Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Артамонов, В. С. Дренски, Ю. Л. Ершов, М. В. Зайцев, Е. И. Зельманов, Т. Ш. Кальменов, Л. Г. Макара-Лиманов, А. А. Михалёв, А. В. Михалёв, В. Н. Ремесленников, Н. С. Романовский, В. А. Романьков, И. П. Шестаков, Уалбай Утмаханбетович Умирбаев (к шестидесятилетию со дня рождения), *УМН*, 2021, том 76, выпуск 2, 187–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9985>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 12:33:50

Уалбай Утмаханбетович Умирбаев

(к шестидесятилетию со дня рождения)

Уалбай Утмаханбетович Умирбаев – доктор физико-математических наук, профессор, академик Национальной академии наук Республики Казахстан, лауреат премии Мура Американского математического общества, лауреат Государственной премии Республики Казахстан – родился 9 мая 1960 г. в селе Торткуль Южно-Казахстанской области. Его отец Утмаханбет – участник Великой Отечественной войны, долгое время работал редактором районной газеты Шаянского района Южно-Казахстанской области, был директором средней школы в Торткуле и преподавал математику старшеклассникам. Мать Уалбая Бибизухра работала, в том числе и в тяжелые военные годы, бригадиром на уборке урожая, в награду за свой труд в 1940 г. была приглашена на Всесоюзную сельскохозяйственную выставку в Москву. В доме у Умирбаевых все увлекались математикой и шахматами. После окончания шестого класса отец привел Уалбая в летний лагерь Республиканской физико-математической школы города Алма-Аты – столицы Казахской ССР, где он и поступил, успешно сдав экзамены, в лучшую школу республики. В этой школе математику преподавали такие прекрасные педагоги, как Д. Ж. Ержанов и К. Е. Толымбекова, которые увлекали своих учеников интересными и в то же время трудными задачами из разных источников, в том числе из журнала “Квант”.

В 1977 г. Уалбай поступил на механико-математический факультет Новосибирского государственного университета. Новосибирский Академгородок произвел на Уалбая сильное впечатление. Здесь были созданы все условия для жизни, отдыха и труда научных работников, преподавателей и студентов. Большой лесной массив, многочисленные искусственные насаждения, близость к Обскому морю – все это делало Академгородок еще более привлекательным. В Доме ученых, в ДК “Академия” и в самом университете всегда проводилось много интересных мероприятий. Лекции читали известные ученые из разных научно-исследовательских институтов Сибирского отделения АН СССР. С первого курса Уалбай стал интересоваться алгеброй, участвовал в различных семинарах и слушал спецкурсы. Студенты 5-го курса А. В. Боровик и Е. И. Хухро вели кружок по теории конечных групп, а аспиранты В. Н. Желябин и Ю. А. Медведев – кружок по теории колец. Все они позже стали докторами наук и известными учеными. Со своим будущим научным руководителем И. П. Шестаковым – учеником члена-корреспондента АН СССР А. И. Ширшова,

выдающегося алгебраиста из научной школы А. Г. Куроша, Уалбай познакомился на втором курсе – Иван Павлович, в то время еще молодой доктор наук, преподавал ему теорию Галуа. Позже Уалбай специализировался у него на кафедре алгебры и логики, возглавляемой тогда Ю. Л. Ершовым, впоследствии академиком РАН. На сегодняшний день У. У. Умирбаев является одним из достойных представителей знаменитой сибирской школы академика А. И. Мальцева по алгебре и логике.

В 1986 г. в Институте математики СО АН СССР У. У. Умирбаев защитил кандидатскую диссертацию, а в 1995 г., в том же институте, – докторскую. Докторская диссертация была посвящена исследованию подалгебр свободных алгебр и проблеме вхождения для свободных алгебр Ли, групп и ассоциативных алгебр. Основные направления научных исследований У. У. Умирбаева: комбинаторная теория и алгоритмические проблемы теории колец, групп и алгебр Ли; автоморфизмы и дифференцирования свободных алгебр; тождества алгебраических систем; гипотеза якобиана; проблемы сокращения и линеаризации. Остановимся на некоторых существенных результатах.

