A. N. Artyushin, A boundary value problem for a 3rd order equation with a changing direction of evolution,
Sib. Èlektron. Mat. Izv., 2019, Volume 16, 2003–2012

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 2003–2012 (2019) УДК 517.95

DOI 10.33048/semi.2019.16.143 MSC 35G16

О РЕГУЛЯРНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

А.Н. АРТЮШИН

Abstract. We examine a boundary value problem for a 3rd order equation with a changing direction of evolution. Under certain conditions, the existence of regular solutions in a suitable weighted Sobolev space is proven by regularization. The uniqueness of a generalized solution is also established as a consequence.

Keywords: mixed type equations, equations with a changing direction of evolution.

1. Введение.

Пионерские работы [1], [2] положили начало целому направлению в исследовании постановок корректных задач для уравнений смешанного типа и уравнений с меняющимся направлением эволюции в цилиндрических областях. В дальнейшем, предложенные постановки обобщались для уравнений высокого порядка, для различных краевых условий, для операторных уравнений и для уравнений неклассического типа. Библиографию вопроса можно найти в монографии [3]. Среди последних работ можно отметить [4], [5].

Следует отметить, что в случае, когда уравнение меняет тип в некоторых точках на торцах цилиндра, возникают особые трудности. Из самых общих соображений ясно, что в таких точках должны возникать проблемы с гладкостью решений. Так, например, для существования регулярных решений могут

Artyushin, A.N., A boundary value problem for a 3rd order equation with a changing direction of evolution.

Работа поддержана РФФИ (грант 18—51—41009).

Поступила 6 мая 2019 г., опубликована 26 декабря 2019 г.

потребоваться дополнительные условия ортогональности (см., например, [6, с. 355, с. 383]). Кроме того, возникают проблемы с приближениями решений гладкими функциями. Как следствие — не удается доказать единственность обобщенного решения. Все эти трудности привели к тому, что во многих работах случаи смены типа уравнения (или направления эволюции) в указанных граничных точках не рассматриваются.

В работе [7], по-видимому, впервые удалось справиться со всеми проблемами и доказать существование регулярных решений (в весовых пространствах Соболева) в достаточно общем случае для параболических уравнений высокого порядка. При определенных условиях также была доказана единственность обобщенного решения. В работе [8] также удалось продвинуться вперед и для уравнений смешанного типа. С помощью специальной регуляризации было построено решение краевой задачи для уравнения второго порядка смешанного типа в весовых пространствах Соболева. Кроме того, было предложено новое определение обобщенного решения. По сравнению со стандартным, оно ограничивает класс возможных обобщенных решений, что, в конечном итоге, позволило доказать теорему единственности.

В настоящей работе мы применим подход из работы [8] к уравнению третьего порядка с меняющимся направлением времени. С помощью специальной регуляризации будет доказано существование регулярных решений в некоторых весовых пространствах Соболева.

Пусть $\Omega \subset R^m$ — ограниченная область с границей Γ класса C^2, $Q = \Omega \times (0,1)$, $S = \Gamma \times (0,1)$. В цилиндре Q рассматриваем задачу **(L)**

$$
\begin{gathered}
(k(x,t)u_{tt})_t + \alpha(x,t)u_{tt} + \Delta u - c(x,t)u = f(x,t), \\
u(x,t)\big|_S = 0, \\
u(x,0) = 0, \\
u(x,1) = 0, \\
u_t(x,0)\big|_{\Omega_0^+} = 0, \\
u_t(x,1)\big|_{\Omega_1^-} = 0,
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где множества $\Omega_0^\pm, \Omega_1^\pm$ определяются стандартным образом в зависимости от знака функций $k(x,0), k(x,1)$

$$
\begin{aligned}
\Omega_0^+ &= \{x \in \Omega |\, k(x,0) > 0\}, \quad \Omega_0^- = \{x \in \Omega |\, k(x,0) < 0\}, \\
\Omega_1^+ &= \{x \in \Omega |\, k(x,1) > 0\}, \quad \Omega_1^- = \{x \in \Omega |\, k(x,1) < 0\},
\end{aligned}
$$

