Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Бородин, И. А. Ибрагимов, Б. С. Кашин, В. В. Козлов, А. В. Колесников, С. В. Конягин, Е. Д. Косов, О. Г. Смолянов, Н. А. Толмачев, Д. В. Трещев, А. В. Шапошников, С. В. Шапошников, А. Н. Ширяев, А. А. Шкаликов, Владимир Игоревич Богачев (к шестидесятилетию со дня рождения), *УМН*, 2021, том 76, выпуск 6, 201–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9997>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 12:27:50

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Владимир Игоревич Богачев

(к шестидесятилетию со дня рождения)

14 февраля 2021 г. исполнилось шестьдесят лет выдающемуся математику Владимиру Игоревичу Богачеву, профессору кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, профессору факультета математики Высшей школы экономики и кафедры математики факультета информатики и прикладной математики Православного Свято-Тихоновского гуманитарного университета.

В. И. Богачев родился в Москве, его родители работали в оборонной промышленности, непосредственно занимались запусками космических спутников и боевых ракет. Окончив с золотой медалью среднюю школу № 19, где он учился в классе Б. П. Гейдмана, Владимир Игоревич поступил на мехмат МГУ, затем продолжил обучение в аспирантуре под руководством О. Г. Смолянова. Досрочно окончив аспирантуру и защитив кандидатскую диссертацию в 1986 г., начал работу на мехмате МГУ.

Владимир Игоревич является крупнейшим специалистом по теории меры, теории вероятностей, бесконечномерному анализу и уравнениям с частными производными. Им решен ряд трудных проблем, поставленных известными математиками, получены фундаментальные результаты в теории гауссовских распределений, исследованы дифференциальные свойства мер, развито новое направление исследований в теории уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова.

Первые научные работы В. И. Богачева в начале 1980-х годов относились к теории меры на бесконечномерных пространствах и теории дифференцируемых мер, где он продолжил исследования своего учителя О. Г. Смолянова. Заметным успехом Владимира Игоревича стало решение трех проблем Ароншайна из теории бесконечномерных вероятностных распределений. В качестве бесконечномерного аналога множества лебеговской меры нуль Ароншайн ввел такое определение. Для последовательности векторов e_n в сепарабельном банаховом пространстве X класс Ароншайна $\mathfrak{A}(\{e_n\})$ состоит из борелевских множеств A , представимых в виде $A = \bigcup_n A_n$, где каждое A_n – борелевское множество, причем прямые, параллельные e_n , пересекают A_n по множествам линейной меры нуль. Класс Ароншайна $\mathfrak{A}$ есть пересечение

всех $\mathfrak{A}(\{e_n\})$ по всевозможным последовательностям $\{e_n\}$ с всюду плотными линейными оболочками. В случае $\mathbb{R}^n$ из теоремы Фубини следует, что класс Ароншайна и есть класс множеств лебеговской меры нуль. Ароншайн поставил задачу описания мер, равных нулю на классах $\mathfrak{A}(\{e_n\})$ и $\mathfrak{A}$, а также вопрос о существовании вероятностных мер, равных нулю на $\mathfrak{A}$, но имеющих в каждом классе $\mathfrak{A}(\{e_n\})$ множество меры 1; такие меры были названы им исключительными. В.И. Богачев дал положительный ответ на этот вопрос, построив пример исключительной по Ароншайну меры. Кроме того, им был дан критерий обращения меры μ в нуль на классе $\mathfrak{A}(\{e_n\})$: оказалось, что это равносильно непрерывности меры μ вдоль векторов e_n , т.е. непрерывности по t сдвига μ_{te_n} , где $\mu_{te_n}(B) = \mu(B + te_n)$. Методы, развитые при этом, оказались полезными в значительно более широком круге вопросов. Кроме того, в этот период Владимир Игоревич исследовал свойство дифференцируемости мер по Скороходу. Им получен полезный критерий дифференцируемости: мера μ на локально выпуклом пространстве X является дифференцируемой по Скороходу вдоль вектора h , если отображение сдвига $t \mapsto \mu_{th}$ дифференцируемо в слабой топологии. В [4] установлено, что это равносильно липшицевости указанного отображения по вариации. Основные результаты этого периода опубликованы в [1]–[4] и в обзоре [5] в “Успехах математических наук”. В 1991 г. В.И. Богачев стал одним из самых молодых докторов наук, а оппонентами на защите его докторской диссертации выступили выдающиеся математики А.Н. Ширяев, А.В. Скороход и В.Н. Судаков.

