Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Соловьев, Программные алгебры рекурсивных функций, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 4, 125–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm996>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:49:59

УДК 519.716

ПРОГРАММНЫЕ АЛГЕБРЫ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

В. Д. СОЛОВЬЕВ

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	125
2. Полнота	130
3. Максимальные подалгебры	133
4. Модификации проблемы полноты	134
5. Структура подалгебр	136
6. Конгруэнция и автоморфизмы	139
7. Абстрактная вычислимость в алгебраических системах	140
Список литературы	142

1. Введение

В статье дается краткий обзор результатов по программным алгебрам рекурсивных функций. Под программной алгеброй понимается множество рекурсивных функций и предикатов вместе с некоторым классом схем программ в качестве операторов замыкания, действующих на этом множестве.

Алгебры рекурсивных функций можно трактовать так же, как функциональные системы в смысле [16]. Функциональная система это пара $\langle \mathcal{F}, \mathfrak{A} \rangle$, где $\mathcal{F}$ — множество функций, $\mathfrak{A}$ — множество операторов замыкания на $\mathcal{F}$. К наиболее изученным функциональным системам относятся: двузначная логика [42], k -значная логика [31], автоматные функции [16].

Основные вопросы, изучаемые для функциональных систем, — проблема полноты; проблема выразимости; описание замкнутых классов (подалгебр), в первую очередь предполных (в алгебраической терминологии — максимальных подалгебр); описание автоморфизмов и конгруэнций.

Можно выделить три типа функциональных систем рекурсивных функций:

- только с операцией суперпозиции в качестве средств замыкания [17],

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-011-16004).

- алгебры Робинсон [14] с алгебраическими средствами замыкания такими, как $+$, -1 ,
- с программными средствами замыкания.

В качестве программных средств замыкания рассматривались различные классы схем программ: стандартные, со счетчиками, с массивами и ряд других. Исследования программных алгебр рекурсивных функций естественно продолжают работы по алгебрам Робинсон, которые велись в 50–70 годах.

В этих исследованиях используется широкий спектр методов математической логики, теории алгоритмов, алгебры и математической кибернетики. Представляется интересным, что для описания подалгебр программных алгебр рекурсивных функций адекватным оказался язык теории категорий, а их свойства зависят от некоторых тонких результатов по группам Бернсайда. Изучение программных алгебр рекурсивных функций представляет интерес для обобщенной теории вычислимости, позволяя решить ряд проблем вычислимости в алгебраических системах, в частности, в полях.

Приведем основные определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Схема программ с массивами и равенством* – это конечный ориентированный граф, все вершины которого помечены инструкциями. Инструкции могут иметь следующий вид:

- а) старт $(x_1, \dots, x_n)$,
- б) $y := f(x_1, \dots, x_m)$,
- в) $y := x$,
- г) $x = y$,
- д) $p(x_1, \dots, x_m)$,
- е) $i := i + 1$,
- ж) $i := 0$,
- з) $i = j$,
- и) $M[i] := x$,
- к) $x := M[i]$,
- л) стоп (x) ,
- м) стоп (TRUE),
- н) стоп (FALSE).

Если вершина помечена инструкцией вида а), то в эту вершину никакая дуга не входит, и из нее ровно одна выходит; если инструкцией вида л), м), н), то в нее может входить несколько дуг, но из нее ни одна не выходит; если инструкцией вида г), д), з), то в такую вершину может входить несколько дуг, а выходят из нее ровно две дуги, причем одна помечена меткой TRUE, а другая меткой FALSE. Наконец, во всех остальных случаях входящих дуг может быть несколько, а выходящих ровно одна. Вершина с инструкцией вида а) должна быть единственной; в графе должна быть хотя бы одна вершина с инструкцией вида л), м) или н), причем, если присутствует вершина с инструкцией л), то не может быть вершин с инструкциями м), н).

Все переменные в инструкциях разделяются на два класса: предметные – $x, y, \dots$, и счетчики – $i, j, \dots$. И те, и другие принимают значения из множества натуральных

чисел $\mathbb{N}$, но играют разную роль в схемах программ и не могут обмениваться значениями.

Буква M обозначает бесконечный массив, состоящий из элементов $M[0], M[1], \dots$; f, p – функциональный и предикатный символы, соответственно. Предметные переменные $x_1, \dots, x_n$ в инструкции старт $(x_1, \dots, x_n)$ являются входными, а переменная x в инструкции стоп (x) – выходной.

Определение 1 является стандартным в теории схем программ [15], [38] с той разницей, что введены операторы стоп (TRUE) и стоп (FALSE), позволяющие непосредственным образом определить вычислимость предикатов, а не только функций, и что разрешается использование предиката равенства для предметных переменных (инструкция г)).

Класс схем программ из определения 1 обозначим $FDA_{=}$ (аналогично [39]).

При подстановке в схему программ вместо функциональных и предикатных символов каких-либо конкретных рекурсивных функций и предикатов (скажем, из множества $\mathcal{L}$), получается интерпретированная (в $\mathcal{L}$) схема программ – конкретная программа.

Опишем семантику, т.е. способ выполнения программы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Полной памятью программы* $ST = ST_r \cup ST_c$ будем называть множество всех ее предметных переменных вместе со всеми ячейками массивов (ST_r) и множество всех ее счетчиков (ST_c). *Оценкой* назовем функцию $Val = Val_r \cup Val_c$, где $Val_r: ST_r \rightarrow \mathbb{N}$ и $Val_c: ST_c \rightarrow \mathbb{N}$. Перед началом выполнения программы функция Val нигде не определена.

Состоянием выполнения программы называется пара $u = (l, Val)$, где l – вершина графа, Val – оценка. Выполнение программы описывается конечной или бесконечной последовательностью состояний $u_0, u_1, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots$.

Пусть $u_i = (l_i, Val_i)$ и Инс – инструкция программы в вершине l_i .

а) Если Инс имеет вид старт $(x_1, \dots, x_n)$ (это имеет место при $i = 0$) и выходящая из вершины l_i дуга ведет к вершине k , то $u_{i+1} = (k, Val_{i+1})$, причем Val_{i+1} отличается от $Val_i (= Val_0$ – нигде не определенная функция) только на переменных $x_1, \dots, x_n$ и $\forall j \leq n$ ($Val_{i+1}(x_j) =$ вводимое значение переменной x_j).

б) Если Инс имеет вид стоп(x), стоп(TRUE) или стоп(FALSE), то последовательность состояний конечна – программа останавливается с результатом $Val_i(x)$, TRUE или FALSE, соответственно.

в) Если Инс имеет вид $x := f_j(x_1, \dots, x_m)$ или $x := y$, а выходящая из вершины l_i дуга ведет к вершине k , то $u_{i+1} = (k, Val_{i+1})$, причем Val_{i+1} отличается от Val_i только в точке x и $Val_{i+1}(x) = f(Val_i(x_1), \dots, Val_i(x_m))$ или $Val_i(y)$, соответственно.

г) Пусть Инс имеет вид $p(x_1, \dots, x_m)$ или $x = y$. Если $p(Val_i(x_1), \dots, Val_i(x_m)) = \text{TRUE}$ или $Val_i(x) = Val_i(y)$, соответственно, и выходящая из l_i дуга с меткой TRUE ведет к вершине k_1 , то $u_{i+1} = (k_1, Val_{i+1})$, где $Val_{i+1} = Val_i$. Если же $p(Val_i(x_1), \dots, Val_i(x_m)) = \text{FALSE}$ или $Val_i(x) \neq Val_i(y)$, соответственно, и выходящая из l_i дуга с меткой FALSE ведет к вершине k_2 , то $u_{i+1} = (k_2, Val_{i+1})$, где $Val_{i+1} = Val_i$.

д) Если Инс имеет вид $M[j] := x$ и выходящая из l_i дуга ведет к вершине k , то

$u_{i+1} = (k, \text{Val}_{i+1})$, причем $\text{Val}_{i+1}(M[\text{Val}_i(j)]) = \text{Val}_i(x)$, а в остальных точках Val_{i+1} совпадает с Val_i .

