28).

ГИПОТЕЗА 5. Точные оценки в условиях теоремы 23 имеют вид:

$$1) \lambda(F_{k,\varepsilon}(f, T)) \leq \frac{C}{k^{1/2}} \frac{\|f\|_1}{\varepsilon} \quad \text{в случае } f \in L_1,$$

$$2) \lambda(F_{k,\varepsilon}(f, T)) \leq A e^{-Bk(\frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty})^2} \quad \text{в случае } f \in L_\infty$$

для некоторых абсолютных констант A , B и C .

Кроме того, недавние результаты А. А. Чашки по сходимости мартингалов (теорема 34, приложение 3) естественно приводят к следующему вопросу.

ВОПРОС 3. При каких p для каждой $f \in L_p$ конечно математическое ожидание числа k_ε ε -флуктуаций последовательности $\{A_n f\}$, возведенного в степень $p/2$?

Предположительный ответ на этот вопрос: для каждого $p \in (1, \infty)$ (будет $Mk_\varepsilon^{p/2} \leq C_p \|f\|_p^p / \varepsilon^p$ для некоторой константы C_p).

§ 7. p -вариация

Как нетрудно видеть, вариация последовательности средних в индивидуальной эргодической теореме

$$\text{Var}\{A_n f\} = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n f - A_{n+1} f|$$

может быть бесконечна п.в., даже для $f \in L_{\infty}$. Простейший пример: T – автоморфизм периода 2, представляющий два атома меры по $1/2$ каждый, и f – характеристическая функция одного из этих атомов.

Заметим, что в указанном простейшем примере, тем не менее, для любого $p > 1$ конечна величина $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n f - A_{n+1} f|^p$. Оказывается, подобный эффект справедлив для любой пары (f, T) .

В условиях индивидуальной эргодической теоремы для каждого $p \in (1, \infty)$ положим

$$H^p f = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |A_n f - A_{n+1} f|^p \right)^{1/p}.$$

При $p = 2$ аналогичная характеристика для теоремы о сходимости мартингалов называется квадратической вариацией, и через нее оценивается и снизу, и сверху норма мартингала в L_q , $q > 1$ (неравенства Буркхольдера (Burkholder) [19]) и норма максимума мартингала в L_1 (неравенства Дэвиса (Davis) [19]). Эти неравенства инициировали соответствующие исследования и для индивидуальной эргодической теоремы.

ТЕОРЕМА 24 [29], [46]. Для каждого $p \in (1, \infty)$

- 1) оператор H^p имеет слабый тип $(1, 1)$, т.е. существует такая константа C_p , что для любой $f \in L_1$

$$\lambda \{H^p f > t\} \leq C_p \frac{\|f\|_1}{t}$$

для каждого $t > 0$ (и, следовательно, $H^p f$ конечно п.в.);

- 2) оператор H^p имеет сильный тип (q, q) при каждом $q \in (1, \infty]$, т.е. существует такая константа $C_{p,q}$, что для любой $f \in L_q$

$$\|H^p f\|_q \leq C_{p,q} \|f\|_q$$

(т.е. оператор H^p ограничен в L_q).

Отметим, что аналог верхнего неравенства Буркхольдера, т.е. неравенство $\|f\|_q \leq C'_{p,q} \|H^p f\|_q$, не имеет места ни для какой пары (p, q) , $q \in [1, \infty]$ (достаточно рассмотреть случай $f \equiv \text{Const} \neq 0$, T – любой). Очевидно, не имеет места и аналог верхнего неравенства Дэвиса. Вопрос о возможности перенесения нижнего неравенства Дэвиса, по-видимому, остается открытым.

Имеется также аналог теоремы 24 для положительных сжатий в L_p [26]. Некоторые функционально-аналитические обобщения теоремы 24 можно найти в [46].

У специалистов по теории функций вызывает понятный протест использование термина “вариация” для рассматриваемой характеристики сходимости. Следующий вопрос возник у С. В. Конягина.

ВОПРОС 4. Пусть

$$V^p f = \left(\sup_{1 \leq n_1 < n_2 \leq n_3 < \dots} \sum_{k=1}^{\infty} |A_{n_k} f - A_{n_{k+1}} f|^p \right)^{1/p}$$

для $p \in (1, \infty)$. Что хорошего можно сказать об этом операторе?

ГЛАВА III

СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ И КОЛЕБАНИЯ В ДРУГИХ ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ

§ 8. Скорости сходимости

Вопросу о скорости сходимости в статистической эргодической теореме фактически был посвящен весь § 1. Действительно, средние $A_n f$ и $A_n(f - f^*)$ имеют, очевидно, одинаковые скорости сходимости при $n \rightarrow \infty$ (первое — к f^* , второе — к тождественному нулю). Поскольку $DA_n(f - f^*) = \|A_n(f - f^*)\|_2^2$ как раз и измеряет L_2 -норму отклонения $A_n(f - f^*)$ от предела (т.е. нуля), то поведение нормы этого отклонения совпадает с рассматриваемым в § 1 поведением дисперсии средних. Это поведение полностью определяется особенностью спектральной меры σ_{f-f^*} в нуле и скоростью убывания корреляционных коэффициентов $b_n(f - f^*)$. Переход же от σ_f к σ_{f-f^*} осуществляется простым отбрасыванием сосредоточенной в точке 0 меры $\sigma_f\{0\} = \|f^*\|_2^2$ (поскольку f^* и есть ортогональная проекция f на подпространство собственных векторов оператора U_T , отвечающих собственному значению 1).

Хорошо изучен также вопрос о равномерной сходимости в статистической эргодической теореме, т.е. о сходимости в сильной операторной топологии средних $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_T^k$. Операторы U с такой сходимостью называют *равномерно эргодичными*. Изучению равномерной эргодичности посвящен отдельный параграф в [31, с. 86–94], и мы не будем здесь на ней подробно останавливаться. Сформулируем лишь один из приводимых там результатов.

ТЕОРЕМА 25 [31]. *Линейный оператор U в банаховом пространстве такой, что $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|U^k\| < \infty$, равномерно эргодичен тогда и только тогда, когда 1 является резольвентным значением U либо полюсом первого порядка резольвенты $R(\lambda, U)$.*

Пожалуй, наиболее изученной на предмет скорости сходимости предельной теоремой является усиленный закон больших чисел (который для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ с $M|X_1| < \infty$ можно рассматривать как индивидуальную эргодическую теорему для сдвига Бернулли). Соответствующие результаты (см., например, пункт 2.1) хорошо известны и столь многочисленны, что, по-видимому, невозможно дать их сколько-нибудь полный обзор. Мы не будем здесь на них останавливаться. Приведем лишь один, возможно новый, результат.

В работах по скоростям сходимости в усиленном законе больших чисел обычно накладываются различные дополнительные условия на усредняемые величины $\{X_k\}$. В теоремах 7–9, например, – на функцию распределения (точнее, на ее “хвост”). Приводимая ниже грубая оценка теоремы 26 таких ограничений не требует. Первоначальный (еще более грубый) вариант этой оценки был дан в [10]; ее доказательство следовало доказательству на языке нестандартного анализа элементарного аналога усиленного закона больших чисел в [34]. На приводимое ниже короткое доказательство указали автору Д. А. Коршунов и В. В. Юринский. Оно использует обычный для подобных оценок метод усечений [17] и позволяет значительно упростить и доказательство упомянутой нестандартной теоремы из [34].

ТЕОРЕМА 26. Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $M|X| < \infty$. Для каждого натурального N и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$P\left\{\sup_{n \geq N} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_i - MX \right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{2}{\varepsilon} \left(\frac{\sqrt{M|X|}}{N^{1/4}} + M\{|X|; |X| > \sqrt{N}\} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 26. Пусть $MX = 0$. Как известно [19], последовательность $\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right\}_n$ образует обращенный мартингал. По неравенству Дуба для математического ожидания превышения заданного уровня максимумом модуля мартингала [19] получаем

$$P\left(\sup_{n \geq N} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} M\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \right|.$$

Зафиксировав $m > 0$ и положив

$$X_i^0 = X_i \chi_{\{|X_i| \leq m\}}, \quad X_i' = X_i^0 - MX_i^0$$

для всех i , получаем неравенство

$$M\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \right| \leq M\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_i - X_i^0| \right) + M\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i' + MX_i^0) \right|.$$

Первое слагаемое правой части этого неравенства не превосходит

$$M\{|X|; |X| \geq m\}.$$

Второе слагаемое не более

$$M\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i' \right| + M\{|X|; |X| \geq m\}.$$

Так как

$$M\left(\sum_{i=1}^N X_i' \right)^2 = \sum_{i=1}^N M(X_i')^2 \leq 2mNM|X_1'| \leq 4mNM|X|,$$

то

$$M\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i' \right| \leq \frac{1}{N} \sqrt{M\left(\sum_{i=1}^N X_i' \right)^2} \leq \frac{2}{N} \sqrt{mNM|x|}.$$

Неравенство теоремы 26 получается отсюда при $m = \sqrt{N}$.