В начале 1990-х годов Владимир Игоревич значительно расширил тематику своих научных исследований, обратившись к проблемам стохастического анализа, теории случайных процессов, уравнений с частными производными и теории гауссовских мер. В каждом из перечисленных направлений им получены яркие фундаментальные результаты. В.И. Богачев доказал (см. [6]) высказанную в 1961 г. гипотезу Т. Питчера о дифференцируемости распределений диффузионных процессов, состоявшую в том, что для меры P на пространстве траекторий, порожденной решением стохастического дифференциального уравнения с регулярными коэффициентами, найдутся ненулевые траектории h с тем свойством, что сдвиг $P(\cdot + \alpha h)$ дифференцируем по α (что соответствует введенной позже дифференцируемости С.В. Фомина), лишь в том случае, когда коэффициент диффузии постоянен. Кроме того, им получен ряд глубоких результатов о регулярности распределений функционалов от случайных процессов, в том числе широкие условия гладкости распределений квадратичных форм и интегральных функционалов от диффузионных и гауссовских процессов. Эти исследования внесли весомый вклад в развитие важного направления бесконечномерного анализа, называемого исчислением Маллявэна. Позже результаты по этому направлению вошли в известные монографии В.И. Богачева [10], [21].

Исследования диффузионных процессов в конечномерных и бесконечномерных пространствах привели В.И. Богачева к созданию теории эллиптических и параболических уравнений для мер. Важными примерами таких уравнений являются уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для распределений диффузионных процессов. Так, стационарное распределение μ диффузии в $\mathbb{R}^d$ с переходной полугруппой $\{T_t\}$ и производящим оператором

$$Lf = \sum_{i,j} a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f + \sum_{i=1}^n b^i \partial_{x_i} f$$

удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$L^* \mu = 0, \tag{1}$$

понимаемому в смысле интегрального тождества

$$\int Lf(x) \mu(dx) = 0 \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

При этом стационарное распределение удовлетворяет и тождеству

$$\int f(x) \mu(dx) = \int T_t f(x) \mu(dx), \quad (2)$$

которое, однако, не обязано выполняться для всех решений уравнения (1). Поэтому решения (1) называют инфинитезимально инвариантными мерами. В серии совместных работ с Н. В. Крыловым и М. Рёкнером, а позже и с другими соавторами В. И. Богачев получил принципиальные результаты, которые позволили по-новому взглянуть на многие классические достижения и проблемы теории диффузионных процессов. В частности, эффективность развитых при этом методов была продемонстрирована решением известной проблемы Варадана о единственности стационарных распределений, остававшейся открытой в течение 20 лет и доказанной В. И. Богачевым совместно с С. Альбеверио и М. Рёкнером: в работе [12] показано, что в случае невырожденной матрицы диффузии из класса Соболева имеется не более одной вероятностной меры, удовлетворяющей (2). Важно отметить, что в работе [16] дан отрицательный ответ на другой долго стоявший вопрос о единственности вероятностных решений уравнения (1). Таким образом, оказалось, что проблемы единственности для (1) и (2) не равносильны. В получившей значительное цитирование работе [8] доказана известная гипотеза Шигекавы об абсолютной непрерывности инвариантных мер диффузионных процессов, коэффициенты сноса которых являются возмущениями коэффициента сноса процесса Орнштейна–Уленбека векторными полями из пространства Камерона–Мартин. Исследования В. И. Богачева выявили ряд неожиданных бесконечномерных эффектов в поведении таких процессов. В частности, были построены примеры диффузионных процессов с единичным коэффициентом диффузии, имеющих гладкие инвариантные меры, которые взаимно сингулярны со всеми гауссовскими мерами. Кроме того, был построен первый пример гауссовской диффузии с единичным коэффициентом диффузии и непрерывным линейным сносом, для которой имеется несколько инвариантных мер.