Проблема Нагаты об автоморфизмах алгебры многочленов. Рассмотрим $K[X] = K[x_1, \dots, x_n]$ – алгебру многочленов над полем K от множества переменных $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, и пусть $\text{GA}_n(K)$ – группа автоморфизмов алгебры $K[X]$. Через $\phi = (f_1, \dots, f_n)$ обозначим такой автоморфизм алгебры $K[X]$, что $\phi(x_i) = f_i$, $1 \leq i \leq n$. Автоморфизмы алгебры $K[X]$ вида

$$\sigma(i, \alpha, f) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha x_i + f, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

где $0 \neq \alpha \in K$, $f \in K[X \setminus \{x_i\}]$, называются *элементарными*. Подгруппа $\text{TA}_n(K)$ группы $\text{GA}_n(K)$, порожденная всеми элементарными автоморфизмами, называется подгруппой *ручных автоморфизмов*, а элементы этой подгруппы называются *ручными автоморфизмами* алгебры $K[X]$. Автоморфизмы алгебры $K[X]$, не являющиеся ручными, называются *дикими*.

В 1942 г. немецкий математик Г. Юнг доказал, что автоморфизмы алгебры многочленов от двух переменных над полем нулевой характеристики являются ручными. В 1953 г. голландский математик В. ван дер Калк расширил этот результат для алгебр над полями произвольной характеристики.

Несмотря на все усилия специалистов, в случае трех и более переменных проблема ручных и диких автоморфизмов оставалась неприступной. Появилось несколько кандидатов в контрпримеры, и самым известным среди них был автоморфизм

$$\sigma = (x + (x^2 - yz)z, y + 2(x^2 - yz)x + (x^2 - yz)^2z, z)$$

алгебры $K[x, y, z]$, построенный японским математиком М. Нагатой в 1972 г.

В 2001 г. У. У. Умирбаев и И. П. Шестаков [10], [11] доказали, что автоморфизм Нагаты алгебры многочленов $K[x, y, z]$ от трех переменных над полем нулевой характеристики является диким. За эти две работы [10], [11] в 2007 г. авторы были удостоены премии Мура Американского математического общества.

В работе [11] были классифицированы все сокращения ручных автоморфизмов алгебры многочленов $K[x, y, z]$. Используя эту классификацию, У. У. Умирбаев чуть позже описал [12] все определяющие соотношения группы ручных автоморфизмов $\text{TA}_3(K)$ относительно системы порождающих $\sigma(i, \alpha, f)$.

Проблема Кона и подалгебры свободных ассоциативных алгебр. Строение подалгебр свободных ассоциативных алгебр изучалось многими математиками. В 1993 г. У. У. Умирбаев [2] доказал следующий уникальный и глубокий результат: алгебраическая зависимость конечной системы элементов свободных ассоциативных алгебр алгоритмически нераспознаваема. Уникальность этого результата заключается в том, что ни для какого другого класса свободных алгебр еще не удалось доказать

аналог этой теоремы. Для свободных групп и алгебр Ли алгебраическая зависимость конечной системы элементов распознается алгоритмически. В работе [2] доказана также неразрешимость проблемы вхождения в конечно порожденные подалгебры свободных ассоциативных алгебр.

В 1970–1971 гг. А. Чернякевич и Л. Г. Макара-Лиманов доказали аналог результата Юнга–ван дер Калка для свободных ассоциативных алгебр, т. е. показали, что автоморфизмы свободных ассоциативных алгебр от двух переменных являются ручными. Вопрос о существовании диких автоморфизмов был известен как проблема Кона. Наиболее известным кандидатом в дикие автоморфизмы был автоморфизм Аника

$$\delta = (x + z(xz - zy), y + (xz - zy)z, z)$$

свободной ассоциативной алгебры $K\langle x, y, z \rangle$.

В 2004 г. У. У. Умирбаев [13] доказал, что автоморфизм Аника свободной ассоциативной алгебры $K\langle x, y, z \rangle$ от трех переменных над полем нулевой характеристики является диким. При этом существенно использовался результат работы [12] об определяющих соотношениях группы ручных автоморфизмов $\text{TA}_3(K)$ алгебры многочленов от трех переменных.