§9. Колебания

В терминах пункта 0.3 введения для каждой последовательности $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ случайных величин на (Ω, λ) положим

$$F_{k,\varepsilon}\{X_n\} = \{\omega \in \Omega \mid \{X_n(\omega)\}_{n=1}^\infty \text{ допускает } k \text{ } \varepsilon\text{-флуктуаций}\}.$$

В случае сходимости п.в. последовательности $\{X_n\}$ возникает вопрос о скорости стремления к нулю последовательности $\lambda(F_{k,\varepsilon}\{X_n\})$ при $k \rightarrow \infty$ (для каждого $\varepsilon > 0$). Следующая теорема позволяет дать такую оценку одновременно для индивидуальной эргодической теоремы, теоремы Дуба о сходимости мартингалов (соответствующая оценка была анонсирована в [10]) и усиленного закона больших чисел. Как и ранее, через $\nu_{[\alpha,\beta]}$ обозначаем число пересечений снизу вверх рассматриваемой последовательностью полосы $[\alpha, \beta]$ (см. §5).

ТЕОРЕМА 27. Пусть $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность случайных величин, для которой существует такая константа S , что:

- а) $\int_{\Omega} \nu_{[\alpha,\beta]} d\lambda \leq \frac{S + |\alpha|}{\beta - \alpha}$ для любых α, β ($\alpha < \beta$);
- б) $\lambda\left\{\sup_n |X_n| \geq m\right\} \leq \frac{S}{m}$ для любого $m > 0$.

Тогда

$$\lambda(F_{k,\varepsilon}\{X_n\}) \leq \frac{7}{k^{1/4}} \left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 27 ведется по той же схеме, что и доказательство (на языке нестандартного анализа) элементарного аналога теоремы о сходимости мартингалов в [34]. Положим

$$F_{k,\varepsilon}^m = F_{k,\varepsilon}\{X_n\} \cap \left\{\sup_n |X_n| \leq m\right\}$$

и отметим вытекающее из условия б) доказываемой теоремы неравенство

$$(9.1) \quad \lambda(F_{k,\varepsilon}^m) \geq \lambda(F_{k,\varepsilon}) - \frac{S}{m}.$$

В дальнейшем предполагаем выполнение неравенства

$$(9.2) \quad m \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отметим, что в случае $m < \varepsilon/2$ будет $F_{k,\varepsilon}^m = \emptyset$ для всех k .

На множестве $F_{k,\varepsilon}^m$ последовательность $\{X_n\}$ принимает значения в интервале $[-m, m]$ и допускает k ε -флуктуаций. Разобьем отрезок $[-m, m]$ на $r = \left[\frac{2m}{\varepsilon/2}\right] + 1$ равных интервалов длины $d = 2m/r$ каждый; отметим неравенства $\varepsilon/3 \leq d \leq \varepsilon/2$. Соответственно, полоса $[-m, m] \times \mathbb{N}$ разбивается на равные полоски ширины d . Каждая ε -флуктуация последовательности $\{X_n\}$ дает пересечение (снизу вверх или сверху вниз) не менее одной из таких полосок. Всего таких пересечений на множестве $F_{k,\varepsilon}^m$ не

менее k ; общее (суммарное) число пересечений снизу вверх рассматриваемой последовательностью интервалов, порождающих полосы разбиения, не менее $(k - r)/2$.

Итак, для каждой точки множества $F_{k,\varepsilon}^m$ найдется интервал разбиения, пересекаемый снизу вверх не менее $\frac{k-s}{2s} = \frac{k}{2s} - \frac{1}{2}$ раз. Поэтому для одного из таких интервалов, пусть это интервал J , будет

$$\lambda(F_l^m = F_{k,\varepsilon}^m \cap \{\nu_J \geq l\}) \geq \frac{\lambda(F_{k,\varepsilon}^m)}{r}$$

для некоторого (целого) l , удовлетворяющего неравенству

$$(9.3) \quad l \geq \frac{k}{2s} - \frac{1}{2} \geq \frac{k}{8m/\varepsilon + 2} - \frac{1}{2},$$

т.е. для этого l

$$(9.4) \quad \lambda(F_{k,\varepsilon}^m) \leq \left(\frac{4m}{\varepsilon} + 1\right) \lambda(F_l^m).$$

Учитывая соотношения $\varepsilon/3 \leq |J| \leq \varepsilon/2$ и (9.3), по условию а) доказываемой теоремы и неравенству Чебышёва получаем:

$$\lambda(F_l^m) \leq \lambda\{\nu_J \geq l\} \leq \frac{1}{l} \int_{\Omega} \nu_J d\lambda \leq \frac{S+m}{l|J|} \leq \frac{S+m}{(\frac{k}{8m/\varepsilon+2} - \frac{1}{2})\frac{\varepsilon}{3}}.$$

Отсюда и из (9.1) и (9.4), с учетом (9.2), для любого m из промежутка $\varepsilon/2 \leq m \leq (k\varepsilon)/6$ получаем неравенства

$$\lambda(F_{k,\varepsilon}) \leq \left(\frac{4m}{\varepsilon} + 1\right) \frac{S+m}{(\frac{k}{8m/\varepsilon+2} - \frac{1}{2})\frac{\varepsilon}{3}} + \frac{S}{m} \leq 216 \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2 \cdot \frac{S/\varepsilon + m/\varepsilon}{k - 6m/\varepsilon} + \frac{S/\varepsilon}{m/\varepsilon}.$$

Положив $m = \frac{1}{6}\varepsilon k^{1/4}$, видим, что для всех $k \geq 81$ справедлива оценка

$$\lambda(F_{k,\varepsilon}) \leq \frac{S/\varepsilon + k^{1/4}/6}{k^{1/2} - k^{1/4}} + 6 \frac{S/\varepsilon}{k^{1/4}}.$$

Поскольку $k^{1/2} - k^{1/4} \geq \frac{6}{7}k^{1/2}$ при $k \geq 7^4$, то для таких k верно неравенство

$$\lambda(F_{k,\varepsilon}) \leq 7 \left(\frac{S/\varepsilon}{k^{1/2}} + \frac{1/6}{k^{1/4}} \right) + 6 \frac{S/\varepsilon}{k^{1/4}} \leq \frac{7}{k^{1/4}} \left(1 + \frac{S}{\varepsilon} \right).$$

Последнее неравенство справедливо для любого k , так как при $k < 7^4$ его правая часть больше 1. Теорема 27 доказана.

Применимость теоремы 27 к индивидуальной эргодической теореме (с $S = \|f\|_1$) получается из неравенства Бишоп (теорема 21) и максимальной эргодической теоремы [12]; к теореме о сходимости мартингалов (с $S = \lim_{n \rightarrow \infty} M|X_n|$) — из соответствующего неравенства Дуба для математического ожидания числа пересечений полосы

мартингалом [19] и теоремы о превышении заданного уровня максимумом модуля мартингала [19]. Применимость к усиленному закону больших чисел (для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин) вытекает из того факта, что в этом случае рассматриваемая последовательность образует так называемый обращенный мартингал (этот факт уже использовался нами при доказательстве теоремы 26).

Для всех трех перечисленных предельных теорем оценка теоремы 27 не точна. Очевидным изменением доказательства (используя разбиение процесса на положительную и отрицательную часть – как при доказательстве теоремы 23) легко получить уточнение оценки с убыванием по k порядка $k^{-1/3}$ (вместо $k^{-1/4}$). Однако и эти оценки не точны. Для индивидуальной эргодической теоремы дальнейшее уточнение дается принадлежащей В. В. Иванову теоремой 23. Точная оценка для усиленного закона больших чисел получена С. А. Утевым и приводится в Приложении 2 (теорема 33). Лучшая (предположительно, точная) оценка для мартингалов доказана А. А. Чашкой и выглядит следующим образом.

ТЕОРЕМА 28 [18]. Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – мартингал и $\|X_n\|_p \leq L < \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда

$$P(F_{k,\varepsilon}\{X_n\}) \leq \frac{C_p L^p}{k^{p/2} \varepsilon^p}, \quad \text{если } 1 \leq p < \infty,$$

$$P(F_{k,\varepsilon}\{X_n\}) \leq B e^{-A \frac{k \varepsilon^2}{L^2}}, \quad \text{если } p = \infty,$$

C_p – константа, зависящая только от p ; $A > 0$; $B > 0$.

