Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. N. Belousov, A. A. Makhnev, Distance-regular graph with intersection array $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ does not exist, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 206–216

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.012>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.81.55.215

April 26, 2023, 17:37:30

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 206–216 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.012

УДК 519.17

MSC 05C25

ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЙ ГРАФ С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ НЕ СУЩЕСТВУЕТ

И.Н. БЕЛОУСОВ, А.А. МАХНЕВ

ABSTRACT. Distance-regular graph Γ of diameter 3 is called Shilla graph if Γ contains the second eigenvalue $\theta_1 = a_3$. In this case $a = a_3$ divides k and we set $b = b(\Gamma) = k/a$. Koolen and Park obtained the list of intersection arrays for Shilla graphs with $b = 3$. A. Brouwer with coauthors proved that graph with intersection array $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$ does not exist. Q -polynomial Shilla graph with $b = 3$ has intersection array $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ or $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$. Early authors proved that graph with intersection array $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ does not exist.

We prove that graph with intersection array $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ does not exist.

Keywords: distance-regular graph, Shilla graph, triple intersection numbers.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$. Пусть Γ — граф диаметра d , $i \in \{2, 3, \dots, d\}$. Граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, и вершины u, w смежны в Γ_i , если $d_\Gamma(u, w) = i$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Положим

BELOUSOV, I.N., MAKHNEV, A.A., DISTANCE-REGULAR GRAPH WITH INTERSECTION ARRAY $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ DOES NOT EXIST.

© 2019 БЕЛОУСОВ И.Н., МАХНЕВ А.А.

Поступила 18 декабря 2018 г., опубликована 8 февраля 2019 г.

$a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Далее, через $p_{ij}^l(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y , находящихся на расстоянии l в графе Γ . В дистанционно регулярном графе числа $p_{ij}^l(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y , обозначаются p_{ij}^l и называются числами пересечений графа Γ .

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа Γ называется e -кодом, если минимальное расстояние между двумя вершинами из C не меньше $2e + 1$. Для e -кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e + 1$ выполняется граница $|C| \leq k_d / \sum_{i=0}^e p_{id}^d + 1$. В случае равенства код называется совершенным относительно последней окрестности.

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий второе собственное значение, равное $a = a_3$. В этом случае a делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Далее, $a_1 = a - b$ и Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a + 1)(b - 1), b_2; 1, c_2, a(b - 1)\}$. В [1] классифицированы графы Шилла с $b = 3$.

Предложение 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф Шилла с $b = 3$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{12, 10, 5; 1, 1, 8\}$, $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$, $\{12, 10, 3; 1, 3, 8\}$, $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$, $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$, $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$, $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$, $\{60, 42, 18; 1, 6, 40\}$, $\{69, 48, 24; 1, 4, 46\}$, $\{93, 64, 24; 1, 6, 62\}$, $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$.

Известно существование графа с массивом пересечений $\{12, 10, 5; 1, 1, 8\}$ (это унитарный неизотропный граф с $q = 4$), но неизвестна единственность. Существует единственный граф с массивом пересечений $\{12, 10, 3; 1, 3, 8\}$ (это граф Доро). В [2] доказано, что граф с массивом пересечений $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$ не существует.

Графы с массивами пересечений $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ и $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ являются Q -полиномиальными. В [3] доказано, что граф с массивом пересечений $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ не существует. В работе доказано, что граф с массивом пересечений $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ не существует.

Граф Γ с массивом пересечений $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ имеет спектр $42^1, 14^{42}, 0^{210}, -7^{90}$ и $1 + 105 + 630 + 216 = 952$ вершины. Ввиду границы Дельсарта порядок клики в Γ не больше $1 - k/\theta_3 = 16$.

Пусть C является l -кликой в Γ_3 . Тогда подграфы $u^\perp$, $u \in C$ попарно не пересекаются, поэтому $106l$ не больше 952 и l не больше 8. Если $l = 8$, то C является 1-кодом, совершенным относительно последней окрестности.

Предложение 2. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ не содержит 16-клик.

Теорема 1. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ не существует.

В доказательстве предложения 2 и теоремы 1 используются тройные числа пересечений [4].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d . Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ , r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d , то $\left\{ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right\}$ — множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, $\left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right] = \left| \left\{ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right\} \right|$. Числа $\left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right]$ называются тройными числами пересечений. Для

фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\begin{bmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{bmatrix}$ будем писать $[r_1 r_2 r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1 r_2 r_3]$ нет общих формул. Однако, в [4] предложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1 r_2 r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ , $W = d(u, v)$, $U = d(v, w)$, $V = d(u, w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x, u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$, и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей, получим:

$$\sum_{l=1}^d [ljh] = p_{jh}^U - [0jh], \sum_{l=1}^d [ilh] = p_{ih}^V - [i0h], \sum_{l=1}^d [ijl] = p_{ij}^W - [ij0].$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j| > W$ или $i+j < W$ имеем $p_{ij}^W = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, \dots, d\}$.

Положим $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^d Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$. Если параметр Крейна $q_{ij}^h = 0$, то $S_{ijh}(u, v, w) = 0$.

В доказательстве теоремы используются следующие леммы.

Лемма 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, Если u, v, w — вершины, попарно находящиеся на расстоянии 1 в Γ , $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, $[111] = \varphi$ и $[222] = \psi$. Тогда верны равенства:

- (1) $[121] = [211] = [112] = p_{11}^1 - 1 - \varphi$, $[122] = [212] = [221] = p_{12}^1 - p_{11}^1 + 1 + \varphi$;
- (2) $[223] = [232] = [322] = p_{22}^1 - p_{12}^1 + p_{11}^1 - 1 - \varphi - \psi$;
- (3) $[233] = [323] = [332] = p_{23}^1 - p_{22}^1 + p_{12}^1 - p_{11}^1 + 1 + \varphi + \psi$;
- (4) $[333] = p_{33}^1 - p_{23}^1 + p_{22}^1 - p_{12}^1 + p_{11}^1 - 1 - \varphi - \psi$.