Как уже отмечалось, ранее задачи такого вида рассматривались многими авторами. Основное условие, при котором было установлено существование обобщенного решения задачи **(L)** из пространства $\mathring{W}_2^1(Q)$ — условие

$$
2\alpha(x,t) - k_t(x,t) \geqslant \delta_0 > 0, \quad (x,t) \in \bar{Q}
\tag{1.2}
$$

Единственность была доказана лишь в классе гладких решений. А для существования регулярного решения помимо гладкости функции $f(x,t)$ требовались дополнительные условия знакоопределенности функций $k(x,0)$ и $k(x,1)$. В настоящей работе мы полностью отказываемся от этих условий. Кроме этого, ниже будет дано новое определение обобщенного решения, и доказана теорема единственности.

2. Обозначения и определения.

Будем предполагать, что $k(x,t) \in C^2(\bar{Q})$, $\alpha(x,t) \in C^1(\bar{Q})$. Введем обозначения: $k_0(x) = k(x,0)$, $k_1(x) = k(x,1)$. Далее, как обычно определяем положительную и отрицательную срезывающие функции

$$k_0^+(x) = \begin{cases} k_0(x), \text{ если } k_0(x) > 0, \\ 0, \text{ если } k_0(x) \leqslant 0, \end{cases}$$

$k_0^-(x) = k_0(x) - k_0^+(x)$. Аналогичным образом определяются $k_1^+(x)$, $k_1^-(x)$, $k^+(x,t)$, $k^-(x,t)$.

Определим пространство V следующим образом

$$V = \{v(x,t) \in \mathring{W}_2^1(Q) |\ v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\}.$$

Функцию $u(x,t) \in \mathring{W}_2^1(Q)$ назовем обобщенным решением задачи **(L)** если найдутся функции $\chi_0(x), \chi_1(x)$ из пространства $L_2(\Omega)$ такие, что для любой функции $\varphi(x,t)$ из пространства V выполнено тождество

$$\int\limits_Q (u_t(k\varphi_t)_t - u_t(\alpha\varphi)_t - \nabla u \nabla \varphi - cu\varphi)\, dQ = \int\limits_Q f\varphi\, dQ \ +$$
$$\int\limits_{\Omega_1^+} \sqrt{|k_1(x)|}\chi_1(x)\varphi_t(x,1)\, dx + \int\limits_{\Omega_0^-} \sqrt{|k_0(x)|}\chi_0(x)\varphi_t(x,0)\, dx.$$

Как уже говорилось выше, наше определение обобщенного решения несколько отличается от определения из [3]. Стандартное определение предполагает, что следы пробных функций $\varphi(x,0)$ и $\varphi(x,1)$ обращаются в нуль на Ω_0^- и Ω_1^+ соответственно. Мы отказываемся от такого предположения и тем самым расширяем класс пробных функций. При этом класс возможных обобщенных решений может лишь сузиться. Как мы увидим далее, такой подход позволяет доказать теорему единственности. Однако теперь, после умножения уравнения (1.1) на пробную функцию $\varphi(x,t)$ и формального интегрирования по частям, возникают слагаемые

$$\int\limits_{\Omega_1^+} k_1(x)u_t(x,1)\varphi_t(x,1)\, dx, \quad \int\limits_{\Omega_0^-} k_0(x)u_t(x,0)\varphi_t(x,0)\, dx.$$

Если формально обозначить

$$\chi_0(x) = \sqrt{|k_0(x)|}u_t(x,0), \quad \chi_1(x) = \sqrt{|k_1(x)|}u_t(x,1),$$