Проблема М. И. Каргаполова о свободных разрешимых группах. Одно из применений базисов Грёбнера дает разрешимость проблемы вхождения в конечно порожденные подалгебры алгебры многочленов $K[x_1, \dots, x_n]$. Хорошо известная теорема Нильсена–Шрайера утверждает, что подгруппы свободных групп свободны, а теорема Ширшова–Витта показывает, что подалгебры свободных алгебр Ли свободны. Из этих результатов легко извлекается разрешимость проблемы вхождения для свободных групп и алгебр Ли. Член-корреспондент АН СССР М. И. Каргаполов сформулировал следующий вопрос: разрешима ли проблема вхождения в конечно порожденные подгруппы свободных разрешимых групп? Разрешимость проблемы вхождения для свободных метабелевых групп была доказана в 1980 г. Н. С. Романовским. Проблема М. И. Каргаполова была решена в 1995 г. У. У. Умирбаевым [6]: он показал, что проблема вхождения для свободных разрешимых групп ступени разрешимости ≥ 3 алгоритмически неразрешима. Аналогичный результат был также доказан для алгебр Ли [1].

Результаты работ [1], [2], [6] составили основу докторской диссертации У. У. Умирбаева.

Свободные алгебры Ли. Многообразия алгебр, в которых подалгебры свободных алгебр являются свободными, называются *шрайеровыми*. Таковы многообразия всех неассоциативных алгебр (А. Г. Курош, 1947), коммутативных и антикоммутативных алгебр (А. И. Ширшов, 1954), алгебр Ли (А. И. Ширшов, 1953; Э. Витт, 1956) и многообразие алгебр с нулевым умножением. Известный вопрос о существовании других шрайеровых многообразий алгебр был решен в 1994 г. У. У. Умирбаевым [5], который показал, что многообразие алгебр с тождеством $(xx)x = 0$ является шрайеровым. Многообразия супералгебр Ли (А. А. Михалев, 1985; А. С. Штерн, 1986) также оказались шрайеровыми.

В 1964 г. П. Кон доказал, что автоморфизмы конечно порожденных свободных алгебр Ли над произвольным полем являются ручными. В 1968 г. Ж. Левин обобщил этот результат на свободные алгебры шрайеровых многообразий алгебр. Следовательно, автоморфизмы свободных неассоциативных алгебр, свободных коммутативных и антикоммутативных алгебр конечного ранга над полями также являются ручными. В 2006 г. У. У. Умирбаев описал [14] все определяющие соотношения группы автоморфизмов свободных алгебр конечного ранга шрайеровых многообразий алгебр относительно системы порождающих $\sigma(i, \alpha, f)$.

Напомним, что *рангом* системы элементов $f_1, \dots, f_k$ свободной алгебры Ли L от свободных переменных $x_1, \dots, x_n$ называется минимальное число r , для которого найдется автоморфизм алгебры G , переводящий $f_1, \dots, f_k$ в подалгебру, порожденную элементами $x_1, \dots, x_r$. В 1994 г. А. А. Михалев и А. А. Золотых доказали, что ранг системы элементов $f_1, \dots, f_k$ свободной алгебры Ли L совпадает с (правым) рангом $(n \times k)$ -матрицы Якоби $[\partial f_i / \partial x_j]$, где $\partial f_i / \partial x_j$ – производные Фокса. Аналог этого замечательного результата для свободных групп был установлен в 1996 г. У. У. Умирбаевым [4], [7]. В 2001 г. этот результат был также обобщен А. А. Михалевым, У. У. Умирбаевым, и Ц. Ю [8] для свободных алгебр шрайеровых многообразий алгебр.

Хорошо известная теорема Дж. Столлинга (1968) и Р. Суона (1969) гласит, что группы когомологической размерности 1 свободны. В 1994 г. А. А. Золотых, А. А. Михалев и У. У. Умирбаев [3] построили пример несвободной алгебры Ли когомологической размерности 1 над полем положительной характеристики. Вопрос о справедливости аналога этого замечательного результата Столлинга–Суона для алгебр Ли над полем нулевой характеристики до сих пор остается открытым.

