Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Э. Г. Рис, Многозначные группы и n -алгебры Хопфа, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 4, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm998>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:47:14

МНОГОЗНАЧНЫЕ ГРУППЫ И n -АЛГЕБРЫ ХОПФА

В. М. БУХШТАБЕР, Е. Г. РИС

Заметка посвящена новым алгебраическим понятиям, которые возникли в ходе наших исследований по теории многозначных групп [1].

Пусть $(X)^n$ – n -я симметрическая степень пространства X , т.е. фактор-пространство декартовой n -й степени X^n по действию симметрической группы перестановок координат. Введем диагональное отображение $D = D_n: X \rightarrow (X)^n: x \rightarrow [x, \dots, x]$ и отображение $1 \times D: (X)^n \times X \rightarrow (X \times X)^n: ([x_1, \dots, x_n], x) \rightarrow [(x_1, x), \dots, (x_n, x)]$. Аналогично вводится отображение $D \times 1: X \times (X)^n \rightarrow (X \times X)^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. n -значной группой называется пространство X вместе с операциями умножения $\mu: X \times X \rightarrow (X)^n$ ($\mu(x, y) = x \cdot y$) и взятия обратного элемента $\tau: X \rightarrow X$ ($\tau(x) = x^*$), которые удовлетворяют аксиомам:

- 1) существует точка $e \in X$ (единица) такая, что $e \cdot x = x \cdot e = D(x)$;
- 2) отображения $(\mu)^n(1 \times D)(\mu \times 1)$ и $(\mu)^n(D \times 1)(1 \times \mu): X \times X \times X \rightarrow (X)^{n^2}$ совпадают (ассоциативность умножения);
- 3) $e \in (x \cdot x^*) \cap (x^* \cdot x)$.

Многозначная группа называется коммутативной, если $x \cdot y = y \cdot x$ для любых x и y .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $n_1 = nk$. Гомоморфизмом n -значной группы (X, e_X, μ_X, τ_X) в n_1 -значную группу (Y, e_Y, μ_Y, τ_Y) называется отображение $f: X \rightarrow Y$ такое, что

$$(f^k D_k)^n \mu_X = \mu_Y(f \times f); \quad f(e_X) = e_Y; \quad f(\tau_X(x)) = \tau_Y f(x).$$

Ясно, что обычная (однозначная) группа G с умножением m является n -значной с умножением $\mu = Dm$. Важный пример так называемых косетных групп возникает, когда мы рассматриваем группу G вместе с некоторой подгруппой A порядка n группы автоморфизмов $\text{Aut}(G)$.

Положим $X = G/A$; $\mu(x, y) = \pi(m(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(y)))$; $\tau(x) = \pi(\tau_G(\pi^{-1}(x)))$, где $\pi: G \rightarrow X$ – каноническая проекция и τ_G – взятие обратного в группе G . Непосредственная проверка показывает, что такие X, μ, τ задают n -значную группу. Отметим (см. [1], [2]), что одна и та же n -значная группа может быть реализована как косетная для разных пар (G_1, A_1) и (G_2, A_2) .

Пусть $f: X \rightarrow Y$ – некоторый гомоморфизм n -значной группы X в m -значную группу Y .

Положим $\text{Ker } f = \{x \in X : f(x) = e_Y\}$. Тогда $(\text{Ker } f, e_X, \mu_X, \tau_X)$ является n -значной подгруппой в X .

Обозначим через $\{r\}$ вычет целого числа r по модулю m . Для множества X из m точек $(x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$ положим $\mu(x_p, x_q) \in (X)^2$ равным $D(x_{p+q})$, если $p + q < m$ и равным $[x_{p+q}, x_{p+q+1}]$, если $p + q \geq m$. Далее, положим $e = x_0$, $\tau(x_0) = x_0$ и $\tau(x_k) = x_{m-k}$, $k > 0$. Непосредственная проверка показывает, что такие операции μ, τ и выбор единицы задают на X структуру (X, e, μ, τ) двузначной группы. В то же время, нетрудно показать [1], что эта двузначная группа не может быть реализована как косетная группа, если $m > 2$.

Для коммутативной группы G взятие обратного элемента является автоморфизмом, поэтому с каждой коммутативной группой канонически связана двузначная косетная группа. В случае формальных групп именно эта конструкция дала первые и важные в топологических приложениях двузначные формальные группы “квадрата модуля” (см. [3], [4]). В случае эллиптической кривой эта конструкция (см. [5]) приводит к структуре двузначной группы на комплексной проективной прямой $\mathbb{CP}(1)$. отождествим $(\mathbb{CP}(1))^2$ с $\mathbb{CP}(2)$. Тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. Отображение $\mu: \mathbb{CP}(1) \times \mathbb{CP}(1) \rightarrow \mathbb{CP}(2)$, которое в однородных координатах имеет вид $\mu((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) = ((x_0 y_0 - k^2 x_1 y_1)^2 : -2(x_0 y_1 + x_1 y_0)(x_0 y_0 + k^2 x_1 y_1) - 4\delta x_0 y_0 x_1 y_1 : (x_1 y_0 - x_0 y_1)^2)$, вместе с отображением $\tau(x_0 : x_1) = (x_0 : x_1)$ и единицей $e = (0 : 1)$ задает структуру двузначной группы на $\mathbb{CP}(1)$ тогда и только тогда, когда $k(k - \delta^2) \neq 0$.

