Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Б. Воробец, Эргодичность бильярдов в многоугольниках: явные примеры,
УМН, 1996, том 51, выпуск 4, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm999>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 05:27:59

ЭРГОДИЧНОСТЬ БИЛЬЯРДОВ В МНОГОУГОЛЬНИКАХ: ЯВНЫЕ ПРИМЕРЫ

Я. Б. ВОРОБЕЦ

Бильярдом в плоской области Q называется динамическая система, описывающая движение в Q без трения точечного шарика, отражающегося от границы Q по закону “угол падения равен углу отражения”. Бильярдный поток обычно рассматривается на поверхности уровня энергии, соответствующей движению с единичной скоростью. В таком образом выбранном фазовом пространстве $Q \times S^1$ (S^1 – окружность единичных скоростей) имеется естественная мера, которая инвариантна относительно потока.

В настоящей работе рассматриваются бильярдные потоки в многоугольных областях общего вида. Для таких областей условие отражения бильярдного шара от границы особенно просто, однако наличие угловых точек приводит к тому, что, за несколькими исключениями, бильярд в многоугольнике является динамической системой с особенностями. Ввиду этого изучение эргодических свойств потока оказывается сложной задачей. Общие результаты здесь получены лишь для бильярдных в рациональных многоугольниках.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Многоугольник Q называется *рациональным*, если группа $G(Q)$, порожденная линейными частями отражений относительно сторон Q , конечна. Эквивалентное условие – угол между любыми двумя сторонами многоугольника (не обязательно соседними или принадлежащими одной компоненте границы) рационально соизмерим с π .

Для рационального многоугольника Q фазовое пространство бильярда расщепляется на инвариантные поверхности вида $Q \times G(Q)v$, $v \in S^1$ (см. [5]). Как показали Керкгоф, Мазур и Смайли [1], сужение бильярдного потока на почти каждую из этих поверхностей строго эргодично, т.е. имеет единственную инвариантную нормированную борелевскую меру. В частности, указанные поверхности являются эргодическими компонентами потока. Исходя из этого результата, с помощью аппроксимационных методов было показано (см. [1], [2]), что в пространстве всех многоугольников, а также в тех его замкнутых подпространствах без изолированных точек, где плотны рациональные многоугольники, найдется остаточное множество, состоящее из многоугольников, бильярд в которых эргодичен (т.е. в фазовом пространстве бильярда любое измеримое инвариантное подмножество имеет нулевую или полную меру).

А. М. Стёпин предложил автору попытаться конструктивизировать доказательства сформулированных выше результатов с тем, чтобы получить конкретные примеры многоугольников с эргодическими бильярдными потоками. Результатом таких попыток явилась приводимая ниже теорема 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\delta(N)$ – убывающая к нулю положительная функция натурального аргумента. Скажем, что многоугольник Q допускает *аппроксимацию рациональными многоугольниками* со скоростью $\delta(N)$, если найдутся сколь угодно большие номера N с тем свойством, что попарные углы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ между сторонами многоугольника Q с точностью $\delta(N)$ аппроксимируются углами вида $\pi n/N$, где n – целое число, причем дроби $n_1/N, n_2/N, \dots, n_k/N$, соответствующие разным углам, нельзя сократить на одно и то же число.

ТЕОРЕМА 1. Если многоугольник Q допускает аппроксимацию рациональными многоугольниками со скоростью

$$\delta(N) = \left(2^{2^{2^N}} \right)^{-1},$$

то бильярдный поток в Q эргодичен.

Например, эргодичным будет бильярдный поток в прямоугольном треугольнике с острым углом $\pi(a_5^{-1} + a_{10}^{-1} + \dots + a_{5n}^{-1} + \dots)$, где $\{a_n\}$ – последовательность, заданная соотношениями $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2^{a_n}$ при $n = 0, 1, 2, \dots$.

