Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Артемьев, С. В. Болотин, Д. Л. Вайнштейн,
А. А. Васильев, С. Ю. Доброхотов, Л. М. Зелёный,
В. В. Козлов, А. А. Петрукович, В. В. Сидоренко,
Д. В. Трещёв, А. И. Шафаревич, Анатолий Исерович
Нейштадт (к семидесятилетию со дня рождения), *УМН*,
2020, том 75, выпуск 5, 201–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9965>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 18:03:52

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Анатолий Исерович Нейштадт

(к семидесятилетию со дня рождения)

27 июля 2020 г. исполнилось семьдесят лет со дня рождения Анатолия Исеровича Нейштадта – крупного ученого, выдающегося специалиста в области теории возмущений динамических систем и теории адиабатических инвариантов.

А.И. Нейштадт родился в Москве в семье инженера-химика и бортмеханика (бортмехаником была мама). Старшеклассником стал ходить на занятия Вечерней физико-математической школы на общественных началах при МВТУ им. Н.Э. Баумана (которую окончил с отличием). В 1967 г. окончил с золотой медалью школу № 358 и поступил на мехмат МГУ им. М.В. Ломоносова. А.И. Нейштадт обучался на кафедре теоретической механики, где его научным руководителем стал М.Л. Лидов. Он окончил университет с отличием и после защиты диплома по-

ступил в аспирантуру мехмата МГУ, где в 1975 г. представил, а в 1976 г. защитил под руководством М.Л. Лидова кандидатскую диссертацию “О некоторых резонансных задачах в нелинейных системах”.

С 1975 по 1987 г. А.И. Нейштадт работал во Всесоюзном научно-исследовательском институте медицинского приборостроения (ВНИИМП), где занимался прикладным программированием. Помимо выполнения своих обязанностей в этом институте, он продолжал активно вести научную работу по математике, занимаясь задачами, поставленными В.И. Арнольдом. В 1989 г. А.И. Нейштадт защитил на мехмате МГУ докторскую диссертацию “Вопросы теории возмущений нелинейных резонансных систем”. В 1987 г. он был принят по рекомендации В.И. Арнольда на работу в Институт космических исследований (ИКИ РАН) в лабораторию (позже отдел) под руководством Г.М. Заславского. Впоследствии А.И. Нейштадт в течение длительного времени работал в ИКИ в должности заведующего лабораторией нелинейной и хаотической динамики, в настоящее время он является ведущим научным сотрудником этого института.

С 1996 по 2007 г. А.И. Нейштадт преподавал в Институте естествознания и экологии Российского научного центра “Курчатовский институт” (с 2006 г. – факультет нанотехнологий и информатики МФТИ), а с 1999 по 2007 г. – на мехмате МГУ.

С 2007 г. А. И. Нейштадт занимает должность профессора в университете г. Лафборо (Великобритания).

В разное время А. И. Нейштадт участвовал в работе редакционных советов таких журналов, как “Journal of Nonlinear Science”, “Nonlinearity”, “Regular and Chaotic Dynamics”, “Chaos” (в настоящее время – почетный редактор). С 2005 по 2014 г. он занимал пост главного редактора журнала “Nonlinearity”.

А. И. Нейштадт был приглашенным докладчиком на Международном конгрессе математиков (Киото, 1990) и Международном конгрессе по теоретической и прикладной механике (Варшава, 2004).

Упомянем коротко лишь основные направления работы А. И. Нейштадта и главные полученные им результаты.

Первая научная работа – совместная с М. Л. Лидовым – была посвящена приложению метода усреднения для описания резонансного вращения Луны [7]. В этой работе показано, что законам вращения Луны, сформулированным Д. Кассини на основе наблюдений, соответствует положение равновесия усредненной с учетом резонанса системы уравнений вращательного движения Луны (одновременно и независимо эти результаты получены В. В. Белецким [3], [4]; Лидов–Нейштадт и Белецкий взаимно сослались друг на друга в своих публикациях). Усредненная система имеет и другие равновесия, но при учете приливного трения асимптотически устойчивым оказывается именно равновесие, отвечающее законам Кассини. Эти результаты составили содержание дипломной работы А. И. Нейштадта.

