Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. S. Tarasenko, On asymptotics of distribution of the sojourn time on a half-axis of a random walk with heavy tails, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2018, Volume 15, 1813–1817

DOI: <https://doi.org/10.3048/semi.2018.15.145>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.208.226.222

April 26, 2023, 14:42:43

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 15, стр. 1813–1817 (2018)

DOI 10.3048/semi.2018.15.145

УДК 519.21

MSC 60F10

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ С ТЯЖЕЛЫМИ ХВОСТАМИ

А.С. ТАРАСЕНКО

ABSTRACT. We study asymptotic behavior of the distribution of the sojourn time of a random walk over growing level. We assume here regular variation of the right tail distribution of summands and existence of the second moment. Some two-sided asymptotic bounds for the sojourn time distribution are established.

Keywords: random walk, sojourn time, asymptotic analysis.

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$.

Введем время пребывания случайного блуждания $\{S_i\}_{i=1}^\infty$ выше некоторой границы $b \geq 0$ до момента времени n :

$$T_n(b) = \sum_{i=1}^n I_{\{S_i \geq b\}},$$

где через I_A обозначен индикатор события A . Основной целью работы является изучение главного члена асимптотики вероятностей $\mathbb{P}(T_n(b) = j)$ при $b = b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ и условии правильного изменения функции $\mathbb{P}(\xi \geq t)$.

Изучение распределения $T_n(b)$ является весьма трудной задачей, и ей посвящено значительное число работ. Для простейших блужданий ряд результатов о времени пребывания может быть получен с помощью комбинаторных методов.

TARASENKO, A.S., ON ASYMPTOTICS OF DISTRIBUTION OF THE SOJOURN TIME ON A HALF-AXIS OF A RANDOM WALK WITH HEAVY TAILS.

© 2018 ТАРАСЕНКО А.С.

Работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00049).

Поступила 30 ноября 2018 г., опубликована 28 декабря 2018 г.

Хорошо известен классический закон арксинуса, характеризующий предельное поведение распределения времени пребывания случайного блуждания на положительной полуоси (см., например, [6]). Известны также предельные теоремы о времени пребывания, основанные на использовании сходимости распределений функционалов от траекторий случайного блуждания к распределению соответствующих функционалов от предельных процессов. Весьма подробная библиография и результаты этого направления исследований содержатся в [3], [7]. В последние годы появились также работы, в которых время пребывания случайного блуждания на отрезке и на полуоси изучается с помощью факторизационных методов (см. [4], [5]), а также общих методов теории вероятностей (см. [1]).

Обозначим для $t > 0$

$$F_+(t) = \mathbb{P}(\xi > t).$$

Везде в работе предполагается, что $F_+(t)$ является правильно меняющейся функцией (п.м.ф.), то есть для любого фиксированного v выполняется

$$\frac{F_+(vt)}{F_+(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} v^{-\beta}$$

для некоторого $\beta > 0$.

Мы будем писать $c_n \sim d_n$, если $d_n > 0$, $\frac{c_n}{d_n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Предложение 1. Пусть $F_+(t)$ — п.м.ф., $\mathbb{E}\xi = 0$ и $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. Тогда для любого фиксированного $j \geq 0$ выполняется

$$\mathbb{P}(T_n(b_n) = n - j) \sim F_+(b_n),$$

где b_n — последовательность положительных чисел такая, что

$$b_n \rightarrow \infty, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Для любого конечного подмножества натуральных чисел A будем через $|A|$ обозначать его мощность.