В работах В. И. Богачева с соавторами (см. [13], [15], [22], [30] и монографию [26]) получены основополагающие результаты о существовании плотностей решений невырожденных эллиптических и параболических уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова и точных свойствах регулярности этих плотностей, достигнуты значительные продвижения в решении поставленных А. Н. Колмогоровым проблем о существовании и единственности решений таких уравнений, а именно найдены широкие достаточные условия существования решений, эффективно проверяемые условия единственности, а также построены первые примеры неединственности для невырожденных уравнений с гладкими коэффициентами. В недавней работе [39] дан ответ на вопрос Колмогорова о единственности решения задачи Коши: показано, что задача Коши для параболического уравнения с единичным коэффициентом диффузии и локально ограниченным сносом имеет единственное вероятностное решение на $\mathbb{R}^1$, а в $\mathbb{R}^d$ при $d > 1$ это неверно даже для гладкого сноса. Важные новые результаты о нелинейных уравнениях Фоккера–Планка–Колмогорова получены в [29] и [36].

Довольно долго не удавалось выяснить что-либо о регулярности плотностей решений стационарных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова при одном лишь предположении интегрируемости коэффициента сноса относительно решения: результаты о включении в класс Соболева были получены при более высокой интегрируемости. Лишь в недавней работе [35] дано отрицательное решение этой проблемы путем построения примера, в котором плотность решения имеет неинтегрируемый градиент. Однако в [37] показано, что интегрируемость коэффициента сноса все же влечет некий аналог логарифмического неравенства Соболева. Надо отметить, что при изучении уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова возникает немало задач, относящихся

к классам Соболева и их обобщениям в конечномерных и бесконечномерных пространствах, и здесь В. И. Богачевым также были получены яркие результаты. Упомянем лишь один: в работе [27] построен первый пример выпуклой области в гильбертовом пространстве, на которой есть функции из класса Соболева по гауссовской мере, не имеющие соболевских продолжений на все пространство. Остается открытым вопрос о существовании продолжений с шара.

Параллельно с построением теории уравнений с частными производными для распределений диффузионных процессов Владимир Игоревич ведет плодотворные исследования в области теории меры, в том числе в теории гауссовских мер. В работе [7] дан положительный ответ на вопрос К. Ито и П. Маллявэна: показано, что емкости, порожденные соболевскими классами по радоновской гауссовской мере, сосредоточены на счетных объединениях компактов.

В 2006 г. В. И. Богачевым с соавторами в работе [20] получены утвердительные ответы на стоявшие более десяти лет открытые вопросы, а именно доказано существование липшицевой функции на бесконечномерном сепарабельном банаховом пространстве X , свертка которой с невырожденной гауссовской мерой γ почти всюду не имеет производной Фреше вдоль X , и существование липшицевой вдоль H функции на X , не имеющей γ -почти всюду производной Фреше вдоль H . Здесь H – всюду плотное в X бесконечномерное пространство Камерона–Мартина для меры γ .

В работе [19] получен фундаментальный результат о существовании преобразования гирсановского типа меры Винера P_W на пространстве непрерывных функций $C[0, 1]$ во всякую абсолютно непрерывную относительно нее вероятностную меру Q : установлено, что Q можно получить как образ P_W при некотором отображении вида $T(x) = x + F(x)$, где $F(x)(t) = \int_0^t f(x)(s) ds$ и f есть борелевское отображение из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$. Поставленный М. Закаем вопрос об этом оставался открытым долгое время, а классический результат Гирсанова дает обратное утверждение: абсолютно непрерывность образа меры Винера при таких преобразованиях. К теории гауссовских мер относится и яркий результат из [11] о существовании функции Онзагера–Маклупа для произвольных измеримых полунорм, т. е. существование предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma_1(q \leq \varepsilon)}{\gamma_2(q \leq \varepsilon)}$$

для эквивалентных гауссовских мер γ_1 и γ_2 и измеримой полунормы q . Это дало окончательное решение проблемы, изучавшейся Л. Шеппом, О. Зейтуни, К. Ферником и другими авторами.

В работе [14] изучена открытость отображения между пространствами вероятностных мер $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(Y)$, порожденного открытым отображением между пространствами X и Y . Развитые там идеи позволили дать короткое топологическое доказательство известного результата Блэкуэлла–Дубинса–Ферника о параметризации Скорохода $\xi \mapsto \mu_\xi$ вероятностных мер на метрическом пространстве X борелевскими отображениями из $[0, 1]$ в X с тем свойством, что слабая сходимость мер μ_{ξ_n} к мере μ_ξ равносильна сходимости отображений ξ_n к ξ почти всюду. Исходный результат Скорохода давал параметризацию фиксированной последовательности. Одновременная параметризация всех мер оказалась полезным инструментом во многих задачах. В той же работе [14] введен и исследован класс топологических пространств, для которых пространства мер допускают параметризацию отображениями. С топологической теорией меры связаны и недавние работы [40] и [38].