Начиная с самых ранних работ научная деятельность А. И. Нейштадта была в основном связана с влиянием резонансов на применимость методов теории возмущений и, в частности, метода усреднения в динамике систем, близких к интегрируемым. Фазовое пространство невозмущенной интегрируемой системы расслоено на инвариантные торы, несущие невозмущенные траектории. Возмущение вызывает медленную эволюцию поперек этих торов. Для приближенного описания этой эволюции классический метод усреднения предписывает усреднить скорость эволюции по невозмущенным торам. Так получается замкнутая система, содержащая только медленно изменяющиеся переменные. Однако этот чрезвычайно эффективный метод не всегда приводит к правильным результатам из-за резонансов между частотами невозмущенного движения. Наличие резонансов может приводить к существенным отклонениям эволюции системы от описываемой методом усреднения. Так, в многочастотных нелинейных системах могут иметься начальные условия, для которых отклонение точного решения от решения усредненной системы на временах порядка $1/\varepsilon$ (где ε – параметр возмущения) велико. Это приводит к необходимости оценивать сверху меру таких “плохих” начальных условий и оценивать точность метода усреднения на дополнительном множестве. Требуется также исследовать поведение решений системы при “плохих” начальных условиях, соответствующих траекториям, проходящим через резонансы или захватываемым резонансами.

В работах [9], [11] А. И. Нейштадтом были получены неулучшаемая оценка среднего по начальным условиям от погрешности метода усреднения в общей многочастотной задаче и неулучшаемая оценка меры начальных условий, для которых погрешность метода усреднения превосходит заданную величину (на временах порядка $1/\varepsilon$). При этом были использованы методы Д. В. Аносова и Т. Касуги. Гораздо лучшие оценки были получены А. И. Нейштадтом для двухчастотных систем [8] при некоторых предположениях, ослабленных по сравнению с имевшимися ранее в работах В. И. Арнольда (сам вопрос о получении таких оценок был поставлен В. И. Арнольдом). Для систем с одной быстро вращающейся фазой ранее было известно, что процедура теории возмущений позволяет достичь произвольной степенной по ε точности.

В работах [12], [14] А. И. Нейштадт показал, что в аналитических системах ошибка может быть сделана экспоненциально малой, причем эта экспоненциально малая погрешность является принципиально неустранимой. Этот результат позволил доказать теорему о включении аналитического отображения в поток с экспоненциальной точностью [14], а также тот факт, что в аналитических одночастотных гамильтоновых системах адиабатический инвариант сохраняется с точностью порядка ε на экспоненциально больших временах. В работе [13] были получены неулучшаемые оценки меры множества, дополнительного к КАМ-торам в возмущенной аналитической гамильтоновой системе: мера множества разрушающихся торов и деформация сохраняющихся торов не превосходят величины порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Для систем с двумя степенями свободы и однократным собственным вырождением была получена экспоненциально малая оценка меры разрушенных торов. В изоэнергетически невырожденной системе с двумя степенями свободы доказано, что открытое А. Пуанкаре расщепление сепаратрис экспоненциально мало. В 2001 г. А. И. Нейштадт (совместно с Д. В. Аносовым) за цикл работ по осреднению в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроколеблющимися решениями был награжден премией им. А. М. Ляпунова.

Важным случаем, когда метод усреднения непосредственно неприменим, является класс задач о переходе через сепаратрису в одночастотных системах с быстрыми и медленными движениями. На сепаратрисе частота обращается в нуль, поэтому в ее окрестности требуется специальный подход. Случай гамильтоновой системы с одной степенью свободы и зависимостью от медленно изменяющегося параметра был изучен А. И. Нейштадтом на конкретном примере в одной из его первых работ [10]. Если при любом “замороженном” значении параметра на фазовом портрете системы имеются сепаратрисы, то в полной системе возможен переход фазовой траектории через сепаратрису из одной области фазовой плоскости в другую. При этом, как было показано, начальные условия, соответствующие захвату в различные области, сильно перемешаны. Малое, порядка ε , изменение начальных условий приводит к совершенно различному поведению траекторий после перехода через сепаратрису. Захвату в различные области можно приписать корректно определенные вероятности, которые могут быть вычислены. Эти идеи и результаты были обобщены и развиты А. И. Нейштадтом в последующих работах (см., например, обзоры [24], [26], [27]). При переходе через сепаратрису происходит квазислучайный (чувствительный к выбору начальных условий) малый скачок адиабатического инварианта, асимптотическая формула для которого была получена А. И. Нейштадтом в работах [17] (для системы с полутора степенями свободы) и [18] (для системы с быстрыми и медленными движениями). (Впервые скачок адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису вычислил А. В. Тимофеев для конкретной задачи о движении заряженной частицы в электростатической волне – им это было сделано для исследования поведения адиабатического инварианта в термоядерной установке Огра [33]. Основной результат работы [17] был одновременно и независимо получен в [5].) При многократных переходах через сепаратрису в результате накопления малых квазислучайных скачков в фазовом пространстве возникает большая область хаотической динамики (так называемого адиабатического хаоса). Кроме этих малых “динамических” скачков, при переходах через сепаратрису происходят большие, “геометрические” скачки, связанные с различием площадей разных областей, на которые сепаратриса разделяет фазовую плоскость быстрых переменных. Позднее в работе [29] было показано, что геометрические скачки в общем случае могут приводить к очень быстрому разрушению адиабатической инвариантности в системе и развитию хаотической динамики в большей части фазового пространства.