е) Если Инс имеет вид $x := M[j]$ и выходящая из l_i дуга ведет к вершине k , то $u_{i+1} = (k, \text{Val}_{i+1})$, причем $\text{Val}_{i+1}(x) = \text{Val}_i(M[\text{Val}_i(j)])$, а в остальных точках Val_{i+1} совпадает с Val_i .

ж) Если Инс имеет вид $j := j+1$ или $j := 0$ и выходящая из l_i дуга ведет к вершине k , то $u_{i+1} = (k, \text{Val}_{i+1})$, причем $\text{Val}_{i+1}(j) = \text{Val}_i(j) + 1$ и $\text{Val}_{i+1}(j) = 0$, соответственно, а в остальных точках Val_{i+1} совпадает с Val_i .

з) Пусть Инс имеет вид $j_1 = j_2$. Если $\text{Val}_i(j_1) = \text{Val}_i(j_2)$ и выходящая из l_i дуга с меткой TRUE ведет к вершине k_1 , то $u_{i+1} = (k_1, \text{Val}_{i+1})$, причем, $\text{Val}_{i+1} = \text{Val}_i$. Если же $\text{Val}_i(j_1) \neq \text{Val}_i(j_2)$ и выходящая из l_i дуга с меткой FALSE ведет к вершине k_2 , то $u_{i+1} = (k_2, \text{Val}_{i+1})$, причем $\text{Val}_{i+1} = \text{Val}_i$.

Если при вычислении Val_{i+1} используемое значение Val_i неопределено, то Val_{i+1} тоже неопределено. В пункте в), если функция f неопределена, то $\text{Val}_{i+1}(x)$ неопределено. В пункте г), если предикат p неопределен или равенство $\text{Val}_i(x) = \text{Val}_i(y)$ принимает неопределенное значение в силу неопределенности значений переменных x и y , то выполнение программы на этом прерывается (последовательность состояний конечна) с неопределенным результатом.

Перечислим ряд определений классов схем программ, получающихся из определения 1 простыми изменениями.

Если в определении 1 опустить инструкции вида и) и к), то получится определение схем программ со счетчиками – FDC.

Если, кроме того, убрать и инструкции е), ж), з), то получится определение стандартных схем программ – FD₌.

Если во всех перечисленных определениях опустить инструкцию г), то соответствующие классы обозначаются FDA, FDC, FD.

Если в определении FD (FD₌) добавить инструкции push(x), $x := \text{pop}$ для работы с магазином (одним), то получающийся класс обозначается FDS (FDS₌).

Если в определении FD (FDS) допускается использование лишь одной единственной предметной переменной x , то получающийся класс обозначается FD(1) (FDS(1)).

Если к FDA₌ добавить инструкцию $x := M[y]$, т.е. разрешить использовать предметные переменные в качестве счетчиков, то получается класс схем программ с косвенной адресацией, который будет обозначаться FDAA₌.

Класс FDS, как известно [15], эквивалентен рекурсивным программам. FD(1) – это класс схем Янова [32]. Класс FDS(1), изучавшийся в [47], эквивалентен системам алгоритмических алгебр Глушкова [2]. Класс FDAA₌ по существу есть класс РАМ-машин [33].

Для любого множества рекурсивных функций и предикатов D каждый из классов схем программ определяет совокупность операторов замыкания на D следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть S – произвольная схема программ из класса K и $\mathcal{L}$ – упорядоченный набор рекурсивных функций и предикатов, элементы которого определенным образом подставляются вместо функциональных и предикатных символов в S . Если при этом вычисляется некоторая функция f (или предикат p) из D , то говорят,

что схема S преобразует набор $\mathcal{L}$ в f (в p) и тем самым определяет оператор замыкания на D .

Обозначим через $[\mathfrak{N}]_K^D$ замыкание в D множества $\mathfrak{N}$ рекурсивных функций и предикатов относительно класса схем программ K , т.е. множество всех функций и предикатов из D , вычислимых схемами программ из K , интерпретированными в $\mathfrak{N}$. Если понятно о каких D и K идет речь, то они могут опускаться.

Пара $\langle D, K \rangle$ будет называться *программной алгеброй* рекурсивных функций и предикатов с множеством схем программ K в качестве операторов замыкания.

Если класс K схем программ фиксирован или несущественно, о каких K идет речь, и не может возникнуть недоразумений, то упоминание о нем будет опускаться, а алгеброй будет называться также и просто множество функций и предикатов (замкнутое относительно K).

Подмножество $\mathfrak{N}$ множества D называется *подалгеброй*, если оно замкнуто относительно K , т.е. $\mathfrak{N} = [\mathfrak{N}]_K^D$. Подалгебра является конечно-порожденной, если $\mathfrak{N} = [\mathcal{L}]_K^D$ для некоторого конечного $\mathcal{L}$. Наконец, множество $\mathfrak{N}$ называется *системой образующих* или *полным* (в D), если $[\mathfrak{N}]_K^D = D$.

Одной из основных трудностей при изучении программных алгебр рекурсивных функций является многочисленность алгебр с существенно различными свойствами и требующих различных методов для их изучения. В работах по программным алгебрам основное внимание было уделено алгебре одноместных общерекурсивных функций с операторами замыкания $FDA_{=}$ и алгебре одноместных частично рекурсивных функций с операторами замыкания $FDS(1)$, которые можно рассматривать как модельные.

Далее будут использоваться следующие обозначения: $o(x) = 0$, $s(x) = x + 1$, $s^-(x) = x - 1$, $\text{id}(x) = x$ (для функций), $P_0(x) \Leftrightarrow x = 0$ (для предиката) и $\mathbb{N}$ — для множества натуральных чисел, включая 0. Запись $f(x)!$ для частичной функции f означает, что f в точке x определена.

$\langle A, \mathcal{L} \rangle$ обозначает алгебраическую систему с основным множеством A и сигнатурой $\mathcal{L} = \langle f_1, \dots, f_n, p_1, \dots, p_m \rangle$, состоящей из функций $f_1, \dots, f_n$ и предикатов $p_1, \dots, p_m$.

Множество одноместных частично (обще-) рекурсивных функций и предикатов будем обозначать $\mathcal{F}_r^1(\mathcal{F}_0^1)$, $\mathcal{F}_r(\mathcal{F}_0)$, соответственно. Аналогичны обозначения для множеств предикатов: $\mathcal{P}_r^1, \mathcal{P}_0^1, \mathcal{P}_r, \mathcal{P}_0$.

Следующие обозначения соответствуют [21]:

$\pi(x, y)$ — общерекурсивная функция, нумерующая пары натуральных чисел,

$D_0, D_1, \dots$ — эффективная нумерация конечных множеств,

$W_0, W_1, \dots$ — эффективная нумерация рекурсивно перечислимых множеств,

$\varphi_0, \varphi_1, \dots$ — эффективная нумерация частично рекурсивных функций,

$\psi_0, \psi_1, \dots$ — эффективная нумерация частично рекурсивных предикатов.

Необходимые для понимания статьи определения и результаты по теории рекурсивных функций могут быть найдены в [21].

2. Полнота

Первыми работами по программным алгебрам рекурсивных функций можно считать работы [10], [46], где были приведены первые простые примеры полных наборов такие, как $\{o, s, =\}$ и $\{s, s^-, P_0\}$. Указанные наборы являются полными в множестве всех частично рекурсивных функций и предикатов при использовании в качестве средств замыкания класса FD стандартных схем программ или более сильных программных формализмов.

Иным оказывается положение дел в алгебрах с классами FD(1) и FDS(1) в качестве средств замыкания. Указанные выше наборы уже не будут там полными. Пример полного набора для FD(1) (и для FDS(1)) предложен М. Минским [18] – это $\{2x, 3x, 2^x, [x/6], [\log_2 x], x = 0 \pmod{6}\}$. Из одного результата Я. Барздиня [1] следует, что без операций 2^x и $[\log_2 x]$ свойство полноты теряется.