то в результате получится интегральное тождество, указанное выше. Иными словами, наше определение обобщенного решения неявно предполагает существование следов

$$\sqrt{|k_0(x)|}u_t(x,0), \sqrt{|k_1(x)|}u_t(x,1) \in L_2(\Omega).$$

Теперь определим весовые пространства. Пусть

$$\tilde{K} = \{(x,t) \in \bar{Q} | k(x,t) \neq 0\},$$

и $d_0(x,t) = \rho(x,t,\tilde{K})$ — расстояние от точки $(x,t) \in \bar{Q}$ до множества $\tilde{K}$. Пусть C_K — множество функций $v(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q) \bigcap W_2^2(Q)$, обладающих обобщенной производной $v_{ttt}(x,t) \in L_2(Q)$. Положим W_K — замыкание C_K по норме

$$\|u\|^2_{W_K} = \|u\|^2_{W_2^1(Q)} + \int\limits_Q (k^2(x,t) + d_0^2(x,t))(u_{tt}^2(x,t) + |\nabla u_t(x,t)|^2 + |\Delta u(x,t)|^2)\, dQ.$$

Отметим, что вес $k^2(x,t) + d_0^2(x,t)$ не равен нулю на плотном в Q множестве точек. Далее, определим функции $R_0(x)$, $R_1(x)$ следующим образом. Если $\Omega_0^+ = \varnothing$, то $R_0(x) = 1$. В противном случае $R_0(x) = k_0^2(x) + \rho^2(x,\Omega_0^+)$, где $\rho(x,\Omega_0^+)$ — расстояние от точки x до множества Ω_0^+. Аналогично этому, $R_1(x) = 1$, если $\Omega_1^- = \varnothing$. В противном случае $R_1(x) = k_1^2(x) + \rho^2(x,\Omega_1^-)$. Наконец, положим

$$R(x,t) = R_0(x)(1-t)^2 + R_1(x)t^2 + t^2(1-t)^2.$$

Определим пространство W_R как замыкание C_K по норме

$$\|u\|^2_{W_R} = \|u\|^2_{W_2^1(Q)} + \int\limits_Q (k^2(x,t) + R(x,t))(u_{tt}^2(x,t) + |\nabla u_t(x,t)|^2 + |\Delta u(x,t)|^2)\, dQ.$$

Стоит отметить, что $k^2(x,t) + R(x,t) > 0$ для всех $(x,t) \in Q$.

3. Разрешимость краевой задачи.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (1.2) и для некоторой достаточно большой константы $c_0 > 0$ для $(x,t) \in \bar{Q}$ справедливо неравенство $c(x,t) \geqslant c_0$. Тогда для любой функции $f(x,t) \in W_2^{-1}(Q)$ существует единственное обобщенное решение задачи **(L)**. Если $f(x,t) \in L_2(Q)$, то обобщенное решение $u(x,t)$ принадлежит пространству W_K. Если же дополнительно выполнено условие*

$$2\alpha(x,t) + k_t(x,t) \geqslant \delta_1 > 0, \quad (x,t) \in \bar{Q}, \tag{3.1}$$

то $u(x,t) \in W_R$.

Доказательство. Мы используем метод регуляризации, предложенный в [8]. Пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ с некоторым фиксированным ε_0. Всюду ниже, если не отмечено противное, константы C в различных неравенствах могут зависеть от ε_0, но не зависят от ε.

Рассмотрим следующую задачу $(\mathbf{Aux}_\varepsilon)$

$$-\varepsilon u_{tttt} + (ku_{tt})_t + \alpha u_{tt} + \Delta u - cu = f, \tag{3.2}$$

$$u(x,t)\big|_S = 0,$$

$$u(x,0) = u(x,1) = 0,$$

$$-\varepsilon u_{tt}(x,0) + k_0^+(x)u_t(x,0) = 0, \tag{3.3}$$

$$-\varepsilon u_{tt}(x,1) + k_1^-(x)u_t(x,1) = 0. \tag{3.4}$$

Разрешимость этой задачи будем доказывать с помощью метода Галеркина со специальным базисом. Пусть $\{w_k\}_{k\in N}$ — система собственных функций задачи

$$-\Delta w_k = \lambda_k w_k,$$
$$w_k(x)\big|_\Gamma = 0,$$

ортонормированная в $L_2(\Omega)$. Для всякого $n > 0$ через $E_n \subset L_2(\Omega)$ обозначим подпространство функций, натянутое на вектора $w_k, k = \overline{1,n}$. А через P_n обозначим ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на пространство E_n.