Пусть k – коммутативное кольцо с единицей 1, содержащее $1/n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. k -линейное отображение $L: A \rightarrow B$ коммутативных k -алгебр называется

1) *алгебраическим степени n* в $a \in A$, если существует полином

$$p(a; t) = t^n - \beta_1(a)t^{n-1} + \dots + (-1)^n \beta_n(a) \in B[t] \text{ такой, что } \sum_{q \geq 0} \frac{L(a^q)}{t^{q+1}} = \frac{1}{n} \frac{d}{dt} \ln p(a; t);$$

2) *n -алгебраическим*, если оно алгебраическое степени n для всех $a \in A$.

В условиях определения 4 обозначим через $d_L(a_1, \dots, a_{n+1})$ определитель $(n+1) \times (n+1)$ -матрицы $M_L(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = (m_{ij})$, где $m_{ij} = 0$, если $j > i+1$; $m_{i, i+1} = i$; $m_{ii} = L(a_i)$ и $m_{ij} = L(a_j a_{j+1} \dots a_i)$, если $j < i$.

Положим $R_L(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+1}} d_L(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n+1)})$, где Σ_{n+1} — симметрическая группа всех перестановок.

ТЕОРЕМА 5. k -линейное отображение $L: A \rightarrow B$ коммутативных k -алгебр является n -алгебраическим тогда и только тогда, когда $R_L(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = 0$ для всех наборов $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Отображение L тогда и только тогда является

- 1) 1-алгебраическим, когда $L(a_1 a_2) = L(a_1)L(a_2)$, т.е. L — кольцевой гомоморфизм;
- 2) 2-алгебраическим, когда $L(a_1 a_2 a_3) = L(a_1)L(a_2 a_3) + L(a_2)L(a_3 a_1) + L(a_3)L(a_1 a_2) - 2L(a_1)L(a_2)L(a_3)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. n -алгеброй Хопфа $(A; m, \iota, \Delta, \varepsilon, s)$ называется k -линейное пространство A вместе

- 1) со структурой коммутативной ассоциативной k -алгебры $(A; m, \iota)$, где $m: A \otimes A \rightarrow A$ — умножение и $\iota: k \rightarrow A$ — единица;
- 2) со структурой коассоциативной коалгебры (A, Δ, ε) , где $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ — диагональ и $\varepsilon: A \rightarrow k$ — коединица;
- 3) с кольцевым гомоморфизмом $\tau: A \rightarrow A$ (антиподом).

Более того, Δ является n -алгебраическим отображением таким, что полиномы $p(a; t) \in A \otimes A[t]$, существующие для каждого $a \in A$ (см. определение 4), удовлетворяют следующим аксиомам:

- 1) $p(1; t) = (t - 1 \otimes 1)^n$;
- 2) $j_q p(a; t) = (t - a)^n$, $q = l, r$, где $j_q: A \otimes A[t] \rightarrow A[t]$ есть $k[t]$ -отображение, переводящее $a_1 \otimes a_2$ в $\varepsilon(a_1)a_2$ при $q = l$ и в $a_1 \varepsilon(a_2)$ при $q = r$;
- 3) $m(1 \otimes s)p(a, \varepsilon(a)) = m(s \otimes 1)p(a, \varepsilon(a)) = 0$.

Используя следствие 6 нетрудно проверить, что 1-алгебра Хопфа является обычной алгеброй Хопфа.

ТЕОРЕМА 8. Пусть X — некоторая n -значная группа. Тогда кольцо функций $F(X)$ и кольцо когомологий $H^*(X; k)$ являются n -алгебрами Хопфа. (Здесь k — поле характеристики взаимно простой с n .)

Из следствия 6 и теоремы 8 вытекает, например,

СЛЕДСТВИЕ 9. На пространстве $\mathbb{CP}(m)$ при $m > 1$ нельзя ввести структуры двузначной группы.

Большая часть этих исследований была выполнена в течение визитов первого автора в Эдинбургский Университет благодаря EPSRC-Гранту.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Buchstaber V. M., Rees E. G. Multivalued groups, their representations and Hopf algebras // Preprint. Univ. of Edinburgh, 1995. [2] Buchstaber V. M., Veselov A. P. // Internat. Math. Res. Notices. 1996. № 8. P. 381–400. [3] Бухштабер В. М., Новиков С. П. // Матем. сб. 1971. Т. 84. С. 81–118. [4] Бухштабер В. М. // Совр. пробл. матем. Т. 10. М.: ВИНТИ, 1978. С. 5–178. [5] Бухштабер В. М. // УМН. 1990. Т. 45. № 3. С. 213–215.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова;
University of Edinburgh;
J. C. Maxwell Building

Принято редколлегией
17.07.1996