Точность порядка этой оценки (т.е. невозможность улучшения ее показателя по k), анонсированная в [18], доказывается в приложении 3 (теорема 35). Отметим, что теорема 35, тем не менее, не утверждает точности оценок теоремы 28. Кроме того, в приложении 3 приводится еще один недавний результат А. А. Чашки – теорема 34, касающаяся вопроса о математическом ожидании числа ε -флуктуаций мартингала и не имеющая пока аналогов для индивидуальной эргодической теоремы и усиленного закона больших чисел.

Несколько особняком, по понятным причинам, стоит вопрос о колебательном поведении средних в статистической эргодической теореме.

Говорят, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов нормированного пространства допускает k ε -флуктуаций, если для некоторых $n_1 < n_2 \leq n_3 < n_4 \leq \dots \leq n_{2k-1} < n_{2k}$

$$\|f_{n_1} - f_{n_2}\| \geq \varepsilon, \dots, \|f_{n_{2k-1}} - f_{n_{2k}}\| \geq \varepsilon.$$

Понятно, что последовательность сходится (по норме) тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ она допускает лишь конечное число ε -флуктуаций. Вопрос, рассматриваемый в §6, выглядит для нее следующим образом: как много ε -флуктуаций допускает данная сходящаяся (по норме) последовательность для каждого $\varepsilon > 0$?

Как и для индивидуальной эргодической теоремы, оказывается возможным дать (грубую) оценку этого числа для статистической эргодической теоремы, зависящую от усредняемой функции f и не зависящую от оператора U_T (т.е. равномерную по группе автоморфизмов T). Приведем ее в простейшем случае ограниченности усредняемой функции f . В общем случае $f \in L_2$ оценка может быть получена аналогично.

ТЕОРЕМА 29. Пусть $f \in L_\infty$. Тогда справедлива следующая оценка числа k_ε ε -флуктуаций (по норме пространства L_2) последовательности $\{A_n f\}_{n=1}^\infty$:

$$k_\varepsilon \leq C \left(\frac{\|f\|_\infty}{\varepsilon} \right)^4 \left(1 + \ln \left(\frac{\|f\|_\infty}{\varepsilon} \right) \right)$$

для некоторой абсолютной константы C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 29. Для каждой функции $g \in L_1$ и всех $\theta > 0$ положим

$$\delta_g(\theta) = \max \left\{ \delta \in [0, 1] \mid (\lambda(B) \leq \delta) \Rightarrow \left(\int_B |g| d\lambda \leq \theta \right) \right\}.$$

Докажем сначала, что если $\|A_{n_1} f - A_{n_2} f\|_2 \geq \varepsilon$, то верно неравенство

$$(9.5) \quad \lambda \left(\left\{ \omega \in \Omega \mid |A_{n_1} f(\omega) - A_{n_2} f(\omega)|^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{5} \right\} \right) \geq \delta_{f^2} \left(\frac{\varepsilon^2}{5} \right).$$

Из справедливости для любых действительных чисел $a_0, \dots, a_{n-1}$ неравенства

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} a_m \right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} a_m^2$$

вытекает справедливость соотношения

$$\int_B (A_n f)^2 d\lambda \leq \int_B A_n (f^2) d\lambda = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \int_B f^2 \circ T^m d\lambda$$

для любого измеримого $B \subseteq \Omega$. Поэтому при всех n

$$\delta_{(A_n f)^2}(\theta) \geq \delta_{f^2}(\theta)$$

для любого $\theta > 0$, т.е. семейство функций $\{(A_n f)^2\}_{n=1}^\infty$ равномерно (по n) суммируемо. Свойством равномерной суммируемости обладает также семейство $\{(A_{n_1} f - A_{n_2} f)^2\}_{n_1, n_2=1}^\infty$ равномерно по всем парам (n_1, n_2) , поскольку для любого $B \subseteq \Omega$

$$\int_B (A_{n_1} f - A_{n_2} f)^2 d\lambda \leq 2 \int_B (A_{n_1} f)^2 d\lambda + 2 \int_B (A_{n_2} f)^2 d\lambda,$$

т.е.

$$(9.6) \quad \delta_{(A_{n_1} f - A_{n_2} f)^2}(4\theta) \geq \delta_{f^2}(\theta)$$

для любого $\theta > 0$.

Заметим, что если $\|A_{n_1} f - A_{n_2} f\|_2^2 \geq 5\theta$, $0 < \theta < 1$, то для

$$C = \{ \omega \in \Omega \mid |A_{n_1} f(\omega) - A_{n_2} f(\omega)| \geq \theta \}$$

выполнено неравенство $\lambda(C) \geq \delta_{f^2}(\theta)$. Действительно, в этом случае

$$\int_C |A_{n-1}f - A_{n_2}f|^2 d\lambda + \int_{\Omega/C} |A_{n_1}f - A_{n_2}f|^2 d\lambda \geq 5\theta.$$

Второй интеграл не превосходит $\theta^2 (\leq \theta)$, поэтому первый не менее 4θ . Из (9.6) следует неравенство $\lambda(C) \geq \delta_{f^2}(\theta)$, что и требуется. Из последнего неравенства и вытекает доказываемое неравенство (9.5).

Итак, пусть найдутся такие $1 \leq n_1 < n_2 \leq n_3 < n_4 \leq \dots \leq n_{2k_\varepsilon-1} < n_{2k_\varepsilon}$, что

$$\|A_{n_{2l-1}}f - A_{n_{2l}}f\|_2 \geq \varepsilon$$

для всех $l = 1, \dots, k_\varepsilon$. Положим

$$C_l = \left\{ \omega \in \Omega \mid |A_{n_{2l-1}}f(\omega) - A_{n_{2l}}f(\omega)| \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}} \right\}.$$

Из (9.5) получаем

$$\lambda(C_l) \geq \delta_{f^2}\left(\frac{\varepsilon^2}{5}\right)$$

при всех l .

Пусть

$$D_m = \left\{ \omega \in \Omega \mid \sum_{l=1}^{k_\varepsilon} \chi_{C_l}(\omega) = m \right\}, \quad \delta_m = \lambda(D_m)$$

для всех натуральных m (понятно, что при $m > k_\varepsilon$ будет $D_m = \emptyset$, $\delta_m = 0$). Так как

$$\sum_{m=0}^{\infty} m\delta_m = \sum_{m=0}^{k_\varepsilon} m\delta_m = \sum_{l=1}^{k_\varepsilon} \lambda(C_l) \geq k_\varepsilon \delta_{f^2}(\varepsilon),$$

то справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{k_\varepsilon} \frac{m\delta_m}{k_\varepsilon} \geq \delta_{f^2}\left(\frac{\varepsilon^2}{5}\right), \\ \sum_{m=0}^{k_\varepsilon} \delta_m = 1. \end{cases}$$

Заметим, что для любого $N \leq k_\varepsilon$

$$\sum_{m=0}^N \frac{m\delta_m}{k_\varepsilon} \leq \frac{N}{k_\varepsilon} \sum_{m=0}^{k_\varepsilon} \delta_m \leq \frac{N}{k_\varepsilon}.$$

Поэтому если $N \leq \frac{k_\varepsilon}{2} \delta_{f^2}\left(\frac{\varepsilon^2}{5}\right)$, то

$$\sum_{m=0}^N \frac{m\delta_m}{k_\varepsilon} \leq \frac{1}{2} \delta_{f^2}\left(\frac{\varepsilon^2}{5}\right),$$

т.е.

$$\sum_{m=N+1}^{k_\varepsilon} \frac{m\delta_m}{k_\varepsilon} \geq \frac{1}{2}\delta_{f^2}\left(\frac{\varepsilon^2}{5}\right).$$

Таким образом, для любого $N \leq \frac{k_\varepsilon}{2}\delta_{f^2}\left(\frac{\varepsilon^2}{5}\right)$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\lambda(F_{N,\varepsilon/\sqrt{5}}(f, T)) \geq \sum_{m=N}^{\infty} \lambda(D_m) = \sum_{m=N}^{k_\varepsilon} \delta_m \geq \sum_{m=N+1}^{k_\varepsilon} \frac{m}{k_\varepsilon} \delta_m \geq \frac{1}{2}\delta_{f^2}\left(\frac{\varepsilon^2}{5}\right)$$

(здесь обозначение $F_{N,\varepsilon/\sqrt{5}}(f, T)$ взято из §6 и имеет тот же смысл, что и в формулировке теоремы 23).