В пространстве $L_2(0,T;E_n)$ рассмотрим следующую задачу

$$-\varepsilon v_{tttt} + P_n((kv_{tt})_t + \alpha v_{tt} - cv) + \Delta v = f_n, \tag{3.5}$$
$$v(x,0) = v(x,1) = 0,$$
$$-\varepsilon v_{tt}(x,0) + P_n(k_0^+(x)v_t(x,0)) = 0, \tag{3.6}$$
$$-\varepsilon v_{tt}(x,1) + P_n(k_1^-(x)v_t(x,1)) = 0. \tag{3.7}$$

Здесь $f_n(x,t) \in L_2(0,T;E_n)$ такова, что

$$f_n(x,t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x,t) \quad \text{сильно в } W_2^{-1}(Q).$$

Данная задача представляет собой систему ОДУ относительно коэффициентов $a_k(t)$, определяемых из равенства

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) w_k(x).$$

Умножим уравнение (3.5) на $-2v(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Интегрируя по частям и учитывая (3.6), (3.7), получаем

$$\int\limits_\Omega (|k_0|v_t^2(x,0) + |k_1|v_t^2(x,1)\,dx + 2\int\limits_Q (\varepsilon v_{tt}^2 + cv^2)\,dQ +$$
$$\int\limits_Q ((2\alpha - k_t)v_t^2 + 2|\nabla v|^2)\,dQ \leqslant C\|f_n\|_{W_2^{-1}(Q)}\|u\|_{W_2^1(Q)}.$$

А значит в силу условия теоремы имеет место оценка

$$\|u\|^2_{W_2^1(Q)} + \int\limits_\Omega (|k_0|v_t^2(x,0) + |k_1|v_t^2(x,1))\,dx + \varepsilon\int\limits_Q v_{tt}^2\,dQ \leqslant C\|f_n\|^2_{W_2^{-1}(Q)}. \tag{3.8}$$

Отсюда следует единственность решения задачи (3.5)–(3.7), а вместе с ней и разрешимость этой задачи. Более того, из оценки (3.8) вытекает существование обобщенного решения задачи **(L)**. Все рассуждения стандартные и мы их опускаем (см, например, доказательство теоремы 3.1 в [8]). Всюду далее считаем, что $f(x,t) \in L_2(Q)$ и $f_n(x,t) = P_n(f(x,t))$.

Умножим уравнение (3.5) на $\varepsilon\Delta v$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Пусть $\nu > 0$. Тогда с помощью (3.8) получаем

$$\varepsilon\int\limits_Q (|\Delta v|^2 + \alpha|\nabla v_t|^2)\,dQ + \varepsilon\int\limits_Q (\varepsilon v_{ttt} - kv_{tt})\Delta v_t\,dQ$$
$$\leqslant C(\nu) + \nu\varepsilon\int\limits_Q (|\Delta v|^2 + |\nabla v_t|^2)\,dQ.$$

Второе слагаемое интегрируем по частям

$$\varepsilon\int\limits_Q(|\Delta v|^2+(\alpha-k_t/2)|\nabla v_t|^2)\,dQ+\varepsilon^2\int\limits_Q|\nabla v_{tt}|^2\,dQ+$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega(|k_0||\nabla v_t(x,0)|^2+|k_1||\nabla v_t(x,1)|^2)\,dx\leqslant C(\nu)+2\nu\varepsilon\int\limits_Q(|\Delta v|^2+|\nabla v_t|^2)\,dQ+$$

$$C\varepsilon\int\limits_\Omega(|v_t(x,1)||\nabla v_t(x,1)|+|v_t(x,0)||\nabla v_t(x,0)|)\,dx.$$