Доказательство. Заметим, что $[13h] = [1h3] = 0$ для любого $1 \leq h \leq 3$.

Имеем $[111] + [121] + [131] = p_{11}^1 - 1$, поэтому $[121] = p_{11}^1 - 1 - \varphi$. Аналогично, $[211] = [112] = p_{11}^1 - 1 - \varphi$.

Далее, $[121] + [122] + [123] = p_{12}^1$, поэтому $[122] = p_{12}^1 - p_{11}^1 + 1 + \varphi$. Аналогично, $[212] = [221] = p_{12}^1 - p_{11}^1 + 1 + \varphi$.

Теперь $[221] + [222] + [223] = p_{22}^1$, поэтому $[223] = p_{22}^1 - p_{12}^1 + p_{11}^1 - 1 - \varphi - \psi$. Симметрично, $[232] = [322] = p_{22}^1 - p_{12}^1 + p_{11}^1 - 1 - \varphi - \psi$.

Снова имеем $[213] + [223] + [233] = p_{23}^1$, поэтому $[233] = p_{23}^1 - p_{22}^1 + p_{12}^1 - p_{11}^1 + 1 + \varphi + \psi$. Симметрично, $[323] = [332] = p_{23}^1 - p_{22}^1 + p_{12}^1 - p_{11}^1 + 1 + \varphi + \psi$.

Наконец, $[331] + [332] + [333] = p_{33}^1$, поэтому $[333] = p_{33}^1 - p_{23}^1 + p_{22}^1 - p_{12}^1 + p_{11}^1 - 1 - \varphi - \psi$. $\square$

Лемма 2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, u, v, w — вершины графа Γ , $d(u, v) = d(u, w) = 3$ и $d(v, w) = 1$. Положим $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, $[122] = \alpha$, $[212] = \beta$, $[221] = \gamma$ и $[222] = \delta$. Тогда $\beta = \gamma$ и верны равенства:

- (1) $[132] = [123] = p_{12}^3 - \alpha$, $[312] = [321] = p_{12}^3 - \beta$ и $[311] = p_{31}^3 - p_{12}^3 + \beta - 1$;
- (2) $[322] = p_{22}^3 - \alpha - \delta$, $[232] = [223] = p_{22}^3 - \delta - \beta$ и $[211] = p_{21}^3 - p_{13}^3 - \beta$;
- (3) $[133] = p_{13}^3 - p_{12}^3 + \alpha$ и $[333] = p_{33}^3 - p_{23}^3 + p_{12}^3 + p_{22}^3 - \alpha - \beta - \delta$;
- (4) $[233] = p_{23}^3 - p_{22}^3 + \delta + \beta$, $[332] = [323] = p_{32}^3 - p_{22}^3 - p_{12}^3 + \alpha + \beta + \delta$.

Доказательство. Заметим, что $[11h] = [1h1] = 0$ и $[h13] = [h31] = 0$ для любого $1 \leq h \leq 3$.

Имеем $[122] + [222] + [322] = p_{22}^1$, $[112] + [122] + [132] = p_{12}^3$, $[121] + [122] + [123] = p_{12}^3$, поэтому $[132] = [123] = p_{12}^3 - [122] = p_{12}^3 - \alpha$ и $[322] = p_{22}^3 - \alpha - \delta$.

Далее, $[212] + [222] + [232] = p_{22}^3$, $[221] + [222] + [223] = p_{22}^3$, поэтому $\beta + [232] = \gamma + [223] = p_{22}^3 - \delta$.

Аналогично, $[312] + [322] + [332] = p_{32}^3 - [302] = p_{32}^3$, $[321] + [322] + [323] = p_{32}^3 - [320] = p_{32}^3$, поэтому $[312] + [332] = [321] + [323] = p_{32}^3 - [322] = p_{32}^3 - p_{22}^1 + \alpha + \delta$.

Теперь $[311] + [312] + [313] = p_{31}^3 - [310]$, $[112] + [212] + [312] = p_{12}^1 - [012]$, поэтому $[312] = p_{12}^1 - [212] = p_{12}^1 - \beta$, $[311] = p_{31}^3 - p_{12}^1 + \beta - 1$. Симметрично, $[311] + [321] + [331] = p_{31}^3 - [310]$, $[121] + [221] + [321] = p_{21}^1 - [021]$, поэтому $[321] = p_{21}^1 - [221] = p_{21}^1 - \gamma$ и $[311] = p_{31}^3 - p_{21}^1 + \gamma$. Таким образом, $\beta = \gamma$, $[312] = [321] = p_{12}^1 - \beta$ и $[232] = [223] = p_{22}^3 - \beta - \delta$.

Имеем $[211] + [212] + [213] = p_{21}^3 - [210]$, $[213] + [223] + [233] = p_{23}^3 - [203]$, поэтому $[211] = p_{21}^3 - \beta$ и $[233] = p_{23}^3 - p_{22}^3 + \delta + \beta$.