Применяя теорему 23, получаем оценку

$$\frac{1}{2}\delta_{f^2}\left(\frac{\varepsilon^2}{5}\right) \leq \lambda(F_{N,\varepsilon/\sqrt{5}}(f, T)) \leq A\sqrt{5} \frac{\|f\|_\infty}{\varepsilon} \exp\left\{-\frac{B}{5}N\left(\frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}\right)^2\right\}$$

для любого $N \leq \frac{k_\varepsilon}{2}\delta_{f^2}\left(\frac{\varepsilon^2}{5}\right)$. Так как

$$\delta_{f^2}\left(\frac{\varepsilon^2}{5}\right) \geq \frac{\varepsilon^2/5}{\|f\|_\infty^2},$$

то при

$$N \leq \frac{k_\varepsilon}{10}\left(\frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}\right)^2$$

заведомо справедлива более слабая оценка

$$\frac{1}{10}\left(\frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}\right)^2 \leq A\sqrt{5} \frac{\|f\|_\infty}{\varepsilon} \exp\left\{-\frac{B}{5}N\left(\frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}\right)^2\right\},$$

откуда и следует доказываемое неравенство. Теорема 29 доказана.

ВОПРОС 5. Какова точная оценка числа k_ε ε -флуктуаций по норме пространства L_2 последовательности $\{A_n f\}$ для каждой $f \in L_2$ (равномерная по T)?

Приложение 1.

Некоторые интерпретации на языке нестандартного анализа

В [34] Э. Нельсон продемонстрировал возможность формулировки и доказательства на языке принадлежащей ему теории внутренних множеств [33] содержательных элементарных аналогов различных предельных теорем. Большинство новых теорем настоящей работы были обнаружены и доказаны использованием упомянутой возможности. Сначала были получены их нестандартные элементарные аналоги, что удобнее и проще, а потом уже переработкой имевшихся доказательств – и сами эти (более сильные) новые теоремы. В то же время указанные элементарные аналоги

(и несколько более общие неэлементарные “цветные” теоремы [8], [11]) можно рассматривать как очевидные следствия этих более сильных результатов, представляющие самостоятельный интерес для нестандартного анализа.

П1.1. Теория внутренних множеств. Приведем необходимые сведения из нестандартного анализа в интерпретации Э. Нельсона; развернутое изложение имеется в [33], [34].

В обычном множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел n указываются стандартные (ограниченные; обозначение $n \ll \infty$) числа и нестандартные (неограниченные; обозначение $n \simeq \infty$) числа. Каждое натуральное число попадает в одну из этих двух совокупностей. Наибольшего ограниченного, как и наименьшего неограниченного числа указать невозможно (рассматриваемые совокупности не являются множествами в теории множеств Цермело–Френкеля).

Соответственно, в множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел r выделяются инфинитезимальные (бесконечно малые; обозначение $r \simeq 0$) – такие действительные числа, для которых $|r| < 1/n$ при некотором $n \simeq \infty$. Действительные числа a и b называют бесконечно близкими (обозначение $a \simeq b$) в случае $|a - b| \simeq 0$. Используется также обозначение $c \gg d$ – в случае $c > d$ и $c \not\simeq d$.

По аналогии с понятием предела (бесконечной) числовой последовательности появляется возможность ввести понятие предела конечной последовательности $x_0, x_1, \dots, x_\nu$ при $\nu \simeq \infty$. Такая последовательность называется (около)сходящейся, если для некоторого x^* будет $x_n \simeq x^*$ при всех неограниченных $n \leq \nu$. В этом случае говорят, что $x_0, x_1, \dots, x_\nu$ (около)сходится к x^* . Поведение (около)сходящейся последовательности вполне соответствует интуитивным представлениям о сходимости: рассмотрев для любого $\varepsilon > 0$ число n_ε – минимальное такое, что $|x_n - x^*| \leq \varepsilon$ для всех n из промежутка $n_\varepsilon \leq n \leq \nu$, убеждаемся в том, что $n_\varepsilon \ll \infty$ при $\varepsilon \gg 0$.

Последовательность называется *последовательностью ограниченной флуктуации*, если для любых $\varepsilon \gg 0$ и $k \simeq \infty$ она не допускает k ε -флуктуаций. Понятно, что всякая (около)сходящаяся последовательность имеет ограниченную флуктуацию. Обратное, вообще говоря, неверно, но имеет место следующее утверждение. Если последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\nu$, $\nu \simeq \infty$, имеет ограниченную флуктуацию, то найдется такое неограниченное $\mu \leq \nu$, что последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\mu$ (около)сходится.

Говорят, что теоретико-множественное свойство $A(\omega)$ выполняется *примерно всюду* – пр.в. – на Ω , если для любого $\varepsilon \gg 0$ найдется такое множество $A_\varepsilon \subseteq \Omega$ меры не меньше $1 - \varepsilon$, что $A(\omega)$ выполняется для любого $\omega \in A_\varepsilon$. *Элементарным* пространством с мерой называется в случае, если Ω состоит из конечного числа атомов положительной меры.

П1.2. Элементарные аналоги эргодических теорем. Пусть (Ω, λ) – элементарное пространство с (вероятностной) мерой.

ТЕОРЕМА 30 (элементарный аналог индивидуальной эргодической теоремы). Пусть T – автоморфизм пространства (Ω, λ) , $\nu \simeq \infty$. Тогда

- а) если $\|f\|_1 \ll \infty$, то последовательность $\{A_n f\}_{n=1}^\nu$ имеет ограниченную флуктуацию пр.в.;
- б) если $\|f\|_2 \ll \infty$ и $\sigma_{f-f^*}[-\delta, \delta] \simeq 0$ для любого $\delta \simeq 0$, то $\{A_n f\}_{n=1}^\nu$ (около)сходится пр.в.

Теорему 30 можно рассматривать как очевидное следствие теорем 23 или 27 (пункт а)) и теоремы 14 (пункт б)). В [11] имеется прямое нестандартное доказательство некоторого ослабления пункта а), не опирающееся на максимальную эргодическую теорему и не похожее ни на одно из известных автору доказательств индивидуальной эргодической теоремы. Из этого результата (как и из любого пункта теоремы 30) с помощью теории периодических аппроксимаций Рохлина–Халмоша применением принадлежащих Э. Нельсону глубоких нестандартных методов удастся [11] вывести обычную индивидуальную эргодическую теорему для автоморфизма пространства Лебега. Таким образом, попутно в [11] получено новое (нестандартное) доказательство обычной индивидуальной эргодической теоремы.

ТЕОРЕМА 31 (элементарный аналог статистической эргодической теоремы). Пусть T – автоморфизм пространства (Ω, λ) , $\nu \simeq \infty$. Тогда

- а) если $\|f\|_2 \ll \infty$, то последовательность $\{A_n f\}_{n=1}^\nu$ имеет ограниченную флуктуацию (по норме L_2);
- б) если $\|f\|_2 \ll \infty$ и $\sigma_{f-f^*}[-\delta, \delta] \simeq 0$ для любого $\delta \simeq 0$, то $\{A_n f\}_{n=1}^\nu$ (около)сходится (по норме L_2).

Пункт а) этой теоремы выводится из теоремы 30 так же, как теорема 29 из теоремы 23; пункт б) следует из теоремы 2 (необходимые для этого выкладки имеются в [35]).

Следующая теорема принадлежит Э. Нельсону.

ТЕОРЕМА 32 [34] (элементарный аналог усиленного закона больших чисел). Пусть $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность независимых одинаково (как X) распределенных случайных величин, $\{A_n\} = \{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\}$, $\nu \simeq \infty$. Тогда

- а) если $M|X| \ll \infty$, то последовательность $\{A_n\}_{n=1}^\nu$ имеет ограниченную флуктуацию пр.в.;
- б) если $M|X| \ll \infty$ и $\int_E |X| d\lambda \simeq 0$ для любого $E \subset \Omega$, $\lambda(E) \simeq 0$, то $\{A_n\}_{n=1}^\nu$ (около)сходится к MX пр.в.

Формально теорему 32 можно рассматривать как следствие теоремы 27 (пункт а)) и теоремы 26 (пункт б)).

Поясним на примере теорем 14 (11) и 30, в чем состоит удобство перехода к элементарному пространству с мерой при изучении эргодических теорем. Такое пространство под действием своего автоморфизма разбивается на конечное число периодических орбит. Эти орбиты можно мыслить как конечное число атомов, расставленных по окружности, каждый из которых переставляется рассматриваемым автоморфизмом в соседний – против часовой стрелки, например. Совсем просто выглядят и спектральные свойства соответствующего унитарного оператора. Поставив и решив, используя язык нестандартного анализа, задачу для такой упрощенной модели (теорема 30), удастся понять, как должно быть устроено доказательство и в общем случае непрерывной меры (теорема 14 (11)).