Из неравенства (3.8) следует

$$\varepsilon^{\frac12}\int\limits_\Omega(v_t^2(x,0)+v_t^2(x,1))\,dx\leqslant C\int\limits_Q(\varepsilon v_{tt}^2+v_t^2)\,dQ\leqslant C. \tag{3.9}$$

Аналогично этому

$$\varepsilon^{\frac32}\int\limits_\Omega(|\nabla v_t(x,0)|^2+|\nabla v_t(x,1)|^2)\,dx\leqslant C\int\limits_Q(\varepsilon^2|\nabla v_{tt}|^2+\varepsilon|\nabla v_t|^2)\,dQ.$$

Следовательно

$$\varepsilon\int\limits_\Omega(|v_t(x,1)||\nabla v_t(x,1)|+|v_t(x,0)||\nabla v_t(x,0)|)\,dx\leqslant$$

$$C(\nu)\varepsilon^{\frac12}\int\limits_\Omega(v_t^2(x,1)+v_t^2(x,0))\,dx+\nu\varepsilon^{\frac32}\int\limits_\Omega(|\nabla v_t(x,1)|^2+|\nabla v_t(x,0)|^2)\,dx\leqslant$$

$$C(\nu)+C\nu\int\limits_Q(\varepsilon^2|\nabla v_{tt}|^2+\varepsilon|\nabla v_t|^2)\,dQ.$$

Выбирая ν достаточно малым, получаем оценку

$$\varepsilon\int\limits_Q(|\Delta v|^2+|\nabla v_t|^2)\,dQ+\varepsilon^2\int\limits_Q|\nabla u_{tt}|^2\,dQ+$$

$$\varepsilon\int\limits_\Omega(|k_0||\nabla v_t(x,0)|^2+|k_1||\nabla v_t(x,1)|^2)\,dx\leqslant C. \tag{3.10}$$

Пусть $\gamma>0$. Уравнение (3.2) можно переписать в виде

$$-\varepsilon v_{tttt}+P_n(kv_{ttt})+\gamma v_{tt}=F(\gamma,x,t),\quad F(\gamma,x,t)\in L_2(Q).$$

Выбирая γ достаточно большим и учитывая (3.8), (3.9), отсюда легко получить

$$\|v_{tttt}\|_{L_2(Q)}+\|v_{ttt}\|_{L_2(Q)}\leqslant C(\gamma,\varepsilon).$$

Теперь уже можно переходить к пределу по n. В результате получаем регулярное решение задачи ($\mathbf{Aux}_\varepsilon$). Все действия стандартные, поэтому мы их опускаем.

Далее нам понадобятся оценки, равномерные по ε. Но сначала сделаем одно замечание. Как обычно, мы умножаем уравнение на различные сомножители и интегрируем по частям. Однако при этом появляются следы $u_{ttt}(x,t)$ при $t=0$ и $t=1$, для которых нет подходящих оценок. Чтобы справиться с этой проблемой приходится подбирать множители, обращающиеся в нуль при $t=0$

и $t = 1$. По этой причине используемые сомножители имеют сравнительно громоздкий вид.

