Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. И. Топалов, Критические точки функции вращения интегрируемой гамильтоновой системы, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 4, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm997>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 18:16:53

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ФУНКЦИИ ВРАЩЕНИЯ
ИНТЕГРИРУЕМОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ

П. Топалов

Пусть M^4 – симплектическое многообразие с симплектической структурой ω . Пусть на нем задана невырожденная и интегрируемая гамильтонова система $\vec{v} = \text{sgrad } H$, т.е. интегрируемая по Лиувиллю с помощью боттовского интеграла F (см. [1]).

В работе [2] А. В. Болсинов и А. Т. Фоменко построили теорию траекторной классификации гамильтоновых систем на фиксированных и регулярных изокривах энергетических поверхностей

$$Q_h^3 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M^4 \mid H(x) = h\},$$

где h – регулярное значение. В частности, там было введено понятие функции вращения и было доказано, что последовательность ее локальных экстремумов на ребре молекулы является единственным траекторным инвариантом этого ребра. Таким образом, возникает задача о вычислении этой последовательности, которая называется *вектором вращения*.

В настоящей работе мы предъявляем такую 2-форму, интеграл которой по тору Лиувилля есть нуль тогда и только тогда, когда на этом торе функция вращения имеет критическое значение.

Пусть W есть некий атом (см. [1]), т.е. такая окрестность особого слоя слоения Лиувилля 3-многообразия Q_h^3 , граница которой целиком состоит из торов Лиувилля. Если c есть критическое значение функции $f \stackrel{\text{def}}{=} F \mid Q_h^3$, то $W = f^{-1}(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, где ε есть достаточно малое положительное число. Связная компонента прообраза $f^{-1}(0, c - \varepsilon)$ называется *ребром молекулы*. Согласно теореме Лиувилля, на ребре можно ввести координаты $\{(f, \varphi_1, \varphi_2)\}$, где φ_1 и φ_2 – переменные “угол”. В этих координатах $\vec{v} = a(f) \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + b(f) \frac{\partial}{\partial \varphi_2}$, где $a, b \in C^\infty((0, \varepsilon))$. Функ-

ция $\rho(f) \stackrel{\text{def}}{=} a(f)/b(f)$ называется *функцией вращения* ребра. Конечно, $\rho(f)$ зависит от выбора координат “угол”, но, как легко проверить, ее критические точки не зависят от выбора координат φ_1 и φ_2 на торах Лиувилля. Через $T^2(f)$ будем обозначать тор Лиувилля, изображаемый точкой ребра, на котором второй интеграл F принимает значение f . Пусть N есть несвязное объединение всех критических окружностей атома W . Рассмотрим на $\widetilde{W} \stackrel{\text{def}}{=} W \setminus N$ гладкое векторное поле D_f , которое удовлетворяет условию $dx f(D_f) = 1$. Конечно, D_f определено неоднозначно, но эта неоднозначность не будет влиять на наши рассуждения.

На трехмерном атоме W существует 1-форма α^1 такая, что $d\alpha^1 = \omega$. На всем Q^3 такая форма может и не существовать. Определим в $\widetilde{W}$ следующую 2-форму $\zeta^2 \stackrel{\text{def}}{=} L_{D_f} \alpha^1 \wedge L_{D_f}^2 \alpha^1$, где $L_{D_f}^2$ есть вторая производная Ли вдоль потока векторного поля D_f . Рассмотрим теперь функцию

$$Z(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{T^2(f)} \zeta^2.$$

Определенная таким образом функция $Z(f)$ не зависит от выбора поля D_f и формы α^1 . Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Функция $Z(f)$ равна нулю в точке f_0 тогда и только тогда, когда f_0 есть критическая точка функции вращения $\rho(f)$.*

Доказательство этой теоремы можно провести прямым вычислением в координатах “действие–угол”.

Автор выражает благодарность А. Т. Фоменко и А. В. Болсинову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. // УМН. 1990. Т. 45. №2. С. 49.
 [2] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. // Матем. сб. 1994. Т. 185. №4. С. 27–80. [3] Топалов П. // УМН. 1995. Т. 50. №1. С. 213–214. [4] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
15.01.1996