Теорема 1. Пусть $F_+(t)$ — п.м.ф., $\mathbb{E}\xi = 0$ и $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность множеств $E_n^\varepsilon \subset \{1, \dots, n\}$ такая, что $|E_n^\varepsilon|/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ и

$$\mathbb{P}(T_n(b_n) = j) \geq F_+(b_n) + o(F_+(b_n)), \forall j \in \{1, \dots, n\},$$

$$\mathbb{P}(T_n(b_n) = j) \leq (1 + \varepsilon)F_+(b_n), \forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus E_n^\varepsilon,$$

где b_n — последовательность положительных чисел такая, что

$$b_n/\sqrt{n \ln n} \rightarrow \infty, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство предложения 1. Известно, что для любого фиксированного k выполнено (см. теорему 4.1 в [2]) $\mathbb{P}(S_k \geq b_n) = kF_+(b_n) + o(F_+(b_n))$. Поэтому, используя теорему 4 из недавней работы [8] имеем

$$\mathbb{P}(T_n(b_n) = n - j) = \mathbb{E}I_{\{T_n(b_n) = n - j\}} = \sum_{i=1}^n (I_{\{n-j=n-i+1\}} - I_{\{n-j=n-i\}}) \mathbb{P}(S_i \geq b_n) +$$

$$o\left(\sum_{i=1}^n |I_{\{n-j=n-i+1\}} - I_{\{n-j=n-i\}}| \mathbb{P}(S_i \geq b_n)\right) =$$

$$\mathbb{P}(S_{j+1} \geq b_n) - \mathbb{P}(S_j \geq b_n) + o(\mathbb{P}(S_{j+1} \geq b_n) + \mathbb{P}(S_j \geq b_n)) = F_+(b_n) + o(F_+(b_n)),$$
 что и требовалось доказать. $\square$

Для доказательства второй теоремы нам понадобится доказать вспомогательную лемму. Обозначим $\bar{S}_k = \max_{1 \leq m \leq k} S_m$, $\eta(t) = \min\{k : S_k \geq t\}$. Также будем говорить, что $c_n \gg d_n$, если $\frac{c_n}{d_n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Лемма 1. Пусть b_n — последовательность положительных чисел такая, что $b_n/\sqrt{n \ln n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\mathbb{P}(\bar{S}_n \geq b_n, \eta(b_n) = j) \sim \mathbb{P}(\forall k \geq j \ S_k \geq b_n, \bar{S}_{j-1} < b_n) \sim F_+(b_n).$$

Доказательство леммы 1. Известно (см. теорему 9.1 в [2]), что

$$(1) \quad \mathbb{P}(\eta(x_n) = i, \bar{S}_n \geq x_n) \sim \mathbb{P}(\eta(x_n) = i, S_i \geq x_n) \sim F_+(x_n)$$

для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_n \gg \sqrt{n \ln n} \geq \sqrt{i \ln i}$. Таким образом мы имеем

$$\mathbb{P}(\bar{S}_n \geq b_n, \eta(b_n) = j) \sim F_+(b_n)$$

и нам достаточно доказать что

$$F_+(b_n) \sim \mathbb{P}(\forall k \geq j \ S_k \geq b_n, \bar{S}_{j-1} < b_n).$$

Выберем такую последовательность чисел $\Delta_n > 0$, что $\Delta_n/\sqrt{n} \rightarrow \infty$, $\Delta_n/b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Введем следующие обозначения

$$A_j = A_j^{(n)} := \{S_j \geq b_n, \eta(b_n) = j\}, \quad B_j = B_j^{(n)} := \{S_j \geq b_n + \Delta_n, \eta(b_n + \Delta_n) = j\},$$

$$C_j = C_j^{(n)} := A_j^{(n)} \setminus B_j^{(n)}, \quad \tilde{S}_{l_1, l_2} = \sup_{l_1 \leq l \leq l_2} |\xi_{l_1} + \dots + \xi_l|, \quad \tilde{S}_l = \tilde{S}_{1, l},$$

$$D_j = D_j^{(n)} := \{S_{j+1} \geq b_n, \dots, S_n \geq b_n\}, \quad D'_j = D_j'^{(n)} := \{\tilde{S}_{j+1, n} \leq \Delta_n\},$$

где событие D'_j не зависит от B_j .