В 1980-х и 1990-х годах А. И. Нейштадтом были получены важные результаты, связанные с прохождением фазовой траектории через отдельный резонанс. При этом

возникают резонансные явления, приводящие к разрушению адиабатической инвариантности в системе. Так, траектория может быть захвачена в резонанс и продолжать движение вдоль резонансной поверхности. При этом адиабатический инвариант отклоняется от значения, предсказанного методом усреднения, на величину порядка единицы. Захват в резонанс – вероятностное явление, его вероятность оказывается величиной порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Траектории, проходящие через резонанс, не захватываясь, испытывают квазислучайный скачок адиабатического инварианта на величину порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Это явление называется рассеянием на резонансе. А. И. Нейштадтом было дано асимптотическое описание этих явлений в двухчастотных системах. Указанные результаты описаны, например, в работах [22], [23] и обзорах [30], [25], [27].

Во второй половине 1980-х годов А. И. Нейштадтом был решен ряд задач, связанных с явлением затягивания потери устойчивости при динамических бифуркациях. Это замечательное явление было открыто на модельном примере в выполненной под руководством Л. С. Понтрягина работе М. А. Шишковой [32]. А. И. Нейштадт построил общую теорию этого явления и обнаружил его неожиданную связь с аналитичностью. Рассматривались динамические системы с быстрыми и медленными переменными в предположении, что быстрая система имеет невырожденные положение равновесия или предельный цикл, свойства устойчивости которых различны при различных (замороженных) значениях медленных переменных. В полной системе дрейф медленных переменных может приводить к динамической бифуркации: положение равновесия (или цикл) быстрой системы теряет устойчивость, оставаясь невырожденным. А. И. Нейштадт показал [15], [16], что в аналитических системах при сколь угодно медленном изменении медленных переменных потеря устойчивости неизбежно затягивается: решения остаются вблизи неустойчивого равновесия (цикла), пока значения медленных переменных не изменятся на величину порядка единицы. Были также получены оценка снизу времени затягивания потери устойчивости равновесия и, для ряда случаев, асимптотика момента срыва с потерявшего устойчивость равновесия [19], [20]. Ответы в этой теории даются в терминах интегралов по путям в плоскости комплексного времени. Наличие затягивания связано именно с аналитичностью: построен пример бесконечно дифференцируемой, но неаналитической системы, в которой затягивание потери устойчивости отсутствует, т. е. срыв с потерявшего устойчивость равновесия происходит вблизи точки бифуркации. Конструкция этого примера показывает, что в общем случае нет причины ожидать наличия затягивания потери устойчивости в неаналитических системах. Оценкам времени затягивания потери устойчивости предельного цикла посвящена работа [28]. Эта задача потребовала нового подхода по сравнению со случаем равновесия. Если для случая равновесия рассматривалась задача Коши в плоскости комплексного времени, то для случая цикла оказалось нужным рассматривать краевую задачу, в которой значения различных компонент решения задаются в различных точках плоскости комплексного времени.

Упомянем еще один результат А. И. Нейштадта из его совместной с В. В. Козловым статьи [6], касающейся применения асимптотических методов к обоснованию общих принципов динамики систем с голономными связями. Общая теорема о реализации голономных связей при помощи больших упругих сил, направленных к конфигурационному многообразию несвободной системы, была сформулирована Р. Курантом в качестве гипотезы. Эта важная идея еще раньше обсуждалась Л. Лекорню, Ф. Клейном и Л. Прандтлем в связи с анализом парадоксов сухого трения, обнаруженных П. Пенлеве. Теорема Куранта сначала была доказана в предположении потенциальности внешних сил с использованием интеграла энергии [31]. Впоследствии этот результат передоказывался и уточнялся многими авторами при том же предположении о консервативности. В работе [6] теорема о предельном переходе доказана в самом общем

случае с помощью совсем другой техники без предположения о консервативности системы. Интересно отметить, что упругие силы в общем случае имеют высокочастотные осцилляции и поэтому не стремятся к определенному пределу. Однако после естественной регуляризации эти силы стремятся как раз к реакциям системы со связями.