В [12] поставлена проблема полноты как проблема нахождения общего критерия полноты произвольной системы рекурсивных функций и предикатов, без уточнения средств замыкания, для которых эта проблема должна быть решена. Такой критерий не может быть эффективным – в [13] для граф-схем с памятью (по существу эквивалентных стандартным схемам программ) показано, что проблема полноты алгоритмически неразрешима. В [26] этот результат уточнен определением степени алгоритмической неразрешимости (T -степени, [21]) проблемы полноты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Множество

$$I_{\langle D, K \rangle} = \{ \pi(x, y) \mid \exists i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m (D_x = \{i_1, \dots, i_n\} \& D_y = \{j_1, \dots, j_m\} \& \mathcal{L} = \langle \varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_n}, \psi_{j_1}, \dots, \psi_{j_m} \rangle \text{ полон в алгебре } \langle D, K \rangle \& \mathcal{L} \subseteq D) \}$$

называется *индексным множеством проблемы полноты алгебры* $\langle D, K \rangle$.

ТЕОРЕМА 1. T -степень множества $I_{\langle \mathcal{F}_0, \text{FDA}=\rangle}$ есть $0''$.

ТЕОРЕМА 2. Множество $I_{\langle \mathcal{F}_0, \text{FDA}=\rangle}$ принадлежит уровню $(\Sigma_3 \cap \Pi_3) \setminus (\Sigma_2 \cup \Pi_2)$ иерархии Клини–Мостовского.

ТЕОРЕМА 3. Множество $I_{\langle \mathcal{F}_0, \text{FDA}=\rangle}$ является Π_2 -полным.

ТЕОРЕМА 4. [8]. T -степень множества $I_{\langle \mathcal{F}_r^1, \text{FDS}(1) \rangle}$ есть $0'''$.

В работе [8] также определены степени неразрешимости проблемы полноты для ряда алгебр Робинсон – для разных алгебр это степени $0''$, $0'''0^{\text{iv}}$ или 0^{iv} . В [19] В. Непомнящий сформулировал программу сравнения различных классов схем программ по сложности решения проблемы полноты для соответствующих алгебр. Результаты и методы, развитые в [8], [26], дают одно из возможных решений поставленной задачи.

После установления отсутствия эффективного критерия, поиск решения проблемы полноты был предложен в трех направлениях: 1) нахождение критерия полноты, сформулированного на логическом языке в терминах функциональных свойств функций и предикатов, входящих в заданную систему, 2) описание всех максимальных подалгебр (что позволяет описать полные системы, по аналогии с постовским критерием полноты для двузначных логик, как не содержащиеся ни в одной максимальной подалгебре), 3) модификация проблемы полноты.

В рамках первого направления [19] В. Непомнящим изучалась алгебра с операторами замыкания из класса $\text{FD}_=$ и дополнительной операцией $x := 0$. Для наборов, состоящих из одной функции, получен критерий полноты следующего вида:

ТЕОРЕМА 5. *Набор $\{f\}$ полон тогда и только тогда, когда*

$$\{0, f(0), \dots, f^n(0), \dots\} = \mathbb{N}.$$

Следующим шагом в этом направлении явился критерий полноты произвольной конечной системы для алгебры $\langle \mathcal{F}_0, \text{FDA}_= \rangle$ [23]. Его можно рассматривать как обобщение критерия В. Непомнящего.

ТЕОРЕМА 6 (критерий полноты для $\langle \mathcal{F}_0, \text{FDA}_= \rangle$). *Набор общерекурсивных функций и предикатов $\mathcal{L} = \langle f_1, \dots, f_n, p_1, \dots, p_m \rangle$ полон тогда и только тогда, когда*

- 1) $\forall x, y \exists \tau$ (τ – терм сигнатуры $\mathcal{L}$ & $\tau(x) = y$),
- 2) $\exists a \exists \Phi$ ($\Phi(x)$ – бескванторная формула сигнатуры $\mathcal{L} \cup \{=\}$ & $\Phi(a)$ & $\forall y \neq a \neg \Phi(y)$).

Сформулированный критерий содержит двухкванторные условия. Из упомянутого выше результата о том, что T -степень проблемы полноты для алгебры $\langle \mathcal{F}_0, \text{FDA}_= \rangle$ есть $0''$, можно сделать вывод, что критерий полноты не может состоять лишь из однокванторных условий (иначе T -степень проблемы полноты была бы $0'$), т.е. что предложенный критерий полноты является практически простейшим возможным.

В [26], [28] сформулированный критерий перенесен (с применением результатов работы [38]) на другие классы схем программ, причем для класса $\text{FDS}_=$ критерий полноты совпадает с критерием полноты для $\text{FDA}_=$.

ТЕОРЕМА 7 ($\langle \mathcal{F}_0, \text{FDAA}_= \rangle$). *Набор $\mathcal{L}$ полон тогда и только тогда, когда $\forall x, y \exists \tau$ (τ – терм сигнатуры $\mathcal{L}$ & $\tau(x) = y$).*

Наиболее сложным является критерий полноты для алгебры $\langle \mathcal{F}_0, \text{FDC}_= \rangle$.

Скажем, что переменная x вычисляется в сигнатуре $\mathcal{L}$ исходя из набора $(a_1, \dots, a_k)$ с использованием не более l переменных, если существует конечная последовательность присваиваний вида $z := f(y_1, \dots, y_n)$ такая, что

- а) функции, используемые в присваиваниях, входят в сигнатуру $\mathcal{L}$,
- б) в последнем присваивании x стоит слева от знака $:=$,
- в) во всех присваиваниях последовательности вместе взятых используется не более l переменных,
- г) в правой части любого присваивания могут использоваться лишь переменные $a_1, \dots, a_k$ и переменные, встретившиеся в левых частях предшествующих присваиваний.

ТЕОРЕМА 8. ($\langle \mathcal{F}_0, \text{FDC}_= \rangle$). *Набор $\mathcal{L}$ полон тогда и только тогда, когда*

- 1) $\forall x, y \exists \tau$ (τ – терм сигнатуры $\mathcal{L}$ & $\tau(x) = y$),
- 2) $\exists a \exists \Phi$ ($\Phi(x)$ – бескванторная формула сигнатуры $\mathcal{L} \cup \{=\}$ & $\Phi(a)$ & $\forall y \neq a \neg \Phi(y)$),

- 3) $\forall k \exists l \forall a_1, \dots, a_k \forall x \forall \tau$ (τ – терм сигнатуры $\mathcal{L}$ & $\tau(a_1, \dots, a_k) = x \rightarrow x$ может быть вычислен в сигнатуре $\mathcal{L}$ исходя из набора $(a_1, \dots, a_k)$ с использованием не более l переменных).

До сих пор не найдены аналогичные критерии полноты для алгебр с операторами замыкания $\text{FD}(1)$ и $\text{FDS}(1)$.

Приведем простые примеры систем полных в одной алгебре, но не полных в другой.

ПРИМЕР 1 [37]. Система $\{o, g\}$, где

$$g(i, j) = \begin{cases} j + 1, & \text{если } i = \lfloor j/2 \rfloor, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

полна в $\langle \mathcal{F}_r, \text{FDA}_= \rangle$, но не полна в $\langle \mathcal{F}_r, \text{FDC}_= \rangle$.

ПРИМЕР 2 [7]. Система $\{s, s^-, P\}$ полна в $\langle \mathcal{F}_r, \text{FD} \rangle$, но не полна в $\langle \mathcal{F}_r, \text{FDS}(1) \rangle$.

Сопоставление полученных критериев полноты позволяет сравнить классы схем программ (т.е. фактически различные концепции алгоритмов) в духе программы В. Непомнящего [19].

Сравнивая формулировки теорем 5, 6, 7 и упомянутый результат для алгебры $\langle \mathcal{F}_0, \text{FDS}_= \rangle$, можно заметить общую закономерность: чем сильнее средства замыкания, тем проще решается проблема полноты. В пользу этого вывода свидетельствует и то, что для слабых средств замыкания $\text{FD}(1)$ и $\text{FDS}(1)$, как отмечено выше, критерии полноты получить не удалось.