Нетрудно видеть, что имеют место следующие соотношения:

$$(2) \quad \mathbb{P}(A_j) = \mathbb{P}(B_j) + \mathbb{P}(C_j),$$

$$(3) \quad \mathbb{P}(D'_j) = \mathbb{P}\{\tilde{S}_{n-j} \leq \Delta_n\} \geq \mathbb{P}\{\tilde{S}_n \leq \Delta_n\}, \quad B_j D'_j \subset B_j D_j.$$

Покажем сначала, что

$$(4) \quad \mathbb{P}(A_j D_j) = \mathbb{P}(B_j D_j) + \mathbb{P}(C_j D_j) \sim \mathbb{P}(A_j).$$

Из (1) имеем

$$\mathbb{P}(A_j) \sim F_+(b_n),$$

$$\mathbb{P}(B_j) = \mathbb{P}(S_j \geq b_n + \Delta_n, \eta(b_n + \Delta_n) = j) \sim F_+(b_n + \Delta_n) \sim F_+(b_n),$$

откуда $\mathbb{P}(A_j) \sim \mathbb{P}(B_j)$.

Поэтому из (2) следует

$$\mathbb{P}(C_j D_j) \leq \mathbb{P}(C_j) = o(\mathbb{P}(A_j)).$$

Покажем теперь эквивалентность $\mathbb{P}(B_j D_j) \sim \mathbb{P}(B_j)$. Из (3) и независимости D'_j и B_j получаем

$$\mathbb{P}(B_j D_j) \geq \mathbb{P}(B_j D'_j) = \mathbb{P}(B_j) \mathbb{P}(D'_j).$$

Заметим, что из неравенства Колмогорова следует

$$\mathbb{P}\{\tilde{S}_n > \Delta_n\} = \mathbb{P}\{\max_{1 \leq l \leq n} |S_l| > \Delta_n\} \leq \frac{n\mathbb{D}\xi}{\Delta_n^2} = \left(\frac{\sqrt{n\mathbb{D}\xi}}{\Delta_n}\right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

откуда имеем

$$\mathbb{P}(D'_j) \geq \mathbb{P}\{\tilde{S}_n \leq \Delta_n\} = 1 - \mathbb{P}\{\tilde{S}_n > \Delta_n\} \rightarrow 1,$$

а значит

$$\mathbb{P}(B_j D_j) \geq \mathbb{P}(B_j) \mathbb{P}(D'_j) \sim \mathbb{P}(B_j).$$

Очевидно, что

$$\mathbb{P}(B_j D_j) \leq \mathbb{P}(B_j),$$

поэтому $\mathbb{P}(B_j D_j) \sim \mathbb{P}(B_j)$. Это доказывает (4), а именно

$$\mathbb{P}(\forall k \geq j \ S_k \geq b_n, \eta(b_n) = j) \sim \mathbb{P}(S_j \geq b_n, \eta(b_n) = j) \sim F_+(b_n).$$

Для завершения доказательства леммы достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} F_+(b_n) &\sim \mathbb{P}(\forall k \geq j \ S_k \geq b_n, \eta(b_n) = j) = \\ &\mathbb{P}(\forall k \geq j \ S_k \geq b_n, \bar{S}_{j-1} < b_n, \eta(b_n) = j) = \mathbb{P}(\forall k \geq j \ S_k \geq b_n, \bar{S}_{j-1} < b_n). \end{aligned}$$

□

Доказательство теоремы 1. Доказательство основывается на том, что типичная траектория случайного блуждания S_n , пересекающая достаточно высокий уровень b , делает это лишь один раз. Таким образом, время, проведенное случайным блужданием выше b , будет определяться первым временем выхода за эту границу.