Говоря о научных достижениях А. И. Нейштадта, нельзя не сказать о его совместной с В. И. Арнольдом и В. В. Козловым работе над книгой “Математические аспекты классической и небесной механики” [1]. Начиная с первого издания в 1985 г. эта ставшая классической книга неоднократно дополнялась и переиздавалась в России и за рубежом.

А. И. Нейштадт всегда уделяет большое внимание приложениям своих результатов к задачам классической и небесной механики, гидродинамики, физики плазмы, других разделов физики. Здесь мы можем перечислить только некоторые из них.

В работах [10], [21], [18] А. И. Нейштадт установил ряд важных свойств резонансных движений небесных тел. Полученные А. И. Нейштадтом формулы для отыскания вероятностей возможной трансформации движения при пересечении сепаратрисы позволили ему вычислить вероятность формирования орбитального резонанса е-типа в результате приливного торможения спутников Сатурна Энцелада и Дионы [10]. Определив величину изменения адиабатического инварианта при переходах между резонансным и нерезонансным режимами движения, А. И. Нейштадт смог оценить время, за которое орбиты астероидов в окрестности резонанса 3:1 с Юпитером претерпевают такую эволюцию, что становятся возможными сближения с Марсом, приводящие к “выбрасыванию” этих астероидов из резонанса и появлению соответствующего люка Кирквуда [21], [18].

Примечательно, что как теория разрушения адиабатических инвариантов в системах с сепаратрисами [17], [18], так и теория рассеяния и захвата в резонанс в гамильтоновых системах [10], [22], [23] нашли широкое применение в физических задачах, в частности в физике космической плазмы. Быстрое увеличение количества спутников связи и систем глобального позиционирования сделало чрезвычайно актуальными задачи предсказания и количественного моделирования потоков заряженных частиц высоких энергий, взаимодействие которых со спутниками вызывает сбои в работе их сложной электроники (вплоть до полной потери управления). За формирование таких потоков отвечают два физических процесса, а именно ускорение заряженных частиц электромагнитными волнами и сильными электрическими полями, формирующимися за счет сложной динамики такого плазменного объекта, как *токовый слой*. В основе наиболее современных моделей токовых слоев и сопряженного с их динамикой ускорения заряженных частиц лежит теория адиабатических инвариантов и их разрушения в формулировке, предложенной А. И. Нейштадтом в работах середины 1980-х годов [17], [18]. Обзор [34] раскрывает детали приложений данной теории к плазменным процессам в токовых слоях. Работы А. И. Нейштадта по теории рассеяния на резонансах и захвата в резонанс в гамильтоновых системах [10], [22], [23] легли в основу описания процессов быстрого ускорения электронов электромагнитными волнами в околоземном пространстве, в области так называемых радиационных поясов Земли. Для таких систем явление захвата в резонанс играет ключевую роль в соответствующих моделях, объясняющих ускорение электронов до энергий в несколько МэВ на малых временных масштабах [2]. Важность понимания данного процесса ускорения крайне велика, так как электроны таких энергий, в литературе часто называемые *killer electrons*, могут привести к существенным сбоям в работе аппаратуры спутников связи.

Мы поздравляем Анатолия Исеровича Нейштадта с юбилеем и желаем ему здоровья и новых научных достижений!

А. В. Артемьев, С. В. Болотин, Д. Л. Вайнштейн, А. А. Васильев,
С. Ю. Доброхотов, Л. М. Зелёный, В. В. Козлов, А. А. Петрукович,
В. В. Сидоренко, Д. В. Трещёв, А. И. Шафаревич