Наконец, $[331] + [332] + [333] = p_{33}^3$, $[133] + [233] + [333] = p_{33}^3 - 1$, $[313] + [323] + [333] = p_{33}^3$, $[123] + [223] + [323] = p_{23}^1$, поэтому $[323] = [332] = p_{23}^1 - p_{12}^3 - p_{22}^3 + \alpha + \beta + \delta$, $[333] = p_{33}^3 - [323] = p_{33}^3 - p_{23}^1 + p_{12}^3 + p_{22}^3 - \alpha - \beta - \delta$. и $[133] = p_{33}^3 - 1 - [233] - [333] = p_{33}^3 - 1 - p_{23}^3 - p_{33}^3 + p_{23}^1 - p_{12}^3 + \alpha$. $\square$

Лемма 3. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, u, v, w — вершины графа Γ , $d(u, v) = d(u, w) = 3$ и $d(v, w) = 2$. Положим $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, $[122] = \alpha'$, $[212] = \beta'$, $[221] = \gamma'$, $[222] = \delta'$ и $[313] = \nu$. Тогда верны равенства:

(1) $[132] = [123] = p_{12}^3 - [122] = p_{12}^3 - \alpha'$, $[312] = p_{12}^2 - \beta'$, $[321] = p_{21}^2 - \gamma'$, $[213] = p_{13}^2 - \nu$, $[231] = p_{13}^2 - \nu + \beta' - \gamma'$ и $[311] = p_{31}^3 - p_{12}^2 + \beta' - \nu$;

(2) $[322] = p_{22}^2 - \alpha' - \delta'$, $[232] = p_{22}^3 - \delta' - \beta'$, $[223] = p_{22}^3 - \delta' - \gamma'$, $[211] = p_{21}^3 - p_{13}^2 + \nu - \beta'$;

(3) $[133] = p_{13}^3 - p_{12}^3 + \alpha'$, $[331] = \nu - \beta' + \gamma'$ и $[333] = p_{33}^3 - p_{23}^2 + p_{12}^3 + p_{22}^3 - \alpha' - \delta' - \gamma' - \nu$;

(4) $[233] = p_{23}^3 - p_{22}^3 - p_{13}^2 + \delta' + \gamma' + \nu$, $[332] = p_{32}^3 - p_{22}^2 - p_{12}^2 - 1 + \alpha' + \beta' + \delta'$, $[323] = p_{32}^3 - p_{22}^2 - p_{12}^2 - 1 + \alpha' + \gamma' + \delta'$.

Доказательство. Заметим, что $[11h] = [1h1] = 0$ для любого $1 \leq h \leq 3$.

Имеем $[122] + [222] + [322] = p_{22}^2$, $[112] + [122] + [132] = p_{12}^3 - [102]$, $[121] + [122] + [123] = p_{12}^3 - [102]$, поэтому $[132] = [123] = p_{12}^3 - [122] = p_{12}^3 - \alpha'$ и $[322] = p_{22}^2 - \alpha' - \delta'$.

Далее, $[212] + [222] + [232] = p_{22}^3 - [202]$, $[221] + [222] + [223] = p_{22}^3 - [202]$, поэтому $\beta' + [232] = \gamma' + [223] = p_{22}^3 - \delta'$.

Аналогично, $[312] + [322] + [332] = p_{32}^3 - [302] = p_{32}^3 - 1$, $[321] + [322] + [323] = p_{32}^3 - [320] = p_{32}^3 - 1$, поэтому $[312] + [332] = [321] + [323] = p_{32}^3 - [322] - 1 = p_{32}^3 - p_{22}^2 - 1 + \alpha' + \delta'$.

Теперь $[311] + [312] + [313] = p_{31}^3 - [310]$, $[112] + [212] + [312] = p_{12}^2 - [012]$, поэтому $[312] = p_{12}^2 - [212] = p_{12}^2 - \beta'$, $[311] + [313] = p_{31}^3 - p_{12}^2 + \beta'$. Симметрично, $[311] + [321] + [331] = p_{31}^3 - [310]$, $[121] + [221] + [321] = p_{21}^2 - [021]$, поэтому $[321] = p_{21}^2 - [221] = p_{21}^2 - \gamma$, $[311] + [331] = p_{31}^3 - p_{21}^2 + \gamma'$.

Имеем $[113] + [213] + [313] = p_{13}^2 - [013]$, $[211] + [212] + [213] = p_{21}^3 - [210]$, $[213] + [223] + [233] = p_{23}^3 - [203]$, поэтому $[213] + [313] = p_{13}^2$, $[211] + [213] = p_{21}^3 - \beta'$ и $[213] + [233] = p_{23}^3 - p_{22}^3 + \delta' + \gamma'$. Аналогично, $[131] + [231] + [331] = p_{31}^2 - [031]$, $[211] + [221] + [231] = p_{21}^3 - [210]$, $[231] + [232] + [233] = p_{23}^3$, поэтому $[231] + [331] = p_{31}^2$, $[211] + [231] = p_{21}^3 - \gamma'$ и $[231] + [233] = p_{23}^3 - p_{22}^3 + \delta' + \beta'$.

Наконец, $[331] + [332] + [333] = p_{33}^3$, $[133] + [233] + [333] = p_{33}^3 - 1$, $[313] + [323] + [333] = p_{33}^3$, поэтому $[333] = p_{33}^3 - [323] - [313] = p_{33}^3 - p_{23}^2 + [123] + [223] - \nu = p_{33}^3 - p_{23}^2 + p_{12}^3 - \alpha' + p_{22}^3 - \delta' - \gamma' - \nu = p_{33}^3 - p_{23}^2 + p_{12}^3 + p_{22}^3 - \alpha' - \delta' - \gamma' - \nu$. Так как $[113] + [123] + [133] = p_{13}^3$, то $[133] = p_{13}^3 - [132] = p_{13}^3 - p_{12}^3 + \alpha'$.