Построим сначала нижнюю оценку для $\mathbb{P}(T_n(b_n) = j)$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_n(b_n) = j) &= \mathbb{P}(T_n(b_n) = j, \bar{S}_n \geq b_n) \geq \\ &\mathbb{P}(T_n(b_n) = j, \bar{S}_n \geq b_n, \eta(b_n) = n - j + 1) \geq \\ &\mathbb{P}(T_n(b_n) = j, \forall k \geq n - j + 1 \ S_k \geq b_n, \eta(b_n) = n - j + 1) = \\ &\mathbb{P}(T_n(b_n) = j, \forall k \geq n - j + 1 \ S_k \geq b_n, \bar{S}_{n-j} < b_n) = \\ &\mathbb{P}(\forall k \geq n - j + 1 \ S_k \geq b_n, \bar{S}_{n-j} < b_n), \end{aligned}$$

откуда по лемме 1 имеем

$$(5) \quad \mathbb{P}(T_n(b_n) = j) \geq F_+(b_n) + o(F_+(b_n)).$$

Так как (см. [8], теорема 4) $\mathbb{P}(\bar{S}_n \geq b_n) \sim nF_+(b_n)$, то

$$(6) \quad \mathbb{P}(T_n(b_n) > 0) = \mathbb{P}(\bar{S}_n \geq b_n) = nF_+(b_n) + o(nF_+(b_n)).$$

Положим

$$E_n^\varepsilon = \{k : \mathbb{P}(T_n(b_n) = k) > (1 + \varepsilon)F_+(b_n)\}$$

и предположим существование такого $\varepsilon > 0$, что $|E_n^\varepsilon|/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Тогда найдется такая строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{m_l\}_{l=1}^\infty$, что $|E_{m_l}^\varepsilon| \geq \delta m_l$ для некоторого фиксированного $\delta > 0$. Используя (5), получаем

$$\mathbb{P}(T_{m_l}(b_{m_l}) > 0) = \sum_{i=1}^{m_l} \mathbb{P}(T_{m_l}(b_{m_l}) = i) =$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \in E_{m_l}^\varepsilon}}^{m_l} \mathbb{P}(T_{m_l}(b_{m_l}) = i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin E_{m_l}^\varepsilon}}^{m_l} \mathbb{P}(T_{m_l}(b_{m_l}) = i) \geq$$

$$m_l F_+(b_{m_l}) + \delta \varepsilon m_l F_+(b_{m_l}) + o(m_l F_+(b_{m_l})),$$

что противоречит (6). Значит $|E_n^\varepsilon|/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ для любого ε , что и требовалось доказать. $\square$

REFERENCES

- [1] I. S. Borisov, E. I. Schaefer *Asymptotic of mean sojourn time of trajectory of random walk above growing nonlinear boundary*, Sib. Zhurnal Chist. i Priklad. Matem, **17**:4 (2017), 18–27.
- [2] A. A. Borovkov, K. A. Borovkov, *Asymptotical analysis of random walks. Vol. 1. Slowly varying distributions of jumps*, M.: Fizmatlit, 2008, 652 p. Zbl 1231.60001
- [3] A. N. Borodin, I. A. Ibragimov, *Limit theorems for functionals of random walks*, Trudy Mat. Inst. Steklov **195**, 3 (1994) [Proc. Steklov Inst. Math. 195, 1 (1995)]. MR1368394
- [4] V. I. Lotov, *Asymptotic expansions for the distribution of the sojourn time of a random walk on a halfxis*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **282** (2013), 146–156. MR3308589
- [5] V. I. Lotov, A. S. Tarasenko, *On the asymptotics of the mean sojourn time of a random walk on a semi-axis*, Izvestiya: Mathematics, **79**:3 (2015), 449–466. MR3397411
- [6] Spitzer F., *Principles of Random Walks*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1976. Zbl 0359.60003
- [7] A. V. Skorokhod, N. P. Slobodenyuk, *Limit Theorems for Random Walks*, (Naukova Dumka, Kiev, 1970) [in Russian].
- [8] A. S. Tarasenko, *Inequalities for the sojourn time of random walk above a certain boundary*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **13** (2016), 434–451.

ANTON SERGEEVICH TARASENKO
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 PR. KOPTYUGA, 4,
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 STR. PIROGOVA, 2,
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: sunakdb@gmail.com