Список литературы

- [1] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, Изд. стереотип., Едиториал УРСС, М., 2017, 416 с.; [англ. пер.: V. I. Arnold, V. V. Kozlov, A. I. Neishtadt, *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, 3rd ed., Encyclopaedia Math. Sci., **3**, Dynamical systems. III, Springer-Verlag, Berlin, 2006, xiv+518 pp.](#)
- [2] A. V. Artemyev, A. I. Neishtadt, D. L. Vainchtein, A. A. Vasiliev, I. Y. Vasko, L. M. Zelenyi, “Trapping (capture) into resonance and scattering on resonance: summary of results for space plasma systems”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **65** (2018), 111–160.
- [3] В. В. Белецкий, “О законах Кассини”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 1971, 079.
- [4] V. V. Beletskii, “Resonance rotation of celestial bodies and Cassini’s laws”, *Celestial Mech.*, **6** (1972), 356–378.
- [5] J. R. Cary, D. F. Escande, J. L. Tennyson, “Adiabatic-invariant change due to separatrix crossing”, *Phys. Rev. A*, **34**:5 (1986), 4256–4275.
- [6] В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, “О реализации голономных связей”, *ПММ*, **54**:5 (1990), 858–861; [англ. пер.: V. V. Kozlov, A. I. Neishtadt, “On the realization of holonomic constraints”, *J. Appl. Math. Mech.*, **54**:5 \(1990\), 705–708.](#)
- [7] М. Л. Лидов, А. И. Нейштадт, “Метод канонических преобразований в задачах о вращении небесных тел и законы Кассини”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 1973, 009, 62 с.
- [8] А. И. Нейштадт, “О прохождении через резонансы в двухчастотной задаче”, *Докл. АН СССР*, **221**:2 (1975), 301–304; [англ. пер.: A. I. Neishtadt, “Passage through a resonance in the two-frequency problem”, *Soviet Phys. Dokl.*, **20** \(1975\), 189–191.](#)
- [9] А. И. Нейштадт, “Об осреднении в многочастотных системах”, *Докл. АН СССР*, **223**:2 (1975), 314–317; [англ. пер.: A. I. Neishtadt, “Averaging in multifrequency systems”, *Soviet Phys. Dokl.*, **20** \(1975\), 492–494.](#)
- [10] А. И. Нейштадт, “Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно меняющимся параметром”, *ПММ*, **39**:4 (1975), 621–632; [англ. пер.: A. I. Neishtadt, “Passage through a separatrix in a resonance problem with a slowly-varying parameter”, *J. Appl. Math. Mech.*, **39**:4 \(1975\), 594–605.](#)
- [11] А. И. Нейштадт, “Об осреднении в многочастотных системах. II”, *Докл. АН СССР*, **226**:6 (1976), 1295–1298; [англ. пер.: A. I. Neishtadt, “Averaging in multifrequency systems. II”, *Soviet Phys. Dokl.*, **21** \(1976\), 80–82.](#)
- [12] А. И. Нейштадт, “О точности сохранения адиабатического инварианта”, *ПММ*, **45**:1 (1981), 80–87; [англ. пер.: A. I. Neishtadt, “On the accuracy of conservation of the adiabatic invariant”, *J. Appl. Math. Mech.*, **45**:1 \(1981\), 58–63.](#)
- [13] А. И. Нейштадт, “Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условно-периодических движений”, *ПММ*, **45**:6 (1981), 1016–1025; [англ. пер.: A. I. Neishtadt, “Estimates in the Kolmogorov theorem on conservation of conditionally periodic motions”, *J. Appl. Math. Mech.*, **45**:6 \(1981\), 766–772.](#)
- [14] А. И. Нейштадт, “О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой”, *ПММ*, **48**:2 (1984), 197–204; [англ. пер.: A. I. Neishtadt, “The separation of](#)