С учетом равенства $[331] = \nu - \beta' + \gamma'$ имеем $[311] = -[331] + p_{31}^3 - p_{21}^2 + \gamma' = p_{31}^3 - p_{21}^2 + \beta' - \nu$. $\square$

Лемма 4. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, u, v, w — вершины графа Γ , $d(u, v) = 1$, $d(u, w) = 2$ и $d(v, w) = 3$. Положим $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, Положим $[112] = \varphi'$, $[221] = \psi'$ и $[333] = \nu'$. Тогда верны равенства:

- (1) $[113] = a_1 - \varphi'$, $[121] = c_2$, $[122] = a_2 - \varphi'$, $[123] = b_2 - a_1 - 1 + \varphi'$, $[212] = c_3 - 1 - \varphi'$, $[213] = a_3 - a_1 + \varphi'$;
- (2) $[222] = p_{22}^1 - \psi' - [223]$, $[223] = p_{23}^2 - p_{33}^3 + a_1 - a_3 + \nu' - \varphi'$, $[231] = a_2 - \psi'$, $[232] = p_{23}^3 - [332]$, $[233] = p_{33}^3 - \nu'$;
- (3) $[321] = c_3 - c_2 - \psi'$, $[322] = p_{23}^2 - [332]$, $[323] = p_{33}^2 - \nu'$, $[331] = a_3 - a_2 + \psi'$ и $[332] = p_{33}^1 - (a_3 - a_2 + \psi') - \nu'$.

Доказательство. Лемма следует из таблицы 4 [4] (с заменой 1 на ν' в некоторых местах). $\square$

1. Клики в Γ_3

Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$. Тогда дуальная матрица собственных значений равна

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 51 & 441 & 459 \\ 1 & 17 & 63/5 & -153/5 \\ 1 & 0 & -56/5 & 51/5 \\ 1 & -17/2 & 49/2 & -17 \end{pmatrix}.$$

Лемма 5. Для ненулевых чисел пересечений графа Γ верны равенства

- (1) $p_{11}^1 = 32$, $p_{12}^1 = 72$, $p_{22}^1 = 414$, $p_{23}^1 = 144$, $p_{33}^1 = 72$;
- (2) $p_{11}^2 = 12$, $p_{12}^2 = 69$, $p_{13}^2 = 24$, $p_{22}^2 = 416$, $p_{23}^2 = 144$, $p_{33}^2 = 48$;
- (3) $p_{12}^3 = 70$, $p_{13}^3 = 35$, $p_{22}^3 = 420$, $p_{23}^3 = 140$, $p_{33}^3 = 40$.

Доказательство. Прямые вычисления. $\square$

Лемма 6. Пусть u, v, w — вершины, попарно находящиеся на расстоянии 3 в Γ , $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, $[122] = \alpha$, $[212] = \beta$, $[221] = \gamma$ и $[333] = \delta$. Тогда $\alpha = \beta = \gamma = (3\delta/4 + 202)/5$, где $\delta \in \{4, 24\}$.

Доказательство. Из [2, предложение 2] получим равенства:

- (1) $35 - [133] = [123] = [132] = 70 - \alpha$, $35 - [313] = [312] = [213] = 70 - \beta$, $35 - [331] = [231] = [321] = 70 - \gamma$;
- (2) $\gamma - [232] = [233] - 70 = 4 - \alpha - \delta$, $\alpha - [223] = [323] - 70 = 4 - \beta - \delta$, $\beta - [322] = [332] - 70 = 4 - \gamma - \delta$;
- (3) $[222] = 420 - \gamma - [223] = 424 - \alpha - \beta - \gamma - \delta$.

Для нашего графа имеем $q_{13}^1 = q_{31}^1 = q_{11}^3 = 0$. Поэтому $S_{113}(u, v, w) = S_{131}(u, v, w) = S_{311}(u, v, w) = 0$.

Так как $Q_{21} = 0$, то слагаемые $[rst]$ в формуле $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^d Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, имеющие два индекса 2, умножаются на 0, поэтому их можно опускать. Вычислим $S_{113}(u, v, w)$.

При нулевых r, s или t получим слагаемое $Q_{01} Q_{31} Q_{33} + Q_{31} Q_{01} Q_{33} + Q_{31} Q_{31} Q_{03} = 289 \cdot 51 + 289 \cdot 459/4$.

Далее, получим слагаемые

$$\begin{aligned} Q_{11}Q_{21}Q_{33}[123] + Q_{21}Q_{31}Q_{13}[231] + Q_{31}Q_{11}Q_{23}[312] &= -289 \cdot 51[312]/10, \\ Q_{11}Q_{31}Q_{23}[132] + Q_{21}Q_{11}Q_{33}[213] + Q_{31}Q_{21}Q_{13}[321] &= -289 \cdot 51[132]/10, \\ Q_{11}Q_{31}Q_{33}[133] + Q_{31}Q_{11}Q_{33}[313] + Q_{31}Q_{31}Q_{13}[331] &= 289 \cdot 17([133] + [313])/2 - \\ & 289 \cdot 153[331]/20, \end{aligned}$$

$$Q_{21}Q_{31}Q_{33}[233] + Q_{31}Q_{21}Q_{33}[323] + Q_{31}Q_{31}Q_{23}[332] = 289 \cdot 51[332]/20.$$

Отсюда $S_{113}(u, v, w) = 289(51 + 459/4 - 51(70 - \beta)/10 - 51(70 - \alpha)/10 + 17(\alpha + \beta - 70)/2 - 153(\gamma - 35)/20 + 51(74 - \gamma - \delta)/20) = 0$ и $68\alpha/5 + 68\beta/5 - 51\gamma/5 - 51\delta/20 = -51 - 459/4 + 2 \cdot 51 \cdot 7 + 17 \cdot 35 - 153 \cdot 35/20 - 51 \cdot 37/10 = 3434/5$.

Итак, $4\alpha + 4\beta - 3\gamma = 3\delta/4 + 202$.

Аналогично, $-3\alpha + 4\beta + 4\gamma = 3\delta/4 + 202$ и $4\alpha - 3\beta + 4\gamma = 3\delta/4 + 202$.

Отсюда $\alpha = \beta = \gamma = (3\delta/4 + 202)/5$, $\delta = 4\delta' \leq 40$. Поэтому $\delta \in \{4, 24\}$. Лемма доказана. $\square$

По лемме 6 либо $\delta = 4$, $\alpha = 41$, либо $\delta = 24$, $\alpha = 44$.