Приложение 2.

С. А. УТЕВ

Оценки больших уклонений**случайного числа флуктуаций средних для независимых слагаемых**

П2.1. Формулировка основного результата. Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Через $V_\varepsilon(\mathcal{X})$ обозначим количество ε -флуктуаций последовательности $\mathcal{X} = \{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\}_{n=1}^\infty$ (см. пункт 0.3 введения). Положим

$$y = \frac{1}{\varepsilon} M\{ |X| \chi_{\{|X| > \varepsilon k \exp(k\varepsilon/M|X|)\}} \}, \quad k(\mathcal{X}, \varepsilon) = y \ln(1 + y).$$

Основным результатом этого приложения является

ТЕОРЕМА 33. *Существуют абсолютные постоянные c, C такие, что при натуральных $k \geq Ck(\mathcal{X}, \varepsilon)$ справедлива оценка*

$$(П2.1) \quad P(V_\varepsilon(\mathcal{X}) \geq k) \leq c \frac{M|X|}{\varepsilon k}.$$

Можно показать, исследуя марковский момент $N_\varepsilon(m) = \min\{j \mid V_\varepsilon(\mathcal{X}) \geq m\}$, что при $t \geq 1$ имеет место неравенство

$$P(V_\varepsilon(\mathcal{X}) \geq k) \leq P^2(V_{\varepsilon/3}(\mathcal{X}) \geq k/3) + c_1 \frac{M|X|^t}{\varepsilon^t k^{2t-1}}.$$

Здесь и далее буквой c будем обозначать различные абсолютные постоянные. В частности, из приведенной теоремы в случае конечного момента порядка $t \geq 1$ вытекает оценка

$$(П2.2) \quad P(V_\varepsilon(\mathcal{X}) \geq k) \leq c_t \left(\frac{M|X|^t}{\varepsilon^t k^{2t-1}} + \left(\frac{M|X|}{\varepsilon t} \right)^{2t-1} \right).$$

Нетрудно видеть, что для любого $T \geq 0$

$$P(V_\varepsilon(\mathcal{X}) \geq k) \geq P(|S_k| \geq 4(T + \varepsilon)k^2, \max_{k < j \leq 2k} |S_j - S_k| \leq Tk).$$

Выбирая $T = 2M|X|$, мы получим

$$(П2.3) \quad P(V_\varepsilon(\mathcal{X}) \geq k) \geq \frac{1}{2} P(|S_k| \geq 4(T + \varepsilon)k^2).$$

Исходя из нижней оценки (П2.3), нетрудно строить примеры, показывающие точность оценок (П2.1) и (П2.2) в зависимости от скорости изменения $k \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ (в этих примерах рассматриваются схемы серий последовательностей случайных величин с начальным бернуллиевским распределением $P(X = 1) = 1 - P(X = 0) = p$, $p \equiv p(k, \varepsilon) \rightarrow 0$). Такой же пример, но с более тонкой оценкой, чем (П2.3), приводит к необходимости условия $k \geq C_0 k(\mathcal{X}, \varepsilon)$, при некотором $C_0 > 0$.

Доказательство усиленного закона больших чисел через оценку флуктуаций с помощью представления сумм независимых одинаково распределенных случайных величин в виде обратного мартингала с последующим использованием неравенства Дуба встречается в монографической литературе. Насколько нам известно, задача о получении правильной оценки в (П2.1) ранее не рассматривалась.

Автор благодарит Д. А. Коршунова за полезные обсуждения.

П2.2. Схема доказательства теоремы 33. Далее, не ограничивая общности, будем считать $\varepsilon = 1$. Первый шаг доказательства – это стандартная срезка. Зафиксируем положительные δ, Δ . Положим для любых $a, g > 0$

$$\begin{aligned} T_i(g) &= X_i \chi_{\{|X_i| \leq g\}}, & e_i(g) &= M T_i(g), & \xi_i(g) &= T_i(g) - e_i(g), \\ \eta_i(a, g) &= X_i \chi_{\{a < |X_i| \leq g\}}, & T(g) &= \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i(g) \right\}_{n=1}^{\infty}, \\ \eta(a, g) &= \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i(a, g) \right\}_{n=1}^{\infty}, & e(g) &= \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i(g) \right\}_{n=1}^{\infty}, \\ A &= M|X|, & \xi(g) &= \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i(g) \right\}_{n=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$P(V_1(\mathcal{X}) \geq k) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(|X_i| > \delta k i) + P(V_1(T(\delta k)) \geq k).$$

Учитывая очевидное неравенство $V_{\theta}(W + Z) \leq V_{\theta/2}(W) + V_{\theta/2}(Z)$, мы получим

$$\begin{aligned} P(V_1(\mathcal{X}) \geq k) &\leq A(\delta k)^{-1} + P(V_{1/4}(e(A\Delta)) \geq k/4) \\ &+ P(V_{1/4}(\eta(\Delta, A)) \geq k/4) + P(V_{1/4}(\eta(A, k\delta)) \geq k/4) + P(V_{1/4}(\xi(\Delta)) \geq k/4). \end{aligned}$$

Далее для оценки количества флуктуаций последовательности $U = \{u(n)\}_{n=1}^{\infty} \equiv \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i \right\}_{n=1}^{\infty}$ мы будем неоднократно применять следующие очевидные соотношения:

$$V_{\theta}(U) \leq \frac{1}{\theta} \text{Var}(U) \equiv \frac{1}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} |u(n+1) - u(n)| \leq \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|u_i|}{i}.$$

Выбирая δ достаточно маленьким, мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} M|\eta_i(A, k\delta)| \frac{1}{i} &\leq \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{\infty} M(X^2 \chi_{\{|X| \leq \delta k i\}}) \frac{1}{i^2} \equiv I \leq C_1 \frac{M|X|\delta k}{A} \leq \frac{k}{48}, \\ P\left(V_{1/4}(\eta(A, k\delta)) \geq k/4\right) &\leq P\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(|\eta_i(A, k\delta)| \frac{1}{i} - M|\eta_i(A, k\delta)| \frac{1}{i}\right) \geq \frac{k}{48}\right) \\ &\leq c_3 \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{\infty} D\left(|\eta_i| \frac{1}{i}\right) \leq \frac{c_3}{k^2} AI \leq c_4 \frac{A}{k}. \end{aligned}$$

С другой стороны, выбирая Δ достаточно большим, мы получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} M|\eta_i(\Delta, A)| \frac{1}{i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(|X| \chi_{\{\Delta i < |X| \leq A i\}}) \frac{1}{i} \leq c_3 A \ln(1 + A) \leq \frac{k}{48}$$

и, так же как и выше, справедлива оценка

$$P(V_{1/4}(\eta(\Delta, A)) \geq k/4) \leq P\left(6 \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i(\Delta, A)| \frac{1}{i} \geq k/4\right) \leq c_5 \frac{A}{k}.$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i(g) = M(X \chi_{\{|X| \leq gn\}}) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X \chi_{\{g(i-1) < |X| \leq gi\}}) i.$$

Следовательно, $V_{1/4}(e(g)) \leq 4 \text{Var}(e(g)) \leq 12M|X|$.

Итак, мы свели задачу к оценке вероятностей больших отклонений случайного числа флуктуаций последовательности $\xi(\Delta)$. Через $V_{\theta}(\mathcal{X}, G)$ обозначим количество θ -флуктуаций последовательности $\mathcal{X}$ внутри временного интервала G (далее выберем $\theta = 1/4$). Положим

$$s(w, u) = \sum_{w < i \leq u} \xi_i(\Delta), \quad s_n = s(0, n).$$

Заметим, что

$$V_{\theta}(\xi(\Delta)) \leq \sum_{r=0}^{\infty} V_{\theta}(\xi(\Delta), [2^r, 2^{r+1})) + 2 \sum_{r=0}^{\infty} \chi_{\{\max_{2^r \leq i < 2^{r+1}} |s_i| \geq \theta 2^{r-2}\}}.$$

Обозначим через $\#(s, r)$ число $\theta 2^{r-2}$ -флуктуаций последовательности $s(r) = \{s(2^r, i)\}_{i > 2^r}$ внутри интервала $[2^r, 2^{r+1})$, т.е.

$$\#(s, r) = V_{\theta 2^{r-2}}(\{s(2^r, i)\}_{i > 2^r}, [2^r, 2^{r+1})).$$

Нетрудно показать, что

$$V_{\theta}(\xi(\Delta), [2^r, 2^{r+1})) \leq \#(s, r) + \left\lceil \max_{2^r \leq i < 2^{r+1}} |s_i| 2^{-r-2} \frac{1}{\theta} \right\rceil,$$