Еще одним аргументом является сравнение степеней неразрешимости индексных множеств проблемы полноты. Сравнение множеств $I_{\langle \mathcal{F}_0, \text{FDA}_= \rangle}$ и $I_{\langle \mathcal{F}_r^1, \text{FDS}(1) \rangle}$ (теоремы 1 и 4) показывает, что для алгебры с более сильными средствами замыкания степень неразрешимости индексного множества проблемы полноты меньше, т.е. оно алгоритмически проще. Сопоставление теорем 2 и 3 показывает, что для множеств $I_{\langle \mathcal{F}_0, \text{FDA}_= \rangle}$ и $I_{\langle \mathcal{F}_0, \text{FDA}_= \rangle}$, хотя их T -степени и равны ($= 0''$), но их m -степени различаются – для алгебры с более сильными средствами замыкания соответствующая m -степень строго меньше.

В тех случаях, когда для какого-либо класса функций некоторая проблема оказывается алгоритмически неразрешимой, обычно стремятся выделить содержательные подклассы этого класса функций, для которых данная проблема окажется уже разрешимой.

Сформулированные выше критерии полноты позволяют показать, что в классе многочленов с целыми коэффициентами проблема полноты разрешима. Так как все вычисления выполняются в множестве $\mathbb{N}$, то отрицательные значения многочленов будем заменять на число 0. Назовем получающиеся в результате функции многочленами на $\mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 9. Существует алгоритм, который по любому конечному множеству многочленов на $\mathbb{N}$ определяет, является ли оно полным в алгебре $\langle \mathcal{F}_0, \text{FDA}_= \rangle$.

3. Максимальные подалгебры

Изучение максимальных подалгебр не только позволяет продвинуться в решении вопроса о полноте, но и позволяет получить информацию о строении подалгебр вообще.

Максимальные подалгебры изучались в [14] для алгебр Робинсон рекурсивных функций, но не были полностью описаны.

Для алгебры $\langle \mathcal{F}_0^1, \text{FDA}_= \rangle$ сформулированный выше критерий полноты позволяет построить следующую классификацию максимальных подалгебр.

К1.1. Совокупность всех максимальных подалгебр $\mathfrak{A}$ таких, что

- а) $\exists a \exists \Phi (\Phi(x) - \text{бескванторная формула сигнатуры } \mathfrak{A} \cup \{=\} \& \Phi(a) \& \forall y \neq a \neg \Phi(y))$,
- б) $\exists x, y \forall g \in \mathfrak{A} (y \neq g(x))$.

К1.2. Совокупность всех максимальных подалгебр $\mathfrak{A}$ таких, что

- а) $\exists a \exists \Phi (\Phi(x) - \text{бескванторная формула сигнатуры } \mathfrak{A} \cup \{=\} \& \Phi(a) \& \forall y \neq a \neg \Phi(y))$,
- б) $\forall x, y \exists g \in \mathfrak{A} (y = g(x))$,
- в) $\exists \mathcal{L} \subseteq \mathfrak{A} (\mathcal{L} \text{ конечно } \& \forall x, y \exists \tau (\tau - \text{терм сигнатуры } \mathcal{L} \& y = \tau(x)))$.

К2.1. Совокупность всех максимальных подалгебр $\mathfrak{A}$ таких, что

- а) $\exists D \exists \Phi (D - \text{конечное множество } \& \Phi(x) - \text{бескванторная формула сигнатуры } \mathfrak{A} \cup \{=\} \& \forall a((a \in D \rightarrow \Phi(a)) \& (a \notin D \rightarrow \neg \Phi(a)))$,
- б) $\neg (\exists a \exists \Phi (\Phi(x) - \text{бескванторная формула сигнатуры } \mathfrak{A} \cup \{=\} \& \Phi(a) \& \forall y \neq a \neg \Phi(y)))$,
- в) $\exists \mathcal{L} \subseteq \mathfrak{A} (\mathcal{L} \text{ конечно } \& \forall x, y \exists \tau (\tau - \text{терм сигнатуры } \mathcal{L} \& y = \tau(x)))$.

К2.2. Совокупность всех максимальных подалгебр $\mathfrak{A}$ таких, что

- а) $\exists \mathcal{L} \subseteq \mathfrak{A} (\mathcal{L} \text{ конечно } \& \forall x, y \exists \tau (\tau - \text{терм сигнатуры } \mathcal{L} \& y = \tau(x)))$,
- б) $\neg \exists D \exists \Phi (D - \text{конечное множество } \& \Phi(x) - \text{бескванторная формула сигнатуры } \mathfrak{A} \cup \{=\} \& \forall a((a \in D \rightarrow \Phi(a)) \& (a \notin D \rightarrow \neg \Phi(a)))$.

Описание этих совокупностей дано в работах [24], [25].

ТЕОРЕМА 10. Все совокупности кроме К2.1 континуальны.

В алгебре $\langle \mathcal{F}_r^1, \text{FDS}(1) \rangle$ описано несколько совокупностей максимальных подалгебр (см. [4]–[6], [22]), однако это описание не является исчерпывающим.

В качестве примера приведем три совокупности максимальных подалгебр (алгебры $\langle \mathcal{F}_r^1, \text{FDS}(1) \rangle$) интересных тем, что в их описании используются понятия классической теории алгоритмов.

ТЕОРЕМА 11 [4]. Для множества $A \subseteq \mathbb{N}$ подалгебра $\mathfrak{A}_A = \{f \mid f(A) \cap \overline{A} = \emptyset\} \cup \mathcal{P}_r^1$ является максимальной тогда и только тогда, когда A конечно или коконечно.

Алгебра $\mathfrak{A}_A$ называется алгеброй сохранения принадлежности множеству.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [6]. Сжатое множество F называется *наибольшим*, если $\forall W$ (W рекурсивно перечислимо & $F \not\subseteq W \rightarrow \exists R$ (R – рекурсивное множество & $F \subsetneq R \subsetneq W$)).

ТЕОРЕМА 12 [6]. Если множество $A \subseteq \mathbb{N}$ является

- а) бесконечным рекурсивным с бесконечным дополнением или
- б) наибольшим сжатым множеством, то подалгебра $\mathfrak{A}'_A = \{f \mid f(\bar{A}) \cap A \text{ конечно}\} \cup \mathcal{P}_r^1$ максимальна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [6]. Сжатые множества A и B называются *f -эквивалентными* тогда и только тогда, когда существует частично-рекурсивная функция φ такая, что $\varphi(A)$ и B почти совпадают (т.е. отличаются лишь на конечное множество чисел).

Квазисжатое [21] называется множество, являющееся конечным объединением сжатых множеств.

ТЕОРЕМА 13 [6]. Если A – квазисжатое множество и $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$, где A_i – сжатые, $i = 1, \dots, k$, то алгебра $\mathfrak{A}'_A = \{f \mid f(\bar{A}) \cap A \text{ конечно}\} \cup \mathcal{P}_r^1$ является максимальной тогда и только тогда, когда все множества A_i , $i = 1, \dots, k$, – наибольшие сжатые и попарно f -эквивалентные.

Сравнение полученных описаний максимальных подалгебр в программных алгебрах с максимальными подалгебрами в алгебрах Робинсон позволяет сделать вывод [5] об их несопоставимости. При этом программные алгебры имеют в целом более регулярное строение.

Также существенно отличаются максимальные подалгебры из различных программных алгебрах рекурсивных функций. Например, в алгебре $\langle \mathcal{F}_r^1, \text{FDS}(1) \rangle$ подалгебра Фраттини (пересечение всех максимальных подалгебр) не имеет конечных систем образующих [4], в то время как в алгебре $\langle \mathcal{F}_0^1, \text{FDA}_= \rangle$ подалгебра Фраттини является тривиальной – это наименьшая подалгебра $U_0 = \{\text{TRUE}, \text{FALSE}, \text{id}\}$.

В ряде работ программные алгебры рекурсивных функций и предикатов расщепляются на две компоненты $\langle F, R \rangle$, где F – множество ее функций, R – множество ее предикатов, и каждая из них изучается отдельно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Подалгебра $\langle F, R \rangle$ называется *максимальной по функциям*, если добавление к ней не содержащейся в ней функции с последующим замыканием приводит к алгебре всех рекурсивных функций и предикатов.

Аналогично определяется максимальность по предикатам. В [22] показано существенное различие между этими компонентами.