Положим $\Sigma = \Gamma_3(u) \cap \Gamma_3(v)$, $\Sigma^i = \Sigma \cap \Gamma_i(w)$, $\sigma_i = |\Sigma^i|$. Если $\delta = 4$, то $\sigma_1 = 6, \sigma_2 = 29, \sigma_3 = 4$, а если $\delta = 24$, то $\sigma_1 = 9, \sigma_2 = 6, \sigma_3 = 24$. Отсюда Σ не содержит 6-клик из Γ_3 (иначе $|\Sigma|$ не меньше $6 \cdot 7 = 42$). Если Σ содержит 5-клику S из Γ_3 , то S содержит не более одной вершины степени 24 в Σ (иначе $|\Sigma|$ не меньше $3 \cdot 7 + 2 \cdot 10 = 41$).

Лемма 7. Пусть Δ — множество вершин степени 29 в графе Σ_2 , $\Phi = \Sigma_3$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) если $|\Delta| \geq 20$, то $28 \leq |\Delta|$;
- (2) если $|\Delta| < 20$, то $|\Delta| \leq 14$.

Доказательство. Так как число вершин нечетной степени в графе четно, то число $|\Delta|$ четно. Пусть $|\Delta| \geq 20$. Тогда число ребер между Δ и $\Sigma_2 - \Delta$ в графе Σ_2 не больше $6|\Sigma_2 - \Delta|$, поэтому некоторая вершина из Δ смежна не более чем с $6|\Sigma_2 - \Delta|/|\Delta|$ вершинами из $\Sigma_2 - \Delta$. Если $|\Sigma_2 - \Delta| \geq 14$, то степень некоторой вершины в Δ не меньше $29 - 84/26$, противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть $|\Delta| < 20$. Рассмотрим граф $\Phi = \Sigma_3$. Тогда число ребер между Δ и $\Phi - \Delta$ в графе Φ не больше $4|\Delta|$, поэтому некоторая вершина из $\Phi - \Delta$ смежна не более чем с $4|\Delta|/|\Phi - \Delta|$ вершинами из Δ . Пусть Y_i — множество вершин из $\Phi - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ в графе Φ , $y_i = |Y_i|$. Если $|\Delta| = 18$, то степень некоторой вершины в $\Phi - \Delta$ не меньше $24 - 72/22$. Тогда $3y_3 + 4(22 - y_3) \leq 72$, поэтому $y_3 \geq 16$. Противоречие с тем, что Γ_3 не содержит 8-клик. Если $|\Delta| = 16$, то степень некоторой вершины в $\Phi - \Delta$ не меньше $24 - 64/24$. Далее, $y_1 + 2y_2 + 3(24 - y_1 - y_2) \leq 64$, поэтому $2y_1 + y_2 \geq 8$. С другой стороны, $y_1 + y_2/2$ не больше 4 и $y_1 = 0, y_2 = 8$, противоречие с тем, что в этом случае $\Phi - \Delta$ содержит 5-клику. $\square$

Лемма 8. Пусть Ψ — множество вершин степени 24 в графе Σ_3 . Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) если Σ_3 содержит 5-клику D , то $\{x^\perp \cap \Gamma_3(u) \mid x \in \{w\} \cup D\}$ образует разбиение $\Gamma_3(u)$ и D содержит не более одной вершины из Ψ и;
- (2) если Σ_3 содержит 4-клику D из Ψ , то $\{x^\perp \cap \Sigma \mid x \in D\}$ образует разбиение Σ и Σ не содержит 5-клик из Γ_3 ;
- (3) если $\Gamma_3(u)$ содержит такую 6-клику D , что для любых различных вершин $v, w \in D$ степень w в графе $(\Gamma_3(u) \cap \Gamma_3(v))_3$ равна 4, то $\{\Gamma_3(x) \cap \Gamma_3(u) - D \mid x \in D\}$ образует разбиение $\Gamma_3(u) - D$.

Доказательство. Пусть Σ_3 содержит 5-клику D . Если D содержит более одной вершины из Ψ , то Σ_3 содержит не менее $3 \cdot 7 + 2 \cdot 10$ вершин, противоречие. Далее, подграфы $x^\perp \cap \Gamma_3(u)$ и $y^\perp \cap \Gamma_3(u)$ не пересекаются для различных вершин $x, y \in \{w\} \cup D$. Так как степень вершины в графе $\Gamma_3(u)$ равна 35, то $\{x^\perp \cap \Gamma_3(u) \mid x \in \{w\} \cup D\}$ образует разбиение $\Gamma_3(u)$;

Пусть Σ_3 содержит 4-клику D из Ψ . Тогда подграфы $x^\perp \cap \Sigma$ и $y^\perp \cap \Sigma$ не пересекаются для различных вершин $x, y \in D$. Так как степень вершины из Ψ в графе Σ равна 9, то $\{x^\perp \cap \Sigma \mid x \in D\}$ образует разбиение Σ .

Пусть Σ содержит 5-клику S из Γ_3 . Тогда две вершины из S смежны с некоторой вершиной из D , противоречие.