Значительный интерес исследователей и большое число цитирований вызвала работа [9], в которой введено плодотворное обобщение классической полугруппы Орнштейна–Уленбека; по этой тематике опубликован также обзор [32] в “Успехах математических наук”. В недавней работе [34] со своими учениками В. И. Богачев установил,

что распределение всякого непостоянного многочлена степени d от гауссовских случайных величин входит в класс Никольского–Бесова с индексом $1/d$ независимо от числа переменных многочлена. Распределениям многочленов на многомерных и бесконечномерных пространствах с мерами посвящен также обзор [28].

Еще одна область исследований В. И. Богачева относится к задачам Монжа и Канторовича. По этому направлению к 100-летию Л. В. Канторовича был опубликован обзор [24] в “Успехах математических наук”. Среди достижений В. И. Богачева следует отметить решение проблемы о нахождении точных условий равенства значений в задачах Монжа и Канторовича. Задача Монжа состоит в том, что для данных вероятностных мер μ и ν на пространствах X и Y и функции стоимости $h \geq 0$ на $X \times Y$ рассматриваются отображения T , переводящие μ в ν , и по таким отображениям берется инфимум интеграла

$$\int_X h(x, T(x)) \mu(dx).$$

Задача Канторовича при тех же данных состоит в минимизации интеграла от h по вероятностным мерам σ на $X \times Y$, проекции которых на X и Y есть μ и ν соответственно. Как заметил Л. Амброзио, часто инфимум задачи Монжа равен минимуму в задаче Канторовича. Позже было показано, что это верно для безатомических мер и непрерывных функций стоимости на полных сепарабельных метрических (или даже суслинских) пространствах. В. И. Богачевым с его учениками удалось показать, что равенство остается в силе для сепарабельных безатомических радоновских мер на общих вполне регулярных пространствах, а также построить пример, когда равенство нарушается. В недавней работе [40] установлено существование измеримых по параметру решений задачи Канторовича, в которой функция стоимости и маргинальные распределения измеримо зависят от данного параметра. В работах [18], [25] преобразования гирсановского типа для мер, абсолютно непрерывных относительно заданной гауссовской меры γ , изучались с точки зрения задачи Монжа–Канторовича: для пары мер $\mu = f \cdot \gamma$, $\nu = g \cdot \gamma$ рассмотрены преобразования вида $F(x) = x + \nabla \varphi(x)$, переводящие μ в ν , где функция φ возникает из решения соответствующей двойственной задачи Канторовича.

Значительным вкладом В. И. Богачева в теорию меры, бесконечномерный анализ и теорию уравнений с частными производными стали его книги, получившие широкую известность во всем мире. Авторитетными руководствами по теории меры, теории вероятностей и функциональному анализу стали монографии [10], [21], [31], [33], а фундаментальные результаты исследований по уравнениям Фоккера–Планка–Колмогорова изложены в [26]. Кроме того, Владимир Игоревич является автором известных учебников [23], [17], выдержавших уже несколько переизданий.

В. И. Богачев имеет более 250 научных работ, в том числе 15 монографий. Он был приглашенным докладчиком на многих крупных международных конференциях и читал лекции более чем в 100 университетах мира. Руководимые им научные проекты неоднократно получали гранты российских и международных научных конкурсов. Научные достижения В. И. Богачева отмечены медалью и премией для молодых ученых Президиума АН СССР, премией Японского Общества развития науки, премией им. А. Н. Колмогорова РАН.

Владимир Игоревич ведет активную педагогическую работу, читает разнообразные обязательные и специальные курсы, руководит известным научным семинаром “Бесконечномерный анализ и стохастика”, более 30 лет организует и проводит студенческие математические олимпиады. Среди его учеников 3 доктора наук и более 20 кандидатов наук. Ученики с благодарностью отмечают внимательное отношение Владимира Игоревича, его участие и помощь в преодолении не только научных и образовательных трудностей, но и житейских проблем. Большую помощь Владимиру

Игоревичу во всех его трудах оказывает его супруга Анна Николаевна. У них есть сыновья Николай и Тихон, оба – математики.