Свободные алгебры Пуассона. Строение свободных алгебр Пуассона и их автоморфизмы и дифференцирования были исследованы в совместных работах У. У. Умирбаева и Л. Г. Макара-Лиманова. Ими получены следующие существенные результаты.

1) Центризатор любого элемента свободной алгебры Пуассона над полем нулевой характеристики, который не является константой, является алгеброй многочленов от одной переменной [15]. Этот результат представляет собой точный аналог известной теоремы Дж. Бергмана о центризаторах для свободных ассоциативных алгебр.

2) Теорема о свободе верна для свободных алгебр Пуассона над полем нулевой характеристики [17]. Напомним, что теорема о свободе для свободных ассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики была доказана Л. Г. Макара-Лимановым в 1985 г.

3) Группа автоморфизмов свободного пуассонова поля $P(x, y)$ от двух переменных над полем K нулевой характеристики изоморфна двумерной группе Кремоны [18]:

$$\text{Aut } P(x, y) \cong \text{Aut } K(x, y) = \text{Cr}_2(K).$$

В частности, все автоморфизмы свободной алгебры Пуассона от двух переменных являются ручными [16].

Примитивные элементы свободной неассоциативной алгебры. Пусть $N\langle V \rangle$ есть свободная неассоциативная алгебра векторного пространства V над полем K . Определим гомоморфизм алгебр $\Delta: N\langle V \rangle \rightarrow N\langle V \rangle \otimes N\langle V \rangle$, полагая $\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$ для $v \in V$. Элемент $f \in N\langle V \rangle$ называется *примитивным*, если $\Delta(f) = 1 \otimes f + f \otimes 1$. В 1990 г. К. Х. Хофманн и К. Штрамбах сформулировали гипотезу о том, что линейное подпространство примитивных элементов порождается над V с помощью операций коммутатора $[x, y] = xy - yx$ и ассоциатора $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$. В 2002 г. У. У. Умирбаев и И. П. Шестаков [9] опровергли эту гипотезу, построили полную систему порождающих для примитивных элементов и описали это пространство как линейную алгебру с бесконечным множеством полилинейных операций. Оказалось, что эти операции совпадают с операциями, введенными в 1988 г. П. О. Михеевым и Л. В. Сабининым на касательном пространстве аналитической лупы. Позднее эти алгебры стали называть алгебрами Сабинина; они составили основу для неассоциативной теории Ли и неассоциативных алгебр Хопфа. В 2017 г. У. У. Умирбаев и В. К. Харченко [19] доказали, что любое сплетение $\tau: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ векторного пространства V единственным способом продолжается до сплетения свободной неассоциативной алгебры $N\langle V \rangle$ и эта алгебра $N\langle V \rangle$ имеет естественную структуру сплетенной неассоциативной алгебры Хопфа. Кроме того, было введено понятие сплетенной алгебры

Сабинина и доказано, что примитивные элементы сплетенной неассоциативной алгебры Хопфа образуют сплетенную алгебру Сабинина.

В 2009 г. У. У. Умирбаев был удостоен Государственной премии Республики Казахстан за цикл работ по теме “Подалгебры и автоморфизмы свободных алгебр”.

Стоит также отметить большую преподавательскую деятельность Уалбая Утмаханбетовича. Работая в Казахском национальном университете им. аль-Фараби (Алматы), Южно-Казахстанском университете им. М. Ауезова (Шымкент), Евразийском национальном университете им. Л. Н. Гумилева (Нур-Султан), в Университете Уэйна (Детройт), он немало усилий приложил для подготовки специалистов-математиков и по сей день продолжает передавать студентам свой научный опыт, энтузиазм и любовь к математике.

Мы желаем Уалбаю Утмаханбетовичу крепкого здоровья, долгих лет жизни и новых творческих успехов!