Пусть $\Gamma_3(u)$ содержит такую 6-клику D , что для любых различных вершин $v, w \in D$ степень w в графе $(\Gamma_3(u) \cap \Gamma_3(v))_3$ равна 4. Тогда $\Gamma_3(x) \cap \Gamma_3(u) - D$ не пересекает $\Gamma_3(y) \cap \Gamma_3(u) - D$ для любых различных вершин $x, y \in D$, поэтому $\{\Gamma_3(x) \cap \Gamma_3(u) - D \mid x \in D\}$ образует разбиение $\Gamma_3(u) - D$. $\square$

2. Клики в Γ

В этом параграфе мы докажем, что Γ не содержит 16-клик. Пусть $b^+ = b_1/\theta_1 + 1 = 2$, $b^- = b_1/\theta_3 + 1 = -12$. По предложению 4.4.6 из [5] порядок клики в Γ не больше $1 - k/\theta_3 = 16$ и для индуцированного полного двудольного подграфа $K_{s,t}$ из Γ имеем $2st/(s+t) \leq b^+ + 1 = 3$. Если K является 16-кликой из Γ , то любая вершина из $\Gamma - K$ смежна с 0 или $|K| + b^- = 4$ вершинами из K .

Лемма 9. Пусть u, v, w — вершины графа Γ , $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 1$. Положим $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, $[111] = \varphi$ и $[222] = \psi$. Тогда верно равенство $\psi - 5\varphi - 187 = 0$.

Доказательство. Для нашего графа по лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} [121] &= [211] = [112] = 31 - \varphi, [122] = [212] = [221] = 41 + \varphi; \\ [223] &= [232] = [322] = 373 - \varphi - \psi, [233] = [323] = [332] = -229 + \varphi + \psi; \\ [333] &= 301 - \varphi - \psi \leq 72, \text{ поэтому} \\ \varphi &\leq 31 \text{ и } 229 \leq \varphi + \psi \leq 301. \end{aligned}$$

Для графа Γ имеем $q_{13}^1 = q_{31}^1 = q_{11}^3 = 0$. Поэтому $S_{113}(u, v, w) = S_{131}(u, v, w) = S_{311}(u, v, w) = 0$. Напомним, что $[13h] = [1h3] = [h13] = 0$ для любого $1 \leq h \leq 3$.

Как и выше, слагаемые $[rst]$ в формуле $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^d Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, имеющие два индекса 2, можно опускать. Вычислим $S_{113}(u, v, w)$.

При нулевых r, s или t получим слагаемое $Q_{01} Q_{11} Q_{13} [011] + Q_{11} Q_{01} Q_{13} [101] + Q_{11} Q_{11} Q_{03} [110] = -34 \cdot 153 \cdot 51/5 + 17 \cdot 17 \cdot 459 = 3^4 \cdot 17^3/5$.

Далее, получим слагаемые

$$\begin{aligned} Q_{11} Q_{11} Q_{13} [111] &= -17 \cdot 17 \cdot 153\varphi/5, \\ Q_{11} Q_{11} Q_{23} [112] + Q_{11} Q_{21} Q_{13} [121] + Q_{21} Q_{11} Q_{13} [211] &= 17 \cdot 17 \cdot 51(p_{11}^1 - 1 - \varphi)/5 = \\ &= 17 \cdot 17 \cdot 51(31 - \varphi)/5, \end{aligned}$$

$$Q_{21} Q_{31} Q_{33} [233] + Q_{31} Q_{21} Q_{33} [323] + Q_{31} Q_{31} Q_{23} [332] = 289 \cdot 51(p_{23}^1 - p_{22}^1 + p_{12}^1 - p_{11}^1 + 1 + \varphi + \psi)/20 = 289 \cdot 51(-229 + \varphi + \psi)/20,$$

$$Q_{31} Q_{31} Q_{33} [333] = -289 \cdot 17(p_{33}^1 - p_{23}^1 + p_{22}^1 - p_{12}^1 + p_{11}^1 - 1 - \varphi - \psi)/4 = -289 \cdot 17(301 - \varphi - \psi)/4.$$

Отсюда $S_{113}(u, v, w) = 2 \cdot 17^3(\psi - 5\varphi - 187)/5$. Симметрично, $S_{131}(u, v, w) = S_{311}(u, v, w) = 2 \cdot 17^3(\psi - 5\varphi - 187)/5$. $\square$

По лемме 9 имеем $\varphi = (\psi - 187)/5$ и выполняются равенства

$$[121] = [211] = [112] = 31 - \varphi = (342 - \psi)/5, [122] = [212] = [221] = 41 + \varphi = (18 + \psi)/5;$$

$$[223] = [232] = [322] = 373 - \varphi - \psi = (2052 - 6\psi)/5, [233] = [323] = [332] = -229 + \varphi + \psi = (6\psi - 1332)/5;$$

$$[333] = 301 - \varphi - \psi = (1692 - 6\psi)/5.$$

С учетом неравенств $\varphi \leq 31$ и $229 \leq \varphi + \psi \leq 301$ получим $\psi \in \{222, 227, 232, \dots, 282\}$, соответственно, $\varphi \in \{7, 8, 9, \dots, 19\}$. Так как $p_{33}^1 = 72$, то $[333] = (1692 - 6\psi)/5 \leq 72$ и

Лемма 10. Пусть u, v, w — вершины графа Γ , $d(u, v) = d(u, w) = 3$ и $d(v, w) = 1$. Положим $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, $[122] = \alpha'$, $[212] = \beta'$, $[221] = \gamma'$ и $[222] = \delta'$. Тогда $\alpha' = 330 - \delta'$, $\beta' = \gamma' = \delta'/2 - 90$.

Доказательство. Из леммы 2 следуют равенства:

$$[132] = [123] = 70 - \alpha', [312] = [321] = 72 - \beta' \text{ и } [311] = \beta' - 38;$$

$$[322] = 414 - \alpha' - \delta', [232] = [223] = 420 - \beta' - \delta' \text{ и } [211] = 70 - \beta';$$

$$[133] = \alpha' - 35 \text{ и } [333] = 386 - \alpha' - \beta' - \delta';$$

$$[233] = \delta' + \beta' - 280 \text{ и } [332] = [323] = \alpha' + \beta' + \delta' - 346.$$

Для графа Γ имеем $q_{13}^1 = q_{31}^1 = q_{11}^3 = 0$. Поэтому $S_{113}(u, v, w) = S_{131}(u, v, w) = S_{311}(u, v, w) = 0$. Напомним, что $[11h] = [1h1] = 0$ и $[h13] = [h31] = 0$ для любого $1 \leq h \leq 3$.