Поздравляем Владимира Игоревича с шестидесятилетием и желаем ему крепкого здоровья и новых творческих успехов.

П. А. Бородин, И. А. Ибрагимов, Б. С. Кашин, В. В. Козлов,
А. В. Колесников, С. В. Конягин, Е. Д. Косов, О. Г. Смолянов,
Н. А. Толмачев, Д. В. Трещев, А. В. Шапошников,
С. В. Шапошников, А. Н. Ширяев, А. А. Шкаликос

Список цитированных работ В. И. Богачева

- [1] В. И. Богачев, “Пренебрежимые множества и дифференцируемые меры в банаховых пространствах”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1982, № 3, 47–52; англ. пер.: V. I. Bogachev, “Negligible sets and differentiable measures in Banach spaces”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **37**:3 (1982), 54–59.
- [2] В. И. Богачев, “О трех задачах Ароншайна из теории меры”, *Функц. анализ и его прил.*, **18**:3 (1984), 75–76; англ. пер.: V. I. Bogachev, “Three problems of Aronszajn in measure theory”, *Funct. Anal. Appl.*, **18**:3 (1984), 242–244.
- [3] В. И. Богачев, “Несколько результатов о дифференцируемых мерах”, *Матем. сб.*, **127**(169):3(7) (1985), 336–351; англ. пер.: V. I. Bogachev, “Some results on differentiable measures”, *Math. USSR-Sb.*, **55**:2 (1986), 335–349.
- [4] В. И. Богачев, “О дифференцируемости мер по Скороходу”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **33**:2 (1988), 349–354; англ. пер.: V. I. Bogachev, “On Skorokhod differentiability of measures”, *Theory Probab. Appl.*, **33**:2 (1988), 330–334.
- [5] В. И. Богачев, О. Г. Смолянов, “Аналитические свойства бесконечномерных вероятностных распределений”, *УМН*, **45**:3(273) (1990), 3–83; англ. пер.: V. I. Bogachev, O. G. Smolyanov, “Analytic properties of infinite-dimensional distributions”, *Russian Math. Surveys*, **45**:3 (1990), 1–104.
- [6] В. И. Богачев, “Функционалы от случайных процессов и связанные с ними бесконечномерные осциллирующие интегралы”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:2 (1992), 243–278; англ. пер.: V. I. Bogachev, “Functionals of random processes and infinite-dimensional oscillatory integrals connected with them”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **40**:2 (1993), 235–266.
- [7] V. I. Bogachev, M. Röckner, “Les capacités gaussiennes sont portées par des compacts métrisables”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **315**:2 (1992), 197–202.
- [8] V. I. Bogachev, M. Röckner, “Regularity of invariant measures on finite and infinite dimensional spaces and applications”, *J. Funct. Anal.*, **133**:1 (1995), 168–223.
- [9] V. I. Bogachev, M. Röckner, B. Schmulland, “Generalized Mehler semigroups and applications”, *Probab. Theory Related Fields*, **105**:2 (1996), 193–225.
- [10] В. И. Богачев, *Гауссовские меры*, Наука, М., 1997, 352 с.; англ. пер.: V. I. Bogachev, *Gaussian measures*, Math. Surveys Monogr., **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, xii+433 pp.
- [11] В. И. Богачев, “О проблеме малых шаров для эквивалентных гауссовских мер”, *Матем. сб.*, **189**:5 (1998), 47–68; англ. пер.: V. I. Bogachev, “On the small balls problem for equivalent Gaussian measures”, *Sb. Math.*, **189**:5 (1998), 683–705.
- [12] S. Albeverio, V. Bogachev, M. Röckner, “On uniqueness of invariant measures for finite- and infinite-dimensional diffusions”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **52**:3 (1999), 325–362.