Остановимся вкратце на основных идеях доказательства теоремы. Оно состоит из двух частей: во-первых, нужно провести конструктивные оценки, касающиеся аппроксимации многоугольников и бильярдных потоков в них – это сравнительно несложно; во-вторых, нужно получить конструктивный вариант эргодической теоремы для бильярдного потока в рациональном

многоугольнике – и здесь заключена главная трудность. Доказательство из [1], в особенности используемые там методы теории Тайхмюллера, не оставляет никаких надежд на конструктивизацию. Поэтому в качестве отправной точки было избрано другое доказательство того же факта, полученное Бошернианом [3] и Мазуром [4]. Конечные результаты излагаются ниже.

Пусть Q – рациональный многоугольник, $\alpha(Q)$ – сумма всех его внутренних углов, $s(Q)$ – длина кратчайшей обобщенной диагонали (т.е. бильярдной траектории с концами в вершинах Q).

Положим также $m(Q) = \frac{|G(Q)| \cdot \alpha(Q)}{2\pi}$ ($m(Q)$ – целое число), $S(Q) = |G(Q)| \cdot \text{Area}(Q)$. Для любой измеримой функции $F(x, v)$ на $Q \times S^1$ обозначим через $S^t F(x, v)$ ее среднее значение за время t под действием бильярдного потока в Q , через $F_0(x, v)$ – предел в смысле сходимости почти всюду функций $S^t F(x, v)$ при $t \rightarrow \infty$:

$$F_0(x, v) = \frac{1}{S(Q)} \sum_{g \in G(Q)} \int_Q F(y, gv) dy.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $L, E > 0$. Предположим, что для любого направления $v \in S^1$ функция $f_v(x) = F(x, v)$ является липшицевой функцией на Q с постоянной Липшица L ; пусть, кроме того, $F(x, v) = 0$ при $x \in \partial Q$ и $|F(x, v)| \leq E$ для всех $x \in Q$, $v \in S^1$. Тогда для любого ε , $0 < \varepsilon \leq 0.999$, имеем:

$$\frac{1}{2\pi \text{Area}(Q)} \int_{Q \times S^1} |S^t F(x, v) - F_0(x, v)| d\mu(x) d\lambda(v) \leq 4E\varepsilon$$

$$\text{при } t \geq \frac{L \cdot S(Q)}{E} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\left(H(m(Q)) \cdot S(Q) / s^2(Q) \cdot 1/\varepsilon \right)^{m(Q)+5}},$$

где $H(1) = 2^{60}$, $H(m) = (500m)^{(2m)^{2m}}$ при $m > 1$, μ – мера Лебега на Q , λ – мера Лебега на S^1 , нормированная так, что $\lambda(S^1) = 2\pi$.

Все (кроме двух особых) инвариантные поверхности $Q \times G(Q)v$ в фазовом пространстве бильярда в Q гомеоморфны некоторой поверхности M и согласованным образом задают на M плоскую структуру – метрику нулевой кривизны с конечным числом особых точек, в каждой из которых имеется коническая особенность с углом вида $2\pi t$, где t – целое число (кратность особой точки). Для доказательства теоремы 2 важно иметь оценку величины $N(L)$ – числа седловых (геодезических отрезков, соединяющих особые точки) на поверхности M , длина которых не больше L (ср. [3]). Оценка в форме $N(L) = O(L^2)$ при $L \rightarrow \infty$ была доказана Мазуром [4]. Конструктивная оценка, полученная автором, такова.

ТЕОРЕМА 3. Пусть m – сумма кратностей особых точек плоской структуры, s – длина кратчайшей седловых связи. Тогда

$$N(L) \leq h(m) \cdot (L/s)^2,$$

где $h(1) = (3 \cdot 2^7)^6$, $h(m) = (400m)^{(2m)^{2m}}$ при $m > 1$.

Автор благодарен проф. А. М. Стёпину за постановку задачи и постоянную поддержку в течение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kerckhoff S., Masur H., Smillie J. // Ann. of Math. 1986. V. 124. № 2. P. 293–311.
 [2] Pospiech F., Stepin A. M. // Wiss. Z. Univ. Halle. 1988. V. 37. № 4. P. 89–98. [3] Boshernitzan M. // Duke Math. J. 1985. V. 52. № 3. P. 723–752. [4] Masur H. // Ergod. Th. & Dynam. Sys. 1990. V. 10. № 1. P. 151–176. [5] Земляков А. Н., Каток А. Б. // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 2. С. 291–300.