Как и выше, слагаемые $[rst]$ в формуле $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^d Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, имеющие два индекса 2, можно опускать. Вычислим $S_{113}(u, v, w)$.

$$\text{При нулевых } r, s \text{ или } t \text{ получим слагаемое } Q_{01} Q_{31} Q_{33} [033] + Q_{31} Q_{01} Q_{13} [301] + Q_{31} Q_{11} Q_{03} [310] = 51 \cdot 17 \cdot 17/2 + 17 \cdot 51 \cdot 153/10 - 17 \cdot 17 \cdot 459/2 = 17^3(3/2 + 27/10 - 27/2) = 17^3(5 + 9 - 45)/10 = -17^3 \cdot 3 \cdot 31/10.$$

Далее, получим слагаемые

$$Q_{11} Q_{11} Q_{23} [112] + Q_{11} Q_{21} Q_{13} [121] + Q_{21} Q_{11} Q_{13} [211] = 0,$$

$$Q_{11} Q_{11} Q_{33} [113] + Q_{11} Q_{31} Q_{13} [131] + Q_{31} Q_{11} Q_{13} [311] = 289 \cdot 153(\beta' - 38)/10,$$

$$Q_{11} Q_{21} Q_{33} [123] + Q_{21} Q_{31} Q_{13} [231] + Q_{31} Q_{11} Q_{23} [312] = -289 \cdot 51(72 - \beta')/10,$$

$$Q_{13} Q_{31} Q_{23} [132] + Q_{21} Q_{11} Q_{33} [213] + Q_{33} Q_{21} Q_{11} [321] = -289 \cdot 51(70 - \alpha')/10,$$

$$Q_{11} Q_{31} Q_{33} [133] + Q_{31} Q_{11} Q_{33} [313] + Q_{31} Q_{31} Q_{13} [331] = 289 \cdot 17(\alpha' - 35)/2,$$

$$Q_{21} Q_{31} Q_{33} [233] + Q_{31} Q_{21} Q_{33} [323] + Q_{31} Q_{31} Q_{23} [332] = 289 \cdot 51(\alpha' + \beta' + \delta' - 346)/20,$$

$$Q_{31} Q_{31} Q_{33} [333] = -289 \cdot 17(386 - \alpha' - \beta' - \delta')/4.$$

$$\text{Отсюда } S_{113}(u, v, w) = 2 \cdot 17^3(3\alpha' + 4\beta' + \delta' - 630)/5.$$

$$\text{Аналогично, } S_{131}(u, v, w) = 2 \cdot 17^3(3\alpha' + 4\beta' + \delta' - 630)/5 \text{ и } S_{311}(u, v, w) = 17^3(-\alpha' - 6\beta' + 2\delta' - 210)/5.$$

$$\text{Отсюда } \alpha' = 330 - \delta', \beta' = \delta'/2 - 90. \quad \square$$

По лемме 10 верны равенства:

$$[132] = [123] = 70 - \alpha' = \delta' - 260, [312] = [321] = 72 - \beta' = 162 - \delta'/2 \text{ и } [311] = \beta' - 38 = \delta'/2 - 128;$$

$$[322] = 414 - \alpha' - \delta' = 84, [232] = [223] = 420 - \beta' - \delta' = 510 - 3\delta'/2 \text{ и } [211] = 70 - \beta' = 160 - \delta'/2;$$

$$[133] = \alpha' - 35 = 295 - \delta' \text{ и } [333] = 386 - \alpha' - \beta' - \delta' = 146 - \delta'/2;$$

$$[233] = \delta' + \beta' - 280 = 3\delta'/2 - 370 \text{ и } [332] = [323] = \alpha' + \beta' + \delta' - 346 = \delta'/2 - 106.$$

$$\text{Отсюда } 130 \leq \delta'/2 \leq 146 \text{ и } 38 \leq \alpha'.$$

Лемма 11. Пусть K является 16-кликкой из Γ . Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) $|\Gamma_1(K)| = 360$, $|\Gamma_2(K)| = 576$, вершина из $\Gamma_2(K)$ смежна с 30 вершинами из $\Gamma_1(K)$, вершина из $\Gamma_1(K)$ смежна с 48 вершинами из $\Gamma_2(K)$;
 (2) для вершины z из $\Gamma_2(K)$ имеем $|K \cap \Gamma_3(z)| = 6$.

Доказательство. Пусть в схеме $(K, \Gamma_1(K))$ точка и блок инцидентны, если они смежны в Γ . Тогда $(K, \Gamma_1(K))$ является 2 – (16, 4, 18) схемой, поэтому каждая точка инцидентна ровно $r = 90$ блокам и $|\Gamma_1(K)| = 16 \cdot 90/4 = 360$. Отсюда $|\Gamma_2(K)| = 952 - 16 - 360 = 576$.

Пусть вершина $z \in \Gamma_2(K)$ смежна с β вершинами из $\Gamma_1(K)$. Тогда $|K \cap \Gamma_2(z)| = 4\beta/12$ и $|K \cap \Gamma_3(z)| = l = 16 - \beta/3$.

Пусть в схеме $(K, \Gamma_2(K))$ точка и блок инцидентны, если они находятся на расстоянии 3 в Γ . Тогда $(K, \Gamma_2(K))$ является 2 – (16, l , 72) схемой, в которой каждая точка инцидентна ровно 216 блокам и число блоков равно 576. Отсюда $16 \cdot 216 = 576l$, $l = 6$ и $\beta = 30$.