где $\lceil \cdot \rceil$ — целая часть числа. Следовательно,

$$P(V_{\theta}(\xi(\Delta)) \geq k/4) \leq c_6 \frac{1}{k} \left(\sum_{r=0}^{\infty} M \left[\max_{2^r \leq i < 2^{r+1}} |s_i| \frac{1}{\theta 2^{r+2}} \right] + \sum_{r=0}^{\infty} M \#(s, r) \right) \equiv J_1 + J_2.$$

Очевидно, что

$$J_1 \leq c_7 \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{\infty} D(s_{2^r}) 2^{-2r} \leq c_8 A \frac{1}{k}.$$

И наконец, число временных флуктуаций $\#(s, r)$ внутри интервала $[2^r, 2^{r+1})$ легко оценивается через двойную сумму $N(r, j)$ – количеств пересечений сверху вниз или снизу вверх прямолинейных полос $[j\theta/4, (j+1)\theta/4]$, т.е.

$$\#(s, r) \leq 2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} N(r, j) + \sum_{j=-\infty}^{-2} N(r, j) \right).$$

Следовательно, применяя неравенство Дуба

$$M\nu(\alpha, \beta) \leq \frac{2M(T(n) - \alpha)^+}{\beta - \alpha}$$

для математического ожидания числа пересечений полосы (α, β) субмартингалом $\{T(i)\} \equiv 2^{-r} \{s(2^r, i)\}$ на интервале $[2^r, 2^{r+1})$ и учитывая, что $\{-T(i)\}$ тоже является субмартингалом, мы получим

$$\begin{aligned} M\#(s, r) &\leq c_g \left(\sum_{j=1}^{\infty} MN(r, j) + \sum_{j=-\infty}^{-2} MN(r, j) \right) \\ &\leq c_{10} \left(\sum_{j=1}^{\infty} M(2^{-r}s(2^r, 2^{r+1}) - j\theta/4)^+ \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=-\infty}^{-2} M(-2^{-r}s(2^r, 2^{r+1}) - (j+1)\theta/4)^+ \right) \\ &\leq c_{11} \sum_{j=1}^{\infty} M(|s(2^r, 2^{r+1})| \chi_{\{|s(2^r, 2^{r+1})| \geq 2^{r-2}j\theta\}} / 2^r) \\ &\leq c_{12} 2^{-r} M X^2 \chi_{\{|X| \leq c_{13} 2^r\}}; \end{aligned}$$

при выводе последней оценки мы воспользовались неравенством Бенетта–Хефдинга (Bennett, Hoeffding) [32]. Следовательно,

$$\sum_{r=0}^{\infty} M\#(s, r) \leq c_{12} \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-r} M(X^2 \chi_{\{|X| \leq c_{13} 2^r\}}) \leq c_{14} M|X|,$$

что и требовалось доказать.

Приложение 3.

Флуктуации в ограниченных мартингалах

Результаты этого приложения получены А. А. Чашкой. Приводимые ниже и некоторые другие оценки приняты к печати и будут им опубликованы в появившемся в 1995 году и пока не везде доступном журнале “East Journal on Approximation”.

Пусть $k_\varepsilon \{X_i\}_{i=1}^\infty$ – максимальное число ε -флуктуаций (см. пункт 0.3 введения) последовательности случайных величин $\{X_i\}_{i=1}^\infty$. Обозначим через $\mathcal{M}_p(L)$ множество

мартингалов $X = \{(X_i, \mathcal{F}_i)\}_{i=1}^\infty$ таких, что $\sup_{i \in \mathbb{N}} \|X_i\|_p \leq L$, тогда справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 34.

- 1) Существует мартингал $X \in \mathcal{M}_1(L)$ такой, что $M(k_\varepsilon X)^{1/2} = \infty$.
- 2) Если $p \in (1, \infty)$, то для любого мартингала $X \in \mathcal{M}_p(L)$

$$M(k_\varepsilon X)^{p/2} \leq \frac{c_p L^p}{\varepsilon^p}, \quad c_p = \left(\frac{36p^{5/2}}{(p-1)^2} \right)^p.$$

- 3) Для мартингала $X \in \mathcal{M}_\infty(L)$: $k_\varepsilon X \in \text{BMO}(\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^\infty)$, т.е.

$$\sup_n \|M(|k_\varepsilon X - M(k_\varepsilon X | \mathcal{F}_n)| | \mathcal{F}_n)\|_\infty < \infty.$$

Более точно,

$$\sup_n \|M(|k_\varepsilon X - M(k_\varepsilon X | \mathcal{F}_n)| | \mathcal{F}_n)\|_\infty \leq 2 + \frac{c_2 L^2}{\varepsilon^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, где $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ — последовательность бернуллиевских случайных величин и $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $P(\xi_i = \pm\varepsilon) = 1/2$, $\varepsilon \leq L$. Ясно, что $\{(S_n, \mathcal{F}_n)\}_{n=0}^\infty$ — мартингал. Введем марковский момент $\tau = \inf(n \in \mathbb{N} | \{S_1 > 0, \dots, S_{n-1} > 0, S_n = 0\} \cup \{S_n < 0\})$. Тогда $\{(S_{n \wedge \tau}, \mathcal{F}_n)\}_{n=0}^\infty$ — также мартингал [19, с. 510], при этом нетрудно увидеть, что $\|S_{1 \wedge \tau}\|_1 = \dots = \|S_{k \wedge \tau}\|_1 = \dots = \varepsilon < L$, т.е. $X = \{(S_{n \wedge \tau}, \mathcal{F}_n)\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{M}_1(L)$.

Заметим, что $\{S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 0\} = \{k_\varepsilon X = 2n\}$ и $k_\varepsilon X$ не может равняться нечетным числам в силу построения марковского момента τ . Но

$$P(S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 0) = \frac{C_{2(n-1)}^{n-1}}{2^{2(n-1)}} \cdot \frac{1}{4n}$$

[19, с. 107–108], и поэтому, используя формулу Стирлинга для представления факториалов, получаем

$$\begin{aligned} M(k_\varepsilon X)^{1/2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/2} P(k_\varepsilon X = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/2} \cdot \frac{1}{4n} \cdot \frac{C_{2(n-1)}^{n-1}}{2^{2(n-1)}} \sim \frac{1}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n^{1/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty. \end{aligned}$$

Аналогично строится мартингал из $\mathcal{M}_1(L)$ для случая $\varepsilon > L$, с одним отличием, что берутся независимые испытания $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ такие, что $\{\xi_i = \pm\varepsilon\} \subseteq A$, $P(A) = L/\varepsilon$, $P(\xi_i = \pm\varepsilon) = L/(2\varepsilon)$, $\{\xi_i = 0\} = \Omega \setminus A$.

2) Пусть $X = \{(X_i, \mathcal{F}_i)\}_{i=1}^\infty \in \mathcal{M}_p(L)$, $p \in (1, \infty)$, тогда в силу построения марковских моментов τ_j в теореме 28 [18] получаем

$$k_\varepsilon X \cdot \frac{\varepsilon^2}{4} \leq \sum_{j=1}^{\infty} (X_{\tau_j} - X_{\tau_{j-1}})^2.$$

Таким образом, из доказанного в [18] следует

$$\mathbb{M}(k_\varepsilon X)^{p/2} \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \left(\frac{36p^{3/2}}{p-1} \right)^p \left(\frac{p}{p-1} \right)^p L^p = \frac{C_p L^p}{\varepsilon^p}.$$

3) Пусть $\{(X_i, \mathcal{F}_i)\}_{i=1}^\infty \in \mathcal{M}_\infty(L)$. Нетрудно убедиться, что для натуральных n

$$k_\varepsilon \{X_i\}_{i=1}^\infty = k_\varepsilon \{X_i\}_{i=1}^n + k_\varepsilon \{X_i\}_{i=n}^\infty + \sigma_\varepsilon^n \{X_i\}_{i=1}^\infty,$$

где $\sigma_\varepsilon^n \{X_i\}_{i=1}^\infty$ равняется 0 или 1 в зависимости от того обрывается ли некоторая ε -флуктуация номером n . Обозначим

$$k_\varepsilon^n = k_\varepsilon \{X_i\}_{i=1}^n, \quad \bar{k}_\varepsilon^n = k_\varepsilon \{X_i\}_{i=n}^\infty, \quad \sigma_\varepsilon^n = \sigma_\varepsilon^n \{X_i\}_{i=1}^\infty, \quad k_\varepsilon = k_\varepsilon \{X_i\}_{i=1}^\infty.$$