ТЕОРЕМА 14. Если подалгебра алгебры $\langle \mathcal{F}_r^1, \text{FDS}(1) \rangle$ максимальна по функциям, то она максимальна и по предикатам, обратное же не верно: существуют подалгебры, максимальные по предикатам, но не максимальные по функциям.

4. Модификации проблемы полноты

Первоначально модифицированная проблема полноты рассматривалась для автоматных функций [16]. Для алгебры $\langle \mathcal{F}_r^1, \text{FDS}(1) \rangle$ модифицированные проблемы полноты изучались в [7], [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. [7]. Множество функций и предикатов M называется A -полным, если

$$\forall t \in \mathcal{F}_r^1 \exists z \exists h \in [M]_{\text{FDS}(1)} \forall x \leq z (t(x) = h(x)).$$

Множество M называется A -предполным, если оно не A -полно, но становится таковым после добавления к нему любого элемента из $\mathcal{F}_r^1 - M$.

Обозначим $\Phi = \{\mathfrak{A}_A \mid A \neq \mathbb{N} \& A \neq \emptyset\}$ ($\mathfrak{A}_A$ из теоремы 11). Далее, пусть w – не диагональное бинарное симметричное и рефлексивное отношение на $\mathbb{N}$, и Ψ – семейство подалгебр вида

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(w) = \{f \mid \forall a, b ((a, b) \in w \& f(a)! \& f(b)! \rightarrow (f(a), f(b)) \in w)\} \\ \cup \{p \mid \forall a, b ((a, b) \in w \& p(a)! \& p(b)! \rightarrow p(a) \equiv p(b))\} \end{aligned}$$

для всех таких w . Как видно из следующего результата, A -предполные классы устроены проще, чем максимальные подалгебры.

ТЕОРЕМА 15 [7]. *Множество A -предполных классов есть $\Phi \cup \Psi$.*

Несмотря на наличие этого достаточно простого описания, проблема A -полноты остается по-прежнему эффективно неразрешимой, а число A -предполных классов по-прежнему континуально.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Множество подалгебр T называется α -критериальной системой (для A -полноты), если для любого множества функций и предикатов M мощности, меньшей чем α , M A -полно тогда и только тогда, когда множество M не содержится ни в одной из подалгебр множества T .

Известно [16], что существуют счетные $\aleph_0$ -критериальные системы. В [7] впервые дано конструктивное описание счетной $\aleph_0$ -критериальной системы.

ТЕОРЕМА 16. *Множество $\{\mathfrak{A}_A \mid A \text{ рекурсивно перечислимо, не просто}\} \cup \{\mathfrak{A}(w) \mid w - \text{рекурсивно перечислимо, не просто}\}$ является счетной $\aleph_0$ -критериальной системой для A -полноты.*

Другая модификация проблемы полноты рассматривалась в [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Функция t называется φ -аппроксимирующей функцией f , если в их области определения Δt и Δf совпадают и $\forall x \in \Delta f (|f(x) - t(x)| \leq \varphi(x))$. Множество M функций и предикатов называется φ -полным, если оно содержит предикат с непустыми областями истинности и ложности, и для всякой функции $f \in \mathcal{F}_r^1$ замыкание $[M]_{\text{FDS}(1)}$ содержит φ -аппроксимирующую ее функцию. Множество M называется слабо полным, если оно φ -полно для некоторой общерекурсивной функции φ .

ТЕОРЕМА 17. *t -степень индексного множества проблемы полноты меньше или равна t -степени индексного множества проблемы φ -полноты для любой общерекурсивной функции φ , а также и t -степени индексного множества проблемы слабой полноты.*

Таким образом, эта модификация не упрощает решение проблемы полноты.

5. Структура подалгебр

Следующим шагом в изучении программных алгебр является изучение структуры всех ее подалгебр. Ясно, однако, что в силу ее континуальности и крайней сложности даже максимальных подалгебр, рассчитывать на полное описание этой структуры вряд ли возможно. Поэтому согласно [3] внимание в первую очередь должно быть сосредоточено на подалгебрах, достижимых сверху за конечное число шагов (так называемых подалгебрах конечной глубины), т.е. следует изучить совокупность таких подалгебр $\mathfrak{A}$, что $\exists n > 1 \exists \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$ ($\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \& \forall i (1 < i \leq n \rightarrow \mathfrak{A}_{i-1}$ является максимальной подалгеброй $\mathfrak{A}_i \& \mathfrak{A}_{i-1}$ является конечно порожденной).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Группа G перестановок множества A называется *полурегулярной*, если

$$\forall g \in G \forall a \in A (g(a) = a \rightarrow \forall x \in A (g(x) = x)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Отображение $f: A \rightarrow B$ назовем *p-гомоморфизмом*, если на множествах A и B определены полурегулярные группы перестановок G_1 и G_2 , соответственно, и

$$\forall g_1 \in G_1 \forall g_2 \in G_2 \forall x \in A (f(g_1(x)) = g_2(f(x)) \rightarrow \forall y \in A (f(g_1(y)) = g_2(f(y)))).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Пару p -гомоморфизмов $f_1, f_2: A \rightarrow B$ назовем *регулярной*, если

$$\forall x \in A (f_1(x) = f_2(x) \rightarrow \forall y \in A (f_1(y) = f_2(y))).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. *Сетью вложений* E назовем четверку

$$\langle \{A_i\}_{i \in I}, \leq_D, \{G_i\}_{i \in I}, E \rangle,$$

где I – конечное множество индексов: $\{A_i\}_{i \in I}$ – совокупность конечных множеств; $\leq_D$ – частичный порядок на множестве индексов I ; $\{G_i\}_{i \in I}$ – совокупность полурегулярных групп перестановок на множествах $\{A_i\}_{i \in I}$ с соответствующими индексами; E – совокупность множеств $\{\alpha_{ij}\}_{i,j \in I, i \leq_D j}$ p -гомоморфизмов A_j в A_i , причем

- 1) $\forall i, j \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \alpha_{ij}$ (γ_1 и γ_2 образуют регулярную пару),
- 2) $\forall i (\alpha_{ii} = G_i)$,
- 3) E замкнуто относительно суперпозиции (пара $\langle \{A_i\}_{i \in I}, \{\alpha_{ij}\}_{i,j \in I, i \leq_D j} \rangle$ является категорией).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. *Двойным разбиением* натурального ряда чисел назовем совокупность множеств $\{C_j^i\}_{i \in I, 0 \leq j \leq k_i}$ такую, что

- 1) I – конечное множество индексов,
- 2) множества $B_i = \bigcup_j C_j^i$ являются рекурсивными для всех i и образуют разбиение $\mathbb{N}$, т.е. $\bigcup_i B_i = \mathbb{N}$ и $\forall i_1, i_2 (i_1 \neq i_2 \rightarrow B_{i_1} \cap B_{i_2} = \emptyset)$,
- 3) для любого i множества $\{C_j^i\}_{j=0}^{k_i}$ образуют разбиение B_i на k_i (конечное число или $\aleph_0$) конечных множеств одинаковой мощности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Скажем, что сеть вложений $E = \langle \{A_i\}_{i \in I}, \leq_D, \{G_i\}_{i \in I}, E \rangle$ и двойное разбиение $M = \{C_j^i\}_{i \in I, 0 \leq j \leq k_i}$ согласованы, если

- 1) $\forall i \in I (A_i = C_0^i)$,
- 2) для каждого i на множестве $B_i = \bigcup_j C_j^i$ определена пара рекурсивных функций J_1^i, J_2^i таких, что $\forall n < k_i (J_1^i(C_n^i) = C_{n+1}^i)$, $J_1^i/C_{k_i}^i = \text{id}/C_{k_i}^i$ (если k_i конечно), $J_2^i/C_{n+1}^i = (J_1^i)^{-1}(C_n^i)$, $J_2^i/C_0^i = \text{id}/C_0^i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. С каждой парой (M, E) согласованных M и E свяжем следующий класс общерекурсивных функций и предикатов $\Gamma_{(M, E)}$:

$$\begin{aligned} & \{P \mid \forall x, y, i, j (x, y \in C_j^i \ \& \ P(x) \rightarrow P(y))\} \\ & \cup \{f \mid \forall i_1, j_1 \exists i_2, j_2 \exists \gamma \in \alpha_{i_1 i_2} (i_2 \leq_D i_1 \ \& \ \forall x \in C_{j_1}^{i_1} (f(x) = (J_1^{i_2})^{j_2} \gamma (J_2^{i_1})^{j_1}(x)))\}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 18 [30]. Подалгебра алгебры $\langle \mathcal{F}_0^1, \text{FDA} = \rangle$ достижима сверху за конечное число шагов тогда и только тогда, когда она представима в виде $\Gamma_{(M, E)}$ для некоторой согласованной пары (M, E) .