- [13] В. И. Богачёв, М. Рёкнер, “Обобщение теоремы Хасьминского о существовании инвариантных мер для локально интегрируемых сносов”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **45**:3 (2000), 417–436; англ. пер.: V. Bogachev, M. Röckner, “A generalization of Khasminskii’s theorem on the existence of invariant measures for locally integrable drifts”, *Theory Probab. Appl.*, **45**:3 (2001), 363–378.
- [14] В. И. Богачев, А. В. Колесников, “Открытые отображения вероятностных мер и теорема представления Скорохода”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **46**:1 (2001), 3–27; англ. пер.: V. I. Bogachev, A. V. Kolesnikov, “Open mappings of probability measures and the Skorokhod representation theorem”, *Theory Probab. Appl.*, **46**:1 (2002), 20–38.
- [15] V. I. Bogachev, N. V. Krylov, M. Röckner, “On regularity of transition probabilities and invariant measures of singular diffusions under minimal conditions”, *Comm. Partial Differential Equations*, **26**:11–12 (2001), 2037–2080.
- [16] В. И. Богачев, М. Рёкнер, В. Штатнат, “Единственность решений эллиптических уравнений и единственность инвариантных мер диффузий”, *Матем. сб.*, **193**:7 (2002), 3–36; англ. пер.: V. I. Bogachev, M. Röckner, W. Stannat, “Uniqueness of solutions of elliptic equations and uniqueness of invariant measures of diffusions”, *Sb. Math.*, **193**:7 (2002), 945–976.
- [17] В. И. Богачев, *Основы теории меры*, т. 1, 2, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.–Ижевск, 2003, 544 с., 576 с.; 2-е изд., 2006, 584 с., 680 с.; 3-е изд., 2020, 584 с., 688 с.; англ. пер.: V. I. Bogachev, *Measure theory*, v. I, II, Springer-Verlag, Berlin, 2007, xviii+500 pp., xiv+575 pp.
- [18] V. I. Bogachev, A. V. Kolesnikov, “On the Monge–Ampère equation in infinite dimensions”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **8**:4 (2005), 547–572.
- [19] В. И. Богачев, А. В. Колесников, К. В. Медведев, “Треугольные преобразования мер”, *Матем. сб.*, **196**:3 (2005), 3–30; англ. пер.: V. I. Bogachev, A. V. Kolesnikov, K. V. Medvedev, “Triangular transformations of measures”, *Sb. Math.*, **196**:3 (2005), 309–335.
- [20] В. И. Богачев, Э. Приола, Н. А. Толмачев, “О дифференцируемости по Фреше липшицевых функций на пространствах с гауссовскими мерами”, *Докл. РАН*, **414**:2 (2007), 151–155; англ. пер.: V. I. Bogachev, È. Priola, N. A. Tolmachev, “On Fréchet differentiability of Lipschitzian functions on spaces with Gaussian measures”, *Dokl. Math.*, **75**:3 (2007), 353–357.
- [21] В. И. Богачев, *Дифференцируемые меры и исчисление Маллявина*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.–Ижевск, 2008, 544 с.; англ. пер.: V. I. Bogachev, *Differentiable measures and the Malliavin calculus*, Math. Surveys Monogr., **164**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, xvi+488 pp.
- [22] В. И. Богачев, Н. В. Крылов, М. Рёкнер, “Эллиптические и параболические уравнения для мер”, *УМН*, **64**:6(390) (2009), 5–116; англ. пер.: V. I. Bogachev, N. V. Krylov, M. Röckner, “Elliptic and parabolic equations for measures”, *Russian Math. Surveys*, **64**:6 (2009), 973–1078.
- [23] В. И. Богачев, О. Г. Смолянов, *Действительный и функциональный анализ: университетский курс*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.–Ижевск, 2009, 724 с.; 2-е изд., 2011, 728 с.; 3-е изд., 2020, 756 с.; англ. пер.: V. I. Bogachev, O. G. Smolyanov, *Real and functional analysis*, Mosc. Lect., **4**, Springer, Cham, 2020, 586 pp.
- [24] В. И. Богачев, А. В. Колесников, “Задача Монжа–Канторовича: достижения, связи и перспективы”, *УМН*, **67**:5(407) (2012), 3–110; англ. пер.: V. I. Bogachev, A. V. Kolesnikov, “The Monge–Kantorovich problem: achievements, connections, and perspectives”, *Russian Math. Surveys*, **67**:5 (2012), 785–890.