Заметим, что k_ε^n $\mathcal{F}_n$ -измерима, поэтому можно записать

$$\begin{aligned} & |\mathbb{M}(|k_\varepsilon - \mathbb{M}(k_\varepsilon | \mathcal{F}_n)| | \mathcal{F}_n)| \\ &= |\mathbb{M}(|k_\varepsilon^n - \mathbb{M}(k_\varepsilon^n | \mathcal{F}_n) + \bar{k}_\varepsilon^n - \mathbb{M}(\bar{k}_\varepsilon^n | \mathcal{F}_n) + \sigma_\varepsilon^n - \mathbb{M}(\sigma_\varepsilon^n | \mathcal{F}_n)| | \mathcal{F}_n)| \\ &\leq |\mathbb{M}(|\bar{k}_\varepsilon^n - \mathbb{M}(\bar{k}_\varepsilon^n | \mathcal{F}_n)| | \mathcal{F}_n)| + |\mathbb{M}(|\sigma_\varepsilon^n - \mathbb{M}(\sigma_\varepsilon^n | \mathcal{F}_n)| | \mathcal{F}_n)| \\ &\leq 2\mathbb{M}(|\bar{k}_\varepsilon^n| | \mathcal{F}_n) + 2\mathbb{M}(|\sigma_\varepsilon^n| | \mathcal{F}_n) \leq 2\mathbb{M}(|\bar{k}_\varepsilon^n| | \mathcal{F}_n) + 2. \end{aligned}$$

Для любого $A \in \mathcal{F}_n$ можно определить

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= A, \quad \tilde{\mathcal{F}} = \{B \in \mathcal{F} : B \subseteq A\}, \quad \tilde{\mathcal{F}}_{n+m} = \{B \in \mathcal{F}_{n+m} : B \subseteq A\}, \\ \tilde{\mathbb{P}} &= \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P}(A)} \quad (\mathbb{P}(A) \neq 0), \quad \tilde{X}_{n+m} = X_{n+m}|_A, \end{aligned}$$

тогда $\{(\tilde{X}_{n+m}, \tilde{\mathcal{F}}_{n+m})\}_{m=0}^\infty$ — мартингал, заданный на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$. Таким образом, следуя доказанному выше в пункте 2) теоремы, получаем для любого $A \in \mathcal{F}_n$

$$\frac{1}{\mathbb{P}(A)} \int_A \mathbb{M}(|\bar{k}_\varepsilon^n| | \mathcal{F}_n) d\mathbb{P} = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \int_A |\bar{k}_\varepsilon^n| d\mathbb{P} \leq \frac{C_2 L^2}{\varepsilon^2}.$$

Поэтому

$$\mathbb{M}(|k_\varepsilon^n| | \mathcal{F}_n) \leq \frac{C_2 L^2}{\varepsilon^2},$$

что и приводит к полному доказательству теоремы 34.

В следующей теореме показывается, что оценки сверху $\mathbb{P}(F_{k,\varepsilon} \{X_i\}_{i=1}^\infty)$ теоремы 28 точны по порядку.

ТЕОРЕМА 35.

- 1) $\sup_{X \in \mathcal{M}_p(1)} \mathbf{P}(F_{k,\varepsilon} \{X_i\}_{i=1}^\infty) \geq \min\left(\frac{1}{2k^{p/2}\varepsilon^p(p/2+1)^{p/2}}, 1\right), \text{ если } 1 \leq p < \infty;$
- 2) $\sup_{X \in \mathcal{M}_\infty(1)} \mathbf{P}(F_{k,\varepsilon} \{X_i\}_{i=1}^\infty) \geq C \cdot e^{-Dk\varepsilon^2}, \quad \varepsilon < \frac{1}{8}, \quad C > 0, \quad D > 0.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) На отрезке $[0, 1]$ рассмотрим функцию

$$r_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0, 1/2), \\ -1 & \text{при } x \in [1/2, 1), \end{cases}$$

тогда $r_n(x) = r_0(2^n x)$ для натуральных n (функция Радемахера). Определим число

$$m = \left\lceil \log_2^+ \left(\left(\frac{p}{2} + 1 \right)^{p/2} (k\varepsilon^2)^{p/2} \right) \right\rceil + \text{sign} \left(\log_2^+ \left(\left(\frac{p}{2} + 1 \right)^{p/2} (k\varepsilon^2)^{p/2} \right) \right),$$

$k \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, p \in [1, \infty)$. Последовательность $\{X_n\}_{n=0}^k$ такая, что $X_0(x) \equiv 0$,

$$X_n(x) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{n-1} \varepsilon r_{l+m}(x), & \text{если } x \in [0, \frac{1}{2^m}) \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

является мартингалом, связанным с фильтрацией

$$\mathcal{F}_n = \left\{ \left[\frac{i}{2^{n+m}}, \frac{i+1}{2^{n+m}} \right), i \in \overline{0, 2^{n+m}-1} \right\}.$$

Для этого мартингала имеем

$$\mathbf{P}(F_{k,\varepsilon} \{X_n\}_{n=0}^k) = \frac{1}{2^m} \geq \min\left(\frac{1}{2k^{p/2}\varepsilon^p(p/2+1)^{p/2}}, 1\right)$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^1 |X_n|^p dx &= \int_0^{1/2^m} \left| \sum_{l=0}^{n-1} \varepsilon r_{l+m}(x) \right|^p dx \\ &= \frac{1}{2^m} \int_0^1 \left| \sum_{l=0}^{n-1} \varepsilon r_l(x) \right|^p dx \leq \frac{1}{2^m} \left(\frac{p}{2} + 1 \right)^{p/2} (n\varepsilon^2)^{p/2}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство доказано в [5, с. 168]. Таким образом,

$$\max_{0 \leq n \leq k} \int_0^1 |X_n|^p dx \leq \frac{1}{2^m} \left(\frac{p}{2} + 1 \right)^{p/2} (k\varepsilon^2)^{p/2} \leq 1,$$

т.е. мы получили мартингал X , принадлежащий $\mathcal{M}_p(1)$, для которого

$$P(F_{k,\varepsilon}\{X_i\}_{i=1}^\infty) \geq \min\left(\frac{1}{2k^{p/2}\varepsilon^p(p/2+1)^{p/2}}, 1\right).$$

2) Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и $P(\xi_i = \pm\varepsilon) = 1/2$, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\varepsilon < 1/8$. Определим марковский момент $\tau(\omega) = \inf\{j : |S_j| \geq L\}$; тогда $X = (S_{n \wedge \tau}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$, где $S_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ — мартингал. Если же $L = \max\{x \in \mathbb{R}^+ : x \leq 1, x = 2n\varepsilon, n \in \mathbb{N}\}$, то $|S_{n \wedge \tau}| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$. При этом обозначим n_0 — натуральное число, для которого $L = 2n_0\varepsilon$. Определим также число $l = \min\{j : j \geq k, j = m[\frac{1}{4\varepsilon^2}]\}$, и пусть натуральное m_0 таково, что $l = m_0[\frac{1}{4\varepsilon^2}]$.

Обозначим

$$A_i = \left\{ |S_j| \leq L \forall j \in \overline{(i-1)[\frac{1}{4\varepsilon^2}], \dots, i[\frac{1}{4\varepsilon^2}]}, |S_{i[\frac{1}{4\varepsilon^2}]}| \leq \frac{L}{2} \right\},$$

тогда

$$\begin{aligned} P\left(\max_{1 \leq j \leq k} |S_j| \leq L\right) &\geq P(A_1 \dots A_{m_0}) \\ &= P(A_{m_0} | A_1 \dots A_{m_0-1}) P(A_{m_0-1} | A_1 \dots A_{m_0-2}) \dots P(A_1). \end{aligned}$$

Для любого $r \in \overline{1, m_0}$ имеем

$$P(A_r | A_1 \dots A_{r-1}) \geq \min_{-n_0 \leq j \leq n_0} P(B_{jr}),$$

где

$$B_{jr} = B_j = \left\{ \max_{1 \leq i \leq [\frac{1}{4\varepsilon^2}]} |j\varepsilon + S_i| \leq L, |S_{[\frac{1}{4\varepsilon^2}]}| \leq \frac{L}{2} \right\}.$$

Пусть

$$C_j = \left\{ \max_{1 \leq i \leq [\frac{1}{4\varepsilon^2}]} |j\varepsilon + S_i| \leq L \right\},$$