В [26] описана структура атомов алгебры $\langle \mathcal{F}_0^1, \text{FDA} = \rangle$, т.е. минимальных элементов в множестве подалгебр за вычетом подалгебры U_0 .

ТЕОРЕМА 19. Подалгебра $\mathfrak{A}$ является атомом тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} = [P]$ для некоторого предиката P ($\neq \text{TRUE}$, $\neq \text{FALSE}$) или $\mathfrak{A} = \{f\}$, где $f(\neq \text{id})$ – рекурсивная перестановка $\mathbb{N}$ такая, что $\exists p$ (p – простое число $\& \forall x (f^p(x) = x \ \& \ \forall i (1 \leq i \leq p \rightarrow f^i(x) \neq x))$).

Перестановки, используемые в теореме 19, назовем *циклическими*.

При дальнейшем проникновении вглубь структуры подалгебр трудности описания резко возрастают.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Подалгебру $\mathfrak{A}$ назовем *покрытием атома*, если $\exists \mathfrak{B} \forall \mathfrak{C} (\mathfrak{B} \text{ атом} \ \& \ \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} \ \& \ (\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} = \mathfrak{C} \vee \mathfrak{C} = \mathfrak{A}))$.

ТЕОРЕМА 20. $\mathfrak{A}$ является покрытием атома тогда и только тогда, когда

- 1) $\mathfrak{A} = [P, Q]$ для некоторых предикатов P, Q ($\neq \text{TRUE}$, $\neq \text{FALSE}$, $P \neq Q$) или
- 2) $\mathfrak{A} = [P, f]$, где f – циклическая, $P \neq \text{TRUE}$, $\neq \text{FALSE}$, и $\forall x (P(x) \rightarrow p(f(x)))$, или
- 3) $\mathfrak{A} = [P, f]$, где f – циклическая, $P \neq \text{TRUE}$, $\neq \text{FALSE}$, и в каждом цикле $\{x, \dots, f^{n-1}(x)\}$ функции f предикат P истинен ровно на одном элементе, или
- 4) $\mathfrak{A} = [f, g]$, где f, g – циклические и группа G перестановок $\mathbb{N}$, порождаемая функциями f, g , является полурегулярной и обладает тем свойством, что любая ее нетривиальная подгруппа, содержащая перестановку f , совпадает с $[f]$.

Группа G в пункте 4) теоремы 20 может быть и бесконечной – группой Бернсайд. Существование групп Бернсайда с указанным свойством доказано А. Ольшанским [20].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Подалгебра U не имеет бесконечных цепей подалгебр, если $\neg \exists U_1, \dots, U_n, \dots \forall i (U_i < U_{i+1} \ \& \ U_i < U)$. Множество всех таких подалгебр обозначим V .

ТЕОРЕМА 21. V не является верхней полурешеткой.

Доказательство теоремы принципиально зависит от факта существования групп Ольшанского. Если бы таких групп не было, то множество V оказалось бы верхней полурешеткой.

Структура подалгебр алгебры $\langle \mathcal{F}_0^1, \text{FDA}=_ \rangle$ является, по существу, расширением множества T -степеней неразрешимости на субрекурсивный случай [26]. Тем не менее имеет место следующий результат:

ТЕОРЕМА 22. Структура T -степеней неразрешимости и структура подалгебр алгебры $\langle \mathcal{F}_0^1, \text{FDA}=_ \rangle$, рассматриваемые в сигнатуре $\leq$, не являются элементарно эквивалентными.

Доказательство этой теоремы использует факт невложимости в множество V трех-элементной решетки $\langle 0, a, 1 \rangle$ с $0 < a < 1$ в качестве начального сегмента.

Для алгебры $\langle \mathcal{F}_0^1, \text{FDAA}=_ \rangle$ структура подалгебр несколько проще, как и следовало ожидать, учитывая, что класс $\text{FDAA}=_$ является более сильным средством замыкания. В частности, удастся описать структуру всех конечно-порожденных подалгебр.

ТЕОРЕМА 23 [28]. $\mathfrak{A}$ является конечно-порожденной подалгеброй $\langle \mathcal{F}_0^1, \text{FDAA}=_ \rangle$ тогда и только тогда, когда $\exists n \exists f_1, \dots, f_n \exists m \exists p_1, \dots, p_m$

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A} = \{ f \mid \forall x, y (y = f(x) \rightarrow \exists l \exists k_1, \dots, k_l (y = f_{k_1} \dots f_{k_l}(x))) \} \\ \cup \{ p \mid p/M - \text{булева комбинация предикатов } p_1, \dots, p_m \}), \end{aligned}$$

где $M = \{ x \mid \forall f \in \mathfrak{A} (f(x) = x) \}$.

Описание структуры замкнутых классов позволяет продвинуться в решении проблемы выразимости, состоящей (в рассматриваемых алгебрах) в решении вопроса: можно ли заданную функцию или предикат выразить через заданный набор функций и предикатов.

Так, из теоремы 23 непосредственно вытекает следующий критерий выразимости (для функций) в алгебре $\langle \mathcal{F}_0^1, \text{FDAA}=_ \rangle$.

СЛЕДСТВИЕ. Функция f выражима через набор $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ тогда и только тогда, когда

$$\forall x, y (y = f(x) \leftrightarrow \exists l \exists k_1, \dots, k_l \leq n (y = f_{k_1} \dots f_{k_l}(x))).$$

6. Конгруэнция и автоморфизмы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. *Изоморфизмом* подалгебры $\mathfrak{A}$ на подалгебру $\mathfrak{B}$ назовем такое взаимно-однозначное отображение φ $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, которое отображает функции в функции и предикаты в предикаты и которое сохраняет операцию замыкания относительно схем программ, т.е. если схема программ S при некоторой интерпретации I вычисляет функцию h (предикат r), то S при интерпретации $\varphi(I) = \{\varphi(q_i) | q_i \in I\}$ вычисляет функцию $\varphi(h)$ (предикат $\varphi(r)$).

Аutomорфизмом называется изоморфизм алгебры на себя.

В ряде работ изучались автоморфизмы как всей алгебры рекурсивных функций и предикатов, так и изоморфизмы между максимальными подалгебрами.

В [26] описаны все автоморфизмы алгебры $\langle \mathcal{F}_0^1, \text{FDA}_= \rangle$.

Если α — рекурсивная перестановка $\mathbb{N}$, то индуцируемое ей отображение $\varphi_\alpha: \mathcal{F}_0^1 \rightarrow \mathcal{F}_0^1$, определяемое следующим образом: $\varphi_\alpha(f) = \alpha f \alpha^{-1}$ для функции f , $\varphi(p) = p \alpha^{-1}$ для предиката p , является автоморфизмом $\langle \mathcal{F}_0^1, \text{FDA}_= \rangle$ и называется *внутренним*.

ТЕОРЕМА 24. *Аutomорфизмы $\langle \mathcal{F}_0^1, \text{FDA}_= \rangle$ исчерпываются внутренними.*

Сформулированный результат может быть перенесен и на все остальные классы схем программ. Программные алгебры в отношении автоморфизмов так же принципиально отличаются от алгебр Робинсон, у которых вообще нет нетривиальных автоморфизмов [14].

Для алгебры $\langle \mathcal{F}_r^1, \text{FDS}(1) \rangle$ в [4] ряд описанных максимальных подалгебр расклассифицирован с точностью до изоморфизма. В частности, показано, что существует максимальная подалгебра, не изоморфная никакой другой максимальной подалгебре, а также, что в семействе максимальных подалгебр из теоремы 11 алгебры $\mathfrak{A}_A$ и $\mathfrak{A}_B$ изоморфны тогда и только тогда, когда $|A| = |B|$.