- [25] V. I. Bogachev, A. V. Kolesnikov, “Sobolev regularity for the Monge–Ampère equation in the Wiener space”, *Kyoto J. Math.*, **53**:4 (2013), 713–738.
- [26] В. И. Богачев, Н. В. Крылов, М. Рёкнер, С. В. Шапошников, *Уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.–Ижевск, 2013, 592 с.; англ. пер.: V. I. Bogachev, N. V. Krylov, M. Röckner, S. V. Shaposhnikov, *Fokker–Planck–Kolmogorov equations*, Math. Surveys Monogr., **207**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015, xii+479 pp.
- [27] V. I. Bogachev, A. Yu. Pilipenko, A. V. Shaposhnikov, “Sobolev functions on infinite-dimensional domains”, *J. Math. Anal. Appl.*, **419**:2 (2014), 1023–1044.
- [28] В. И. Богачев, “Распределения многочленов на многомерных и бесконечномерных пространствах с мерами”, *УМН*, **71**:4(430) (2016), 107–154; англ. пер.: V. I. Bogachev, “Distributions of polynomials on multidimensional and infinite-dimensional spaces with measures”, *Russian Math. Surveys*, **71**:4 (2016), 703–749.
- [29] V. I. Bogachev, M. Röckner, S. V. Shaposhnikov, “Distances between transition probabilities of diffusions and applications to nonlinear Fokker–Planck–Kolmogorov equations”, *J. Funct. Anal.*, **271**:5 (2016), 1262–1300.
- [30] V. I. Bogachev, S. V. Shaposhnikov, “Integrability and continuity of solutions to double divergence form equations”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **196**:5 (2017), 1609–1635.
- [31] V. I. Bogachev, O. G. Smolyanov, *Topological vector spaces and their applications*, Springer Monogr. Math., Springer, Cham, 2017, x+456 pp.
- [32] В. И. Богачев, “Операторы и полугруппы Орнштейна–Уленбека”, *УМН*, **73**:2(440) (2018), 3–74; англ. пер.: V. I. Bogachev, “Ornstein–Uhlenbeck operators and semigroups”, *Russian Math. Surveys*, **73**:2 (2018), 191–260.
- [33] V. I. Bogachev, *Weak convergence of measures*, Math. Surveys Monogr., **234**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018, xii+286 pp.
- [34] V. I. Bogachev, E. D. Kosov, G. I. Zelenov, “Fractional smoothness of distributions of polynomials and a fractional analog of the Hardy–Landau–Littlewood inequality”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **370**:6 (2018), 4401–4432.
- [35] V. I. Bogachev, S. N. Popova, S. V. Shaposhnikov, “On Sobolev regularity of solutions to Fokker–Planck–Kolmogorov equations with drifts in L^1 ”, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.*, **30**:1 (2019), 205–221.
- [36] V. I. Bogachev, M. Röckner, S. V. Shaposhnikov, “Convergence in variation of solutions of nonlinear Fokker–Planck–Kolmogorov equations to stationary measures”, *J. Funct. Anal.*, **276**:12 (2019), 3681–3713.
- [37] V. I. Bogachev, A. V. Shaposhnikov, S. V. Shaposhnikov, “Log-Sobolev-type inequalities for solutions to stationary Fokker–Planck–Kolmogorov equations”, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **58**:5 (2019), 176, 16 pp.
- [38] В. И. Богачев, “Неравномерные усреднения Козлова–Трещева в эргодической теореме”, *УМН*, **75**:3(453) (2020), 3–36; англ. пер.: V. I. Bogachev, “Non-uniform Kozlov–Treschev averagings in the ergodic theorem”, *Russian Math. Surveys*, **75**:3 (2020), 393–425.
- [39] В. И. Богачев, Т. И. Красовицкий, С. В. Шапошников, “Задача Колмогорова о единственности вероятностных решений параболического уравнения”, *Докл. РАН. Мат. информ. проц. упр.*, **495**:1 (2020), 22–25; англ. пер.: V. I. Bogachev, T. I. Krasovitskii, S. V. Shaposhnikov, “The Kolmogorov problem on uniqueness of probability solutions of a parabolic equation”, *Dokl. Math.*, **102**:3 (2020), 464–467.
- [40] V. I. Bogachev, I. I. Malofeev, “Kantorovich problems and conditional measures depending on a parameter”, *J. Math. Anal. Appl.*, **486**:1 (2020), 123883, 30 pp.