Умножим уравнение (3.2) на $g(x,t) = \varepsilon u_{tt} - u_t(tk^- + (1-t)k^+)$ и проинтегрируем по частям. Легко видеть, что $g(x,0) = g(x,1) = 0$. С учетом (3.8), (3.10) получаем

$$\int\limits_Q (\varepsilon u_{ttt} - k u_{tt}) g_t \, dQ \leqslant C.$$

В силу условий (3.3)-(3.4) имеют место равенства

$$-k(x,1)u_{tt}^2(x,1) = |k_1| u_{tt}^2(x,1), \quad k(x,0)u_{tt}^2(x,0) = |k_0| u_{tt}^2(x,0).$$

Отсюда легко следует оценка

$$\int\limits_Q (\varepsilon^2 |u_{ttt}|^2 + u_{tt}^2(t|k^-|^2 + (1-t)|k^+|^2)) \, dQ +$$

$$\varepsilon \int\limits_\Omega (|k_0| u_{tt}^2(x,0) + |k_1| u_{tt}^2(x,1)) \, dx \leqslant C. \tag{3.11}$$

Из этой оценки, между прочим, вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega_0^+} |k_0|^3 u_t^2(x,0) \, dx + \int\limits_{\Omega_1^-} |k_1|^3 u_t^2(x,1) \, dx \leqslant C\varepsilon. \tag{3.12}$$

Теперь умножим уравнение (3.2) на $g(x,t) = u_{tt}(k^-)^2(1-t^2)^2$ и проинтегрируем по частям. Как и раньше $g(x,0) = g(x,1) = 0$. Значит для $\nu > 0$ имеем неравенство

$$\int\limits_Q (\varepsilon u_{ttt} - k u_{tt}) g_t \, dQ + \int\limits_Q (k^-)^2 (1-t^2)^2 (\alpha u_{tt}^2 + (1-\nu)|\nabla u_t|^2) \, dQ \leqslant C(\nu).$$

В силу (3.8)

$$\int\limits_Q \varepsilon u_{ttt} g_t \, dQ \geqslant \int\limits_Q \varepsilon u_{ttt}^2 (k^-)^2 (1-t^2)^2 \, dQ - C\varepsilon \int\limits_Q u_{tt}^2 \, dQ \geqslant C.$$

Интегрируя по частям слагаемое $k u_{tt} g_t$ и выбирая малое ν, с учетом (3.10) приходим к неравенству

$$\int\limits_Q (k^-)^2 (1-t^2)^2 ((\alpha - k_t/2) u_{tt}^2 + (1-\nu)|\nabla u_t|^2) \, dQ \leqslant C(\nu) + 2 \int\limits_Q |k^-|^3 t u_{tt}^2 \, dQ \leqslant C.$$

А значит в силу (1.2) и (3.11)

$$\int\limits_Q (k^-)^2 u_{tt}^2 \, dQ \leqslant C.$$

Аналогично этому можно показать, что

$$\int\limits_Q (k^+)^2 u_{tt}^2 \, dQ \leqslant C.$$

В конечном итоге получаем оценку

$$\int\limits_Q k^2 u_{tt}^2\,dQ \leqslant C. \tag{3.13}$$

Теперь можно умножить уравнение (3.2) на $k^2\Delta u$ и проинтегрировать по частям. С помощью оценок (3.11), (3.13) для $\nu > 0$ легко получаем

$$\int\limits_Q \varepsilon k^2|\nabla u_{tt}|^2\,dQ + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (|k_0|^3|\nabla u_t|^2(x,0) + |k_1|^3|\nabla u_t|^2(x,1))\,dx$$

$$\int\limits_Q k^2((\alpha - k_t/2)|\nabla u_t|^2 + \Delta^2 u)\,dQ \leqslant C(\nu) + \nu\int\limits_Q k^2(|\nabla u_t|^2 + \Delta^2 u)\,dQ +$$

$$C\int\limits_\Omega (k_0^2|u_t||\nabla u_t|(x,0) + k_1^2|u_t||\nabla u_t|(x,1))\,dx$$

Отсюда с учетом (3.8) следует оценка

$$\int\limits_Q k^2(|\nabla u_t|^2 + |\Delta u|^2)\,dQ \leqslant C.$$

Умножим уравнение (3.2) на $g(x,t) = d_0^2 u_{tt}$ и проинтегрируем по частям. Как и ранее $g(x,0) = g(x,1) = 0$. Для $\nu > 0$ получаем неравенство

$$\int\limits_Q d_0^2((\alpha + k_t/2)u_{tt}^2 + |\nabla u_t|^2)\,dQ \leqslant C(\nu) + \nu\int\limits_Q d_0^2(u_{tt}^2 + |\nabla u_t|^2)\,dQ.$$