Рассматривались изоморфизмы не только отдельных алгебр, а всего множества подалгебр целиком. Множество подалгебр любой алгебры образует частично упорядоченное множество относительно отношения включения. Взаимно-однозначные отображения этого множества на себя, сохраняющие отношение включения, являются автоморфизмами.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 25 [26], [44]. *Множество автоморфизмов структуры подалгебр алгебры $\langle \mathcal{F}_0^1, \text{FDA}_= \rangle$ исчерпывается внутренними автоморфизмами.*

Следует отметить, что проблема описания автоморфизмов множества T -степеней до сих пор остается открытой, относящейся к числу наиболее сложных проблем теории алгоритмов [40].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. *Конгруэнцией* на алгебре $\mathfrak{A}$ называется отношение эквивалентности $\sim$ на $\mathfrak{A}$ такое, что

а) в отношении $\sim$ может находиться пара функций либо пара предикатов, но не предикат и функция,

б) для любой схемы программ S , если она в интерпретации I вычисляет функцию f (предикат p), то в интерпретации I' , получающейся заменой функций и предикатов из I на функции и предикаты, находящиеся с ними в отношении $\sim$, схема S вычисляет функцию (предикат), также находящуюся с функцией f (предикатом p) в отношении $\sim$.

Алгебра называется *простой*, если она не имеет конгруэнций, отличных от тривиальных, т.е. единичной, при которой все элементы эквивалентны, и нулевой, при которой все элементы различны.

Конгруэнции на программных алгебрах рекурсивных функций изучались в работах [4], [26].

В [26] дано полное описание всех простых конечно-порожденных подалгебр алгебры $\langle \mathcal{F}_0^1, \text{FDA}_= \rangle$.

ТЕОРЕМА 26. *Подалгебра $\mathfrak{A}$ является простой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} = U_0$ или $\mathfrak{A}$ содержит функции, отличные от id , и для любого d такого, что $\exists e \neq d \exists f \in \mathfrak{A} (f(d) = e)$ и любого не тождественно истинного предиката вида $f(x) = g(x)$, где $f, g \in \mathfrak{A}$, имеет место $\exists u \exists h \in \mathfrak{A} (h(d) = u \ \& \ f(u) \neq g(u))$.*

Применяя это описание, легко показать, что алгебра $\langle \mathcal{F}_0^1, \text{FDA}_= \rangle$ является простой, а максимальные подалгебры вида $\mathfrak{A}_A$ просты тогда и только тогда, когда $|A| = 1$.

В [4] показано, что алгебра $\langle \mathcal{F}_r^1, \text{FDS}(1) \rangle$ также является простой, а все ее подалгебры вида $\mathfrak{A}_A$ не просты.

7. Абстрактная вычислимость в алгебраических системах

Задачей абстрактной вычислимости согласно [11] является описание вычислимости в алгебраических системах $\langle A, \mathcal{L} \rangle$ в предположении вычислимости всех функций и предикатов, входящих в $\mathcal{L}$.

Существует несколько подходов к построению теории абстрактной вычислимости.

Один из них – его можно назвать программистским – базируется на следующем определении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. *Теорией вычислимости* в алгебраической системе $\langle A, \mathcal{L} \rangle$ при условии, что $\mathcal{L}$ состоит из всюду определенных функций и предикатов, назовем замыкание $\mathcal{L}$ относительно класса $\text{FDA}_=$.

Впервые эта возможность была рассмотрена в [36], [45]. В этих работах предложено использовать класс схем программ FDA и доказано, что замыкание $\mathcal{L}$ относительно $\text{FDA}_=$ обладает многими свойствами множества рекурсивных (в классическом смысле) функций. Сильным аргументом в пользу выбора именно этого класса схем программ можно считать то, что он является наиболее сильным, универсальным [15], по крайней мере, среди классов схем детерминированных последовательных программ, и это позволяет получить наиболее широкую теорию вычислимости в алгебраических системах.

Таким образом, объект изучения в программных алгебрах рекурсивных функций и в теории абстрактной вычислимости фактически один и тот же – замыкание относительно $\text{FDA}_=$ множества $\mathcal{L}$ функций и предикатов.

Аппарат, развитый в теории программных алгебр, позволяет получить, в ряде случаев, полное описание вычислимости в алгебраических системах.

ТЕОРЕМА 27 [26]. Если $\langle A, \mathcal{L} \rangle$ – конечно-порожденная алгебраическая система с разрешимой проблемой тождества слов, порождающие элементы которой включены в сигнатуру $\mathcal{L}$ в качестве констант, то теория вычислимости над $\langle A, \mathcal{L} \rangle$ изоморфна вычислимости относительно некоторой T -степени a .

Этот результат является подтверждением гипотезы Дж. Такера [48].

В работе [27] получено полное описание вычислимости в некоторых полях.

ТЕОРЕМА 28. Пусть $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ – расширение поля рациональных чисел и $\mathcal{L} = \langle +, -, ()^{-1}, \leq, 0, 1 \rangle$ – сигнатура упорядоченного поля, причем, чтобы остаться в рамках всюду определенных функций, положим $0^{-1} = 0$. Тогда $[\mathcal{L}]_{\text{FDA} =}$ изоморфно максимальной подалгебре алгебры $\langle \mathcal{F}_0, \text{FDA} = \rangle$.

ТЕОРЕМА 29. Пусть $\mathbb{Q}(\alpha)$ – алгебраическое расширение простой степени и $\mathcal{L} = \langle +, -, ()^{-1}, 0, 1 \rangle$. Тогда $[\mathcal{L}]_{\text{FDA} =}$ изоморфно подалгебре алгебры $\langle \mathcal{F}_0, \text{FDA} = \rangle$, достижимой сверху за два шага, т.е. “максимальной в максимальной”.

При рассмотрении вычислимости в частичных алгебраических системах (т.е. если $\mathcal{L}$ содержит не всюду определенные функции и предикаты) использованных выше классов схем последовательных программ уже не достаточно. Для адекватной работы с частичными объектами требуются [34] специальные средства параллелизма.

В [43] введен класс схем параллельных программ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. Схема параллельных программ с массивами и равенством ($\text{PFDA} =$) – это конечный ориентированный граф, вершины которого помечены инструкциями того же вида, что и в определении 1, а также могут быть помечены инструкцией AND.

Из вершины с инструкцией AND выходят два непомеченных ребра. Неформально семантика оператора AND такова: при его выполнении вычисления делятся на два полностью независимых и не взаимодействующих процесса вычислений (ветви), следуя двум выходящим ребрам графа.

Программа, использующая оператор AND, будет вычислять, вообще говоря, многозначную функцию (или предикат). Запись $z \prec f(x_1, \dots, x_n)$ означает, что z является одним из значений функции f на аргументах $x_1, \dots, x_n$ (z вычисляется на одной из ветвей).

В [43] ряд результатов, полученных ранее для алгебры $\langle \mathcal{F}_0, \text{FDA} = \rangle$, перенесен на алгебру $\langle \mathcal{F}_r, \text{PFDA} = \rangle$.

Вычислимость в алгебраических системах посредством $\text{PFDA} =$ оказалась также тесно связанной с другими концепциями вычислимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. Функция $f: A^n \rightarrow A$ называется *поисково-вычислимой* на алгебраической системе $\langle A, \mathcal{L} \rangle$ тогда и только тогда, когда существует рекурсивно перечислимое множество $H = \{ \langle F_i, G_i \rangle \}_{i=0}^{\infty}$, где F_i – бескванторная формула сигнатуры

$\mathcal{L} \cup \{=\}$, G_i – терм сигнатуры $\mathcal{L}$, такое, что

$$f(x_1, \dots, x_n) \succ z \leftrightarrow \exists i \exists y_1, \dots, y_{p_i} (F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{p_i}) \\ \& G_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{p_i}) = z).$$

Поисково-вычислимые функции были введены Я. Московакисом [41], определение приведено согласно [35].