В. А. Артамонов, В. Дренски, Ю. Л. Ершов, М. В. Зайцев,
Е. И. Зельманов, Т. Ш. Кальменов, Л. Г. Макары-Лиманов,
А. А. Михалёв, А. В. Михалёв, В. Н. Ремесленников,
Н. С. Романовский, В. А. Романьков, И. П. Шестаков

Список цитированных работ У. У. Умирбаева

- [1] У. У. Умирбаев, “Проблема вхождения для алгебр Ли”, *Алгебра и логика*, **32:3** (1993), 326–340; англ. пер.: U. U. Umirbaev, “The occurrence problem for Lie algebras”, *Algebra and Logic*, **32:3** (1993), 173–181.
- [2] У. У. Умирбаев, “Некоторые алгоритмические вопросы ассоциативных алгебр”, *Алгебра и логика*, **32:4** (1993), 450–470; англ. пер.: U. U. Umirbaev, “Algorithmic problems in associative algebras”, *Algebra and Logic*, **32:4** (1993), 244–255.
- [3] А. А. Золотых, А. А. Михалев, У. У. Умирбаев, “Пример несвободной алгебры Ли когомологической размерности 1”, *УМН*, **49:1**(295) (1994), 203–204; англ. пер.: A. A. Zolotykh, A. A. Mikhalev, U. U. Umirbaev, “An example of a non-free Lie algebra of cohomological dimension 1”, *Russian Math. Surveys*, **49:1** (1994), 254.
- [4] У. У. Умирбаев, “Примитивные элементы свободных групп”, *УМН*, **49:2**(296) (1994), 175–176; англ. пер.: U. U. Umirbaev, “Primitive elements of free groups”, *Russian Math. Surveys*, **49:2** (1994), 184–185.
- [5] У. У. Умирбаев, “О шрейеровых многообразиях алгебр”, *Алгебра и логика*, **33:3** (1994), 317–340; англ. пер.: U. U. Umirbaev, “Schreier varieties of algebras”, *Algebra and Logic*, **33:3** (1994), 180–193.
- [6] У. У. Умирбаев, “Проблема вхождения для свободных разрешимых групп”, *Алгебра и логика*, **34:2** (1995), 211–232; англ. пер.: U. U. Umirbaev, “Occurrence problem for free solvable groups”, *Algebra and Logic*, **34:2** (1995), 112–124.
- [7] У. У. Умирбаев, “О ранге элементов свободных групп”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **2:1** (1996), 313–315.
- [8] А. А. Mikhalev, U. Umirbaev, J.-T. Yu, “Automorphic orbits in free non-associative algebras”, *J. Algebra*, **243:1** (2001), 198–223.
- [9] I. P. Shestakov, U. U. Umirbaev, “Free Akivis algebras, primitive elements, and hyperalgebras”, *J. Algebra*, **250:2** (2002), 533–548.
- [10] I. P. Shestakov, U. U. Umirbaev, “Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials”, *J. Amer. Math. Soc.*, **17:1** (2004), 181–196.
- [11] I. P. Shestakov, U. U. Umirbaev, “The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables”, *J. Amer. Math. Soc.*, **17:1** (2004), 197–227.
- [12] U. U. Umirbaev, “Defining relations of the tame automorphism group of polynomial algebras in three variables”, *J. Reine Angew. Math.*, **2006:600** (2006), 203–235.

- [13] U. U. Umirbaev, “The Anick automorphism of free associative algebras”, *J. Reine Angew. Math.*, **2007**:605 (2007), 165–178.
- [14] U. U. Umirbaev, “Defining relations for automorphism groups of free algebras”, *J. Algebra*, **314**:1 (2007), 209–225.
- [15] L. Makar-Limanov, U. Umirbaev, “Centralizers in free Poisson algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**:7 (2007), 1969–1975.
- [16] L. Makar-Limanov, U. Turusbekova, U. Umirbaev, “Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables”, *J. Algebra*, **322**:9 (2009), 3318–3330.
- [17] L. Makar-Limanov, U. Umirbaev, “The Freiheitssatz for Poisson algebras”, *J. Algebra*, **328**:1 (2011), 495–503.
- [18] L. Makar-Limanov, U. Umirbaev, “Free Poisson fields and their automorphisms”, *J. Algebra Appl.*, **15**:10 (2016), 1650196, 13 pp.
- [19] U. Umirbaev, V. Kharchenko, “Free braided nonassociative Hopf algebras and Sabinin τ -algebras”, *J. Algebra*, **492** (2017), 130–156.