тогда $P(B_j) \geq \frac{1}{2}P(C_j)$. Это неравенство следует из того, что $C_j = B_j \cup (C_j \setminus B_j)$ и каждому событию из $C_j \setminus B_j$ можно однозначно сопоставить событие из B_j следующим образом: если имеем событие $(j\varepsilon + S_1^0, j\varepsilon + S_2^0, \dots, j\varepsilon + S_{[\frac{1}{4\varepsilon^2}]}^0)$ из C_j , то до последнего номера i_0 такого, что $|j\varepsilon + S_{i_0}| = L$, оставляем те же значения, т.е. $S'_1 = j\varepsilon + S_1^0, \dots, S'_{i_0} = j\varepsilon + S_{i_0}^0$, а для $i \in (i_0, [\frac{1}{4\varepsilon^2}]]$ полагаем

$$S'_i = \begin{cases} L - (j\varepsilon + S_{i_0}), & \text{если } j\varepsilon + S_{i_0} = L; \\ -L - (j\varepsilon + S_{i_0}), & \text{если } j\varepsilon + S_{i_0} = -L. \end{cases}$$

Из неравенства Дуба [19, с. 526–529] получаем для $j \in \overline{-n_0, n_0}$

$$\begin{aligned} P(\Omega \setminus C_j) &= P\left(\max_{1 \leq i \leq [\frac{1}{4\varepsilon^2}]} |j\varepsilon + S_i| \geq L\right) \\ &\leq \frac{1}{L^2} M|j\varepsilon + S_{[\frac{1}{4\varepsilon^2}]}|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{L^2} M|S_{[\frac{1}{4\varepsilon^2}]}|^2 = \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^2}{L^2} \left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right]. \end{aligned}$$

Вследствие того, что $\varepsilon < 1/8$, получаем $L > 1 - 1/4$, поэтому

$$\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^2}{L^2} \left[\frac{1}{4\varepsilon^2} \right] \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4L^2} + \frac{\varepsilon^2}{L^2} < \frac{13}{18}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(B_j) \geq \frac{1}{2} \mathbf{P}(C_j) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathbf{P}(\Omega \setminus C_j) > \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{13}{18} \right) \geq \frac{5}{36},$$

т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq j \leq k} |S_j| \leq L\right) &> \left(\frac{5}{36}\right)^{m_0} = \left(\frac{5}{36}\right)^{l/[\frac{1}{4\varepsilon^2}]} \\ &\geq \frac{5}{36} \cdot \left(\frac{5}{36}\right)^{k/[\frac{1}{4\varepsilon^2}]} \\ &\geq \frac{5}{36} \cdot \left(\frac{5}{36}\right)^{8k\varepsilon^2} = Ce^{-Dk\varepsilon^2}, \quad C = \frac{5}{36}, \quad D = 8 \ln \frac{5}{36}. \end{aligned}$$

Так как

$$F_{k,\varepsilon}\{S_{n \wedge \tau}\}_{n=1}^\infty = \left\{ \max_{1 \leq j \leq k} |S_j| \leq L \right\},$$

то тем самым теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. 1. Харьков: Вища школа, 1977.
- [2] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
- [3] Беляев Ю. К. Один пример процесса с перемешиванием // Теория вероятн. и ее примен. 1961. Т. 6. № 1. С. 101–103.
- [4] Гапошкин В. Ф. О зависимости скорости сходимости в усиленном законе больших чисел для стационарных процессов от скорости убывания корреляционной функции // Теория вероятн. и ее примен. 1981. Т. 26. № 4. С. 720–733.
- [5] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
- [6] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
- [7] Иванов В. В. Колебания средних в эргодической теореме // ДАН. 1996. Т. 347. № 6. С. 736–738.
- [8] Качуровский А. Г. Ограниченность флуктуаций средних в эргодической теореме Биркгофа-Хинчина // ДАН СССР. 1990. Т. 315. № 3. С. 530–532.
- [9] Качуровский А. Г. Флуктуационная эргодическая теорема // ДАН СССР. 1991. Т. 317. № 4. С. 823–826.
- [10] Качуровский А. Г. Флуктуации средних в усиленном законе больших чисел // Матем. заметки. 1991. Т. 50. № 5. С. 151–153.
- [11] Качуровский А. Г. Флуктуации средних в эргодической теореме Биркгофа-Хинчина // Труды Ин-та математики СО АН СССР. 1992. Т. 21. С. 52–86; (Англ. пер., испр. и доп.: Kachurovskii A. G. Fluctuations of means in the Birkhoff–Khinchin ergodic theorem // Siberian Adv. Math. 1993. V. 3, № 2. P. 103–144).
- [12] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

- [13] Леонов В. П. О дисперсии временных средних стационарного случайного процесса // Теория вероятн. и ее примен. 1961. Т. 6. № 1. С. 93–101.
- [14] Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
- [15] Петров В. В. Об усиленном законе больших чисел для стационарной последовательности // ДАН СССР. 1973. Т. 213. № 1. С. 42–44.
- [16] Рохлин В. А. Избранные вопросы метрической теории динамических систем // УМН. 1949. Т. 4. № 2. С. 57–128.
- [17] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1–2. М.: Мир, 1967.
- [18] Чашка А. А. Флуктуации в мартингалах // УМН. 1994. Т. 49. № 2. С. 179–180.
- [19] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
- [20] Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1–2. М.: Мир, 1985.
- [21] Baum L. E., Katz M., Read R. R. Exponential convergence rates for the law of large numbers // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 102. № 2. P. 187–199.
- [22] Baum L. E., Katz M. Convergence rates in the law of large numbers // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 120. № 1. P. 108–123.
- [23] Bingham N. H. Variants on the law of the iterated logarithm // Bull. London Math. Soc. 1986. V. 18. P. 433–467.
- [24] Bishop E. An upcrossing inequality with applications // Michigan Math. J. 1966. V. 13. P. 1–13.
- [25] Bishop E. A constructive ergodic theorem // J. Math. Mech. 1968. V. 17. P. 631–639.
- [26] De la Torre A. The square function for $L_1 - L_\infty$ contractions // Proc. Sympos. Pure Math. V. 35. Part 2. P. 435–438.
- [27] Halasz G. Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem // Acta Math. Hung. 1976. V. 28. № 3–4. P. 389–395.
- [28] Jerison M. Martingale formulation of ergodic theorems // Proc. Amer. Math. Soc. 1959. V. 10. № 4. P. 531–539.
- [29] Jones R. L. Inequalities for the ergodic maximal function // Stud. Math. 1977. V. 60. № 2. P. 111–129.
- [30] Krengel U. On the speed of convergence in the ergodic theorem // Monatsh. Math. 1978. V. 86. № 1. P. 3–6.
- [31] Krengel U. Ergodic Theorems. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1985.
- [32] Nagaev S. V. Large deviations of sums of independent random variables // Ann. Probab. 1979. V. 7. № 5. P. 745–789.
- [33] Nelson E. Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. № 6. P. 1165–1198.
- [34] Nelson E. Radically Elementary Probability Theory. Princeton: Princeton Univ. Press, 1987.
- [35] von Neumann J. Proof of the quasi-ergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1932. V. 18. № 1. P. 70–82.
- [36] von Neumann J. Physical applications of the ergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1932. V. 18. № 3. P. 263–266.
- [37] O'Brien G. L. Obtaining prescribed rates of convergence for the ergodic theorem // Canad. J. Math. 1983. V. 35. № 6. P. 1129–1146.
- [38] Peligrad M. Convergence rates of the strong law for stationary mixing sequences // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. 1985. V. 70. № 2. P. 307–314.
- [39] Renyi A. On stable sequences of events // Sankhyā. Ser. A. 1963. V. 25. P. 293–302.
- [40] Robinson E. A. Sums of stationary random variables // Proc. Amer. Math. Soc. 1960. V. 11. № 1. P. 77–79.
- [41] Serfling R. J. Convergence properties of S_n under moment restrictions // Ann. Math. Statist. 1970. V. 41. № 4. P. 1235–1248.
- [42] Shao Q.-M. Almost sure invariance principles for mixing sequences of random variables // Stoch. Process. Appl. 1993. V. 48. P. 319–334.

- [43] Smeltzer M. D. Subadditive stochastic processes // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. P. 1054–1055.
- [44] Utev S. A. Sums of random variables with φ -mixing // Siberian Adv. Math. 1991. V. 1. № 3. P. 124–155.
- [45] Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod 1 // Math. Ann. 1916. V. 77. P. 313–352.
- [46] Yoshimoto T. Some inequalities for ergodic power functions // Acta Math. Hung. 1980. V. 36. № 1–2. P. 1–5.

Институт математики СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: `agk@math.nsk.su`

Поступила в редакцию
15.01.1996