- motions in systems with rapidly rotating phase”, *J. Appl. Math. Mech.*, **48**:2 (1984), 133–139.
- [15] А. И. Нейштадт, “Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось”, В ст.: “Заседания семинара имени И. Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики”, *УМН*, **40**:5(245) (1985), 300–301.
- [16] А. И. Нейштадт, “О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях”, В ст.: “Совместные заседания семинара имени И. Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики и Московского математического общества (девятая сессия, 20–23 января 1986 г.)”, *УМН*, **41**:4(250) (1986), 206.
- [17] А. И. Нейштадт, “Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису”, *Физика плазмы*, **12** (1986), 992–1001; англ. пер.: A. I. Neishtadt, “Change of an adiabatic invariant at a separatrix”, *Sov. J. Plasma Phys.*, **12** (1986), 568–573.
- [18] А. И. Нейштадт, “Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису в системе с двумя степенями свободы”, *ПММ*, **51**:5 (1987), 750–757; англ. пер.: A. I. Neishtadt, “On the change in the adiabatic invariant on crossing a separatrix in systems with two degrees of freedom”, *J. Appl. Math. Mech.*, **51**:5 (1987), 586–592.
- [19] А. И. Нейштадт, “О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. I”, *Дифференц. уравнения*, **23**:12 (1987), 2060–2067; англ. пер.: A. I. Neishtadt, “Persistence of stability loss for dynamical bifurcations. I”, *Differ. Equ.*, **23**:12 (1987), 1385–1391.
- [20] А. И. Нейштадт, “О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. II”, *Дифференц. уравнения*, **24**:2 (1988), 226–233; англ. пер.: A. I. Neishtadt, “On deferring the loss of stability for dynamic bifurcations. II”, *Differ. Equ.*, **24**:2 (1988), 171–176.
- [21] А. И. Нейштадт, “Скачки адиабатического инварианта при переходах через сепаратрису и происхождение люка Кирквуда 3:1”, *Докл. АН СССР*, **295**:1 (1987), 47–50; англ. пер.: A. I. Neishtadt, “Jumps in the adiabatic invariant on crossing the separatrix and the origin of the 3:1 Kirkwood gap”, *Soviet Phys. Dokl.*, **32**:7 (1987), 571–573.
- [22] A. Neishtadt, “Scattering by resonances”, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, **65**:1-2 (1996/97), 1–20.
- [23] A. Neishtadt, “On adiabatic invariance in two-frequency systems”, *Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom* (S’Agaró, 1995), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **533**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999, 193–212.
- [24] A. Neishtadt, “Probability phenomena in perturbed dynamical systems”, *Mechanics of the 21st century*, Springer, Dordrecht, 2005, 241–261.
- [25] А. И. Нейштадт, “Усреднение, прохождение через резонансы и захват в резонанс в двухчастотных системах”, *УМН*, **69**:5(419) (2014), 3–80; англ. пер.: A. I. Neishtadt, “Averaging, passage through resonances, and capture into resonance in two-frequency systems”, *Russian Math. Surveys*, **69**:5 (2014), 771–843.
- [26] A. Neishtadt, “Averaging method for systems with separatrix crossing”, *Nonlinearity*, **30**:7 (2017), 2871–2917.
- [27] A. Neishtadt, “On mechanisms of destruction of adiabatic invariance in slow-fast Hamiltonian systems”, *Nonlinearity*, **32**:11 (2019), R53–R76.
- [28] A. I. Neishtadt, C. Simó, D. V. Treschev, “On stability loss delay for a periodic trajectory”, *Nonlinear dynamical systems and chaos* (Groningen, 1995), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **19**, Birkhäuser, Basel, 1996, 253–278.

- [29] A. Neishtadt, D. Treschev, “Polymorphisms and adiabatic chaos”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **31**:1 (2011), 259–284.
- [30] A. Neishtadt, D. Vainchtein, A. Vasiliev, “Adiabatic invariance in volume-preserving systems”, *IUTAM symposium on Hamiltonian dynamics, vortex structures, turbulence*, IUTAM Bookser., **6**, Springer, Dordrecht, 2008, 89–107.
- [31] H. Rubin, P. Ungar, “Motion under a strong constraining force”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **10** (1957), 65–87.
- [32] М. А. Шишкова, “Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных”, *Докл. АН СССР*, **209**:3 (1973), 576–579; англ. пер.: M. A. Shishkova, “Examination of a system of differential equations with a small parameter in the highest derivatives”, *Soviet Math. Dokl.*, **14** (1973), 483–487.
- [33] А. В. Тимофеев, “К вопросу о постоянстве адиабатического инварианта при изменении характера движения”, *ЖЭТФ*, **75**:4 (1978), 1303–1308; англ. пер.: A. V. Timofeev, “On the constancy of an adiabatic invariant when the nature of the motion changes”, *Soviet Phys. JETP*, **48**:4 (1978), 656–659.
- [34] Л. М. Зелёный, А. И. Нейштадт, А. В. Артемьев, Д. Л. Вайнштейн, Х. В. Малова, “Квазиadiaбатическое описание динамики заряженных частиц в космической плазме”, *УФН*, **183**:4 (2013), 365–415; англ. пер.: L. M. Zelenyi, A. I. Neishtadt, A. V. Artemyev, D. L. Vainchtein, H. V. Malova, “Quasiadiabatic dynamics of charged particles in a space plasma”, *Phys. Usp.*, **56**:4 (2013), 347–394.