Обозначим $K_0 = \{(x,t) \in Q | d_0(x,t) \neq 0\}$. Легко видеть, что K_0 — открытое множество, причем $k(x,t)|_{K_0} = 0$. Следовательно $k_t(x,t)|_{K_0} = 0$. В силу условия (1.2) получаем оценку

$$\int\limits_Q d_0^2(u_{tt}^2 + |\nabla u_t|^2)\,dQ \leqslant C.$$

Аналогично этому имеет место оценка

$$\int\limits_Q d_0^2|\Delta u|^2\,dQ \leqslant C.$$

Собирая все оценки вместе получаем

$$\int\limits_Q (k^2 + d_0^2)(u_{tt}^2 + |\nabla u_t|^2 + |\Delta u|^2)\,dQ \leqslant C.$$

Точно также при условии (3.1) устанавливается неравенство

$$\int\limits_Q (k^2 + R)(u_{tt}^2 + |\nabla u_t|^2 + |\Delta u|^2)\,dQ \leqslant C. \tag{3.14}$$

Теперь можно переходить к пределу при $\varepsilon \to 0$. Обозначим $u_\varepsilon(x,t)$ — решение задачи ($\mathbf{Aux}_\varepsilon$). Переходя при необходимости к подпоследовательности, получаем $u(x,t) \in W_K$ — обобщенное решение задачи **(L)**. Если же выполнено условие (3.1), то $u(x,t) \in W_R$. Отметим, что в последнем случае функция $u(x,t)$

обладает вторыми обобщенными производными в Q, для которых выполнено неравенство (3.14). Поэтому из уравнения (1.1) следует, что ku_{tt} обладает обобщенной производной $(ku_{tt})_t$. При этом

$$\int\limits_Q (k^2+R)(ku_{tt})_t^2\,dQ \leqslant C.$$

Осталось доказать единственность обобщенного решения. Для этого мы используем разрешимость сопряженной задачи. Пусть $u(x,t)$ — решение однородной задачи **(L)** с $f(x,t)=0$. Рассмотрим вспомогательную задачу **(AuxV)**.

$$\begin{gathered}
-\varepsilon v_{tttt} - (kv_t)_{tt} + (\alpha v)_{tt} + \Delta v - cv = u(x,t),\\
v(x,0) = v(x,1) = 0,\\
\varepsilon v_{tt}(x,0) + k_0^-(x)v_t(x,0) = 0,\\
\varepsilon v_{tt}(x,1) + k_1^+(x)v_t(x,1) = 0.
\end{gathered}$$

Мы считаем, что $c(x,t)$ достаточно велико, так что решение этой задачи существует и имеют место включения $v \in W_2^2(Q)$, $v_{tttt} \in L_2(Q)$. В противном случае можно использовать сдвиг, как и в работе [8]. Подставляя функцию $v(x,t)$ в интегральное тождество, получаем

$$\int\limits_Q \varepsilon v_{ttt}u_t\,dQ + \int\limits_{\Omega_1^+} \sqrt{|k_1(x)|}\chi_1(x)v_t(x,1)\,dx + \int\limits_{\Omega_0^-} \sqrt{|k_0(x)|}\chi_0(x)v_t(x,0)\,dx = \int\limits_Q u^2\,dQ.$$

Покажем, что при $\varepsilon \to 0$ левая часть этого равенства стремится к нулю. Этим и будет доказано, что $u(x,t) \equiv 0$. Далее решения задачи **(AuxV)** обозначаем через $v^{(\varepsilon)}$.