ТЕОРЕМА 30 [29]. *Если $\mathcal{L}$ такова, что $\forall x, y \exists \tau$ (τ – терм сигнатуры $\mathcal{L}$ & $\tau(x) = y$), то $\forall f$ (f поисково-вычислима $\leftrightarrow f \in [\mathcal{L}]_{\text{PFDA}_=}$).*

Схемы программ из класса $\text{PFDA}_=$ могут использоваться и для вычисления функционалов, т.е. отображений множества функций на $\mathbb{N}$ в себя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Пусть схема $S \in \text{PFDA}_=$ вычисляет некоторую (многозначную) функцию и все ее предикатные символы интерпретированы рекурсивными предикатами, а все функциональные символы, кроме одного, f , – рекурсивными функциями.

Если при подстановке вместо символа f любой частичной функции g (на $\mathbb{N}$) получившаяся в результате полностью интерпретированная схема вычисляет некоторую однозначную функцию h , то скажем, что *схема S представляет функционал Ψ , отображающий g и h .*

Приведем в слегка переформулированном виде результат из [43].

ТЕОРЕМА 31. $h \leq_e g \leftrightarrow \exists \Psi$ ($h = \Psi(g)$ & Ψ – функционал, представимый схемой из класса $\text{PFDA}_=$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Барздинь Я. М. Об одном классе машин Тьюринга (машины Минского) // Алгебра и логика. 1962. Т. 1. С. 42–51.
- [2] Глушков В. М. Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм // Кибернетика. 1965. №5. С. 1–9.
- [3] Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л. Алгебра. Языки. Программирование. Киев: Наукова Думка, 1978.
- [4] Голунков Ю. В. К теории систем алгоритмических алгебр // ДАН СССР. 1977. Т. 232. №4. С. 749–752.
- [5] Голунков Ю. В. О полноте операций в системах алгоритмических алгебр // Алгоритмы и автоматы. Казань: КГУ, 1978. С. 11–53.
- [6] Голунков Ю. В. О предполных классах алгоритмов, сохраняющих принадлежность множеству, 1 // Вероятностные методы и кибернетика. №16. Казань: КГУ, 1980. С. 21–40.
- [7] Голунков Ю. В. Аппроксимационная полнота в алгебрах частично рекурсивных функций и предикатов // Кибернетика. 1987. №6. С. 26–30.
- [8] Голунков Ю. В. Степень неразрешимости проблемы полноты в алгебрах рекурсивных функций // Матем. заметки. 1988. Т. 44. №5. С. 620–627.
- [9] Голунков Ю. В. Полнота с заданной точностью в функциональных системах программного типа // Дискретн. матем. 1990. Т. 2. №3. С. 42–49.
- [10] Ершов А. П. Операторные алгоритмы, 1 // Проблемы кибернетики. №3. М.: Физматгиз, 1960. С. 5–48.

- [11] Ершов А. П. Вычислимость в произвольных областях и базисах // Семиотика и информатика. 1982. № 19. С. 3–53.
- [12] Ершов А. П., Ляпунов А. А. О формализации понятия программы // Кибернетика. 1967. № 5. С. 40–57.
- [13] Заславский И. Д. Граф-схемы с памятью // Труды МИАН. 1964. Т. 72. С. 99–192.
- [14] Захаров Д. А. Рекурсивные функции. Новосибирск: НГУ, 1970.
- [15] Котов В. Е., Саберфельд В. К. Теория схем программ. М.: Наука, 1991.
- [16] Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. М.: МГУ, 1982.
- [17] Марченков С. С. Базисы по суперпозиции в классах рекурсивных функций // Матем. вопросы кибернетики. № 3. М.: Наука, 1991. С. 115–139.
- [18] Минский М. Вычисления и автоматы. М.: Мир, 1971.
- [19] Непомнящий В. А. Критерий алгоритмической полноты систем операций // Теория программирования. Т. 1. Новосибирск: ВЦ СОАН СССР, 1972. С. 267–279.
- [20] Ольшанский А. Ю. Группы ограниченного периода с подгруппами простого порядка // Алгебра и логика. 1982. Т. 21. № 5. С. 553–618.
- [21] Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
- [22] Савельев А. А. Об одном способе описания максимальных подсистем алгебр // Вероятностные методы и кибернетика. № 18. Казань: КГУ, 1982. С. 77–83.
- [23] Соловьев В. Д. Критерий полноты систем вычислимых функций и предикатов // V Всесоюз. конф. по пробл. теорет. кибер. Тезисы докл. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1980. С. 115.
- [24] Соловьев В. Д. Структура замкнутых классов вычислимых функций и предикатов // Изв. ВУЗов. Математика. 1982. № 12. С. 51–56.
- [25] Соловьев В. Д. Полнота систем общерекурсивных функций и предикатов I; II // Изв. ВУЗов. Математика. 1989. № 8; 9. С. 56–63; 60–66.
- [26] Соловьев В. Д. Алгебраические аспекты абстрактной теории вычислимости // Матем. вопросы кибернетики. № 3. М.: Наука, 1991. С. 233–256.
- [27] Соловьев В. Д. Вычислительные теории над алгебрами // Международн. конф. по алгебре. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1991. С. 135–136.
- [28] Соловьев В. Д. Программные алгебры рекурсивных функций с дополнительными средствами замыкания // Изв. ВУЗов. Математика. 1993. № 6. С. 46–52.
- [29] Соловьев В. Д. Вычислимость недетерминированными программами и поисковая вычислимость Московакиса // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 1. С. 149–152.
- [30] Соловьев В. Д. Программно-замкнутые классы общерекурсивных функций и предикатов конечного ранга // Изв. ВУЗов. Математика. 1993. № 9. С. 51–63.
- [31] Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // Труды МИАН. 1958. Т. 51. С. 109–140.
- [32] Янов Ю. И. О логических схемах алгоритмов // Проблемы кибернетики. Т. 1. М.: Физматгиз, 1958. С. 75–127.
- [33] Aho A., Hopcroft J., Ullman J. The design and analysis of computer algorithms. London: Addison-Wesley, 1976.
- [34] Constable R., Gries D. On classes of program schemata // SIAM Comput. 1972. V. 1. P. 66–108.
- [35] Gordon C. E. Prime and search computability, characterized as definability in certain sublanguages of constructible L // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 197. P. 391–408.
- [36] Friedman H. Algorithmic procedures, generalized Turing algorithms and elementary recursion theory // Logic Coll.'69. Amsterdam: North-Holland, 1971. P. 361–389.
- [37] Kfoury A. J. Definability by programs in first-order structures // Theor. Comp. Sci. 1983. V. 25. P. 1–66.
- [38] Kfoury A. J., Urzyczyn P. Necessary and sufficient conditions for the universality of programming formalisms // Acta Infor. 1985. V. 22. P. 347–377.

- [39] Kfoury A. J., Urzyczyn P. Concurrent program schemes // *Fundam. Infor.* 1987. V. 10. P. 337–362.
- [40] Lerman M. Degrees of unsolvability. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [41] Moshovakis Y. N. Abstract first order computability, I; II // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1969. V. 138. P. 427–504.
- [42] Post E. Two-valued iterative systems of mathematical logic // *Ann. Math. Studies.* V. 5. Prinseton, 1941.
- [43] Soloviev V. D. Nondeterministic finite algorithmic procedures as the models of abstract computability // *Lect. Notes Comp. Sci.* V. 278. Berlin: Springer-Verlag, 1987. P. 409–411.
- [44] Soloviev V. D. Automorphism of the program closed classes of functions and predicates structure // *Recursive Function Theory: Newsletter.* 1992. №39.
- [45] Spepheardson L. S. Computation over abstract structures: serial and parallel procedures and Friedman's definitional schemes // *Logic Coll.'73.* Amsterdam: North-Holland, 1975. P. 445–513.
- [46] Sheperdson J. C., Sturgis H. E. Computability of recursive functions // *Jour. ACM.* 1963. V. 10. №2. P. 217–255.
- [47] Tokura N., Kasami T., Furuta Sh. Janov schemas augmented by a pushdown memory // *IEEE 15th Ann. Symp. Switch and Automata theory.* New York, 1974. P. 84–94.
- [48] Tucker J. V. Computing in algebraic systems // *Preprint series.* Oslo: Matem. Inst. Univ. i Oslo, 1978.

Казань

Поступила в редакцию
02.11.1994