В силу (3.8), (3.11)

$$\int\limits_Q (\varepsilon^2|v_{ttt}^{(\varepsilon)}|^2 + \varepsilon|v_{tt}^{(\varepsilon)}|^2)\,dQ \leqslant C.$$

Переходя если потребуется к подпоследовательности, отсюда получаем $\varepsilon v_{ttt}^{(\varepsilon)} \rightharpoonup 0$ слабо в $L_2(Q)$. Далее, рассмотрим интеграл

$$J = \int\limits_{\Omega_0^-} \sqrt{|k_0(x)|}\chi_0(x)v_t^{(\varepsilon)}(x,0)\,dx.$$

Для всякого фиксированного $\gamma > 0$ разобьем множество Ω_0^- на два подмножества. А именно

$$A(\gamma,\varepsilon) = \{x \in \Omega_0^- | k_0(x) < -\gamma\sqrt{\varepsilon}\}, \quad B(\gamma,\varepsilon) = \Omega_0^- \setminus A(\gamma,\varepsilon).$$

Тогда

$$J = \left(\int\limits_{A(\gamma,\varepsilon)} + \int\limits_{B(\gamma,\varepsilon)}\right)\sqrt{|k_0(x)|}\chi_0(x)v_t^{(\varepsilon)}(x,0)\,dx = J_1 + J_2.$$

Из неравенства (3.9) следует

$$|J_2| \leqslant C\sqrt{\gamma}\left(\int\limits_{B(\gamma,\varepsilon)} \chi_0^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

А оценка (3.12) для $v^{(\varepsilon)}$ приводит к неравенству

$$|J_1| \leqslant \frac{C}{\gamma}\left(\int\limits_{A(\gamma,\varepsilon)} \chi_0^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{C}{\gamma}.$$

Заметим, что при $\varepsilon \to 0$, мера множества $B(\gamma,\varepsilon)$ стремится к нулю. Отсюда

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}|J| \leqslant \frac{C}{\gamma}.$$

Отсюда и из произвольности γ следует

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}|J| = 0.$$

Аналогичным способом оценивается интеграл

$$\int\limits_{\Omega_1^+} \sqrt{|k_1(x)|}\chi_1(x)v_t^{(\varepsilon)}(x,1)\,dx.$$

Таким образом $u(x,t)\equiv 0$, и теорема доказана. □

References

[1] G.D. Karatopraklіev, *On the theory of boundary value problems for mixed type equations in multidimensional domains. I.*, Differ. Uravn., **13**:1 (1977), 64—75. MR0499796

[2] V.N. Vragov, *On the theory of boundary value problems for equations of mixed type in space*, Differ. Uravn., **13**:6 (1977), 1098—1105. MR0481610

[3] I.E. Egorov, V.E. Fedorov, *Nonclassical high order equations of mathematical physics*, Novosibirsk: "VC SO RAN", 1995.

[4] A.I. Kozhanov, N.R. Pinigina, *Boundary-value problems for some higher-order nonclassical differential equations*, Math. Notes, **101**:3 (2017), 467—474. MR3635431

[5] I.E. Egorov, E.S. Efimova, I.M. Tikhonova, *On Fredholm solvability of first boundary value problem for mixed-type second-order equation with spectral parameter*, Matematicheskie Zametki SVFU, **25**:1 (2018), 15—22. Zbl 07099434

[6] I.E. Egorov, S.G. Pyatkov, S.V. Popov, *Nonclassical operator-differential equations*, Novosibirsk: "Nauka", 2000. MR1816995

[7] S.G. Pyatkov, *Boundary value problems for some classes of singular parabolic equations*, Siberian Adv. Math., **14**:3 (2004), 63—125. MR2122365

[8] A.N. Artyushin, *A Boundary value problem for a mixed type equation in a cylindrical domain*, Siberian Math. J., **60**:2 (2019), 209—222. MR3951147

Aleksander Nikolaevich Artyushin
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: alexsp3@yandex.ru