Теперь вершина из $\Gamma_1(K)$ смежна с $576\beta/360 = 48$ вершинами из $\Gamma_2(K)$. $\square$

Пусть $z \in \Gamma_2(K)$ и $u, v \in \Gamma_3(z)$. По лемме 10 имеем $[122] = \alpha' = 30$. Противоречие с тем, что $38 \leq \alpha'$.

Предложение 2 доказано.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

В этом параграфе мы докажем теорему 1.

Лемма 12. Пусть u, v, w – вершины графа Γ , $d(u, v) = d(u, w) = 3$ и $d(v, w) = 2$. Положим $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, $[122] = \alpha''$, $[212] = \beta''$, $[221] = \gamma''$, $[222] = \delta''$ и $[313] = \nu$. Тогда $\alpha'' = -\delta'' - 9\nu/2 + 358$, $\beta'' = \gamma'' = \delta''/2 + 15\nu/4 - 120$.

Доказательство. Из леммы 3 следуют равенства:

$$\begin{aligned} [132] &= [123] = 70 - \alpha'', [312] = 69 - \beta'', [321] = 69 - \gamma'', [213] = 24 - \nu, \\ [231] &= 24 - \nu + \beta'' - \gamma'' \text{ и } [311] = -34 + \beta'' - \nu; \\ [322] &= 416 - \alpha'' - \delta'', [232] = 420 - \delta'' - \beta'', [223] = 420 - \delta'' - \gamma'', [211] = \\ &= 46 + \nu - \beta''; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [133] &= \alpha'' - 35, [331] = \nu - \beta'' + \gamma'' \text{ и } [333] = 386 - \alpha'' - \delta'' - \gamma'' - \nu; \\ [233] &= -304 + \delta'' + \gamma'' + \nu, [332] = -346 + \alpha'' + \beta'' + \delta'', [323] = -346 + \alpha'' + \gamma'' + \delta''. \end{aligned}$$

Для нашего графа имеем $q_{13}^1 = q_{31}^1 = q_{11}^3 = 0$. Поэтому $S_{113}(u, v, w) = S_{131}(u, v, w) = S_{311}(u, v, w) = 0$. Напомним, что $[11h] = [1h1] = 0$ для любого $1 \leq h \leq 3$.

Как и выше слагаемые $[rst]$ в формуле $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^d Q_{ri}Q_{sj}Q_{th} \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, имеющие два индекса 2, можно опускать. Вычислим $S_{113}(u, v, w)$.

$$\text{При нулевых } r, s \text{ или } t \text{ получим слагаемое } Q_{01}Q_{31}Q_{33}[033] + Q_{31}Q_{01}Q_{23}[302] + Q_{21}Q_{31}Q_{03}[320] = 3 \cdot 17^3/5.$$

Далее, получим слагаемые

$$\begin{aligned} &Q_{11}Q_{11}Q_{23}[112] + Q_{11}Q_{21}Q_{13}[121] + Q_{21}Q_{11}Q_{13}[211] = 0, \\ &Q_{11}Q_{11}Q_{33}[113] + Q_{11}Q_{31}Q_{13}[131] + Q_{31}Q_{11}Q_{13}[311] = 289 \cdot 153(-34 + \beta'' - \nu)/10, \\ &Q_{11}Q_{21}Q_{33}[123] + Q_{21}Q_{31}Q_{13}[231] + Q_{31}Q_{11}Q_{23}[312] = -289 \cdot 51(69 - \beta'')/10, \\ &Q_{13}Q_{31}Q_{23}[132] + Q_{21}Q_{11}Q_{33}[213] + Q_{33}Q_{21}Q_{11}[321] = -289 \cdot 51(70 - \alpha'')/10, \\ &Q_{11}Q_{31}Q_{33}[133] + Q_{31}Q_{11}Q_{33}[313] + Q_{31}Q_{31}Q_{13}[331] = 289 \cdot 17(-35 + \alpha'')/2 + \\ &+ 289 \cdot 17\nu/2 - 289 \cdot 153(\nu - \beta'' + \gamma'')/20, \\ &Q_{21}Q_{31}Q_{33}[233] + Q_{31}Q_{21}Q_{33}[323] + Q_{31}Q_{31}Q_{23}[332] = 289 \cdot 51(-346 + \alpha'' + \\ &+ \beta'' + \delta'')/20, \end{aligned}$$

$$Q_{31}Q_{31}Q_{33}[333] = -289 \cdot 17(386 - \alpha'' - \delta'' - \gamma'' - \nu)/4.$$

$$\text{Отсюда } S_{113}(u, v, w) = (6 \cdot 17^3 \alpha'' + 9 \cdot 17^3 \beta'' + 2 \cdot 17^3 \delta'' - 17^3 \gamma'' - 3 \cdot 17^3 \nu - 4 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 17^3)/5 = 17^3(6\alpha'' + 9\beta'' + 2\delta'' - \gamma'' - 3\nu - 4 \cdot 9 \cdot 11)/5.$$

$$\text{Аналогично, } S_{131}(u, v, w) = 17^3(6\alpha'' + 2\beta'' + 2\delta'' + 6\gamma'' - 3\nu - 4 \cdot 9 \cdot 11)/5 \text{ и } S_{311}(u, v, w) = 17^3(-\alpha'' - 12\beta'' + 2\delta'' + 6\gamma'' - 18\nu - 2 \cdot 181)/5.$$

$$\text{Из } S_{113}(u, v, w) = S_{131}(u, v, w) = S_{311}(u, v, w) = 0 \text{ следует, что } \alpha'' = -\delta'' - 9\nu/2 + 358, \beta'' = \gamma'' = \delta''/2 + 15\nu/4 - 120. \quad \square$$

Из леммы 12 следуют равенства:

$$[132] = [123] = 70 - \alpha'' = \delta'' + 9\nu/2 - 288, [312] = [321] = 69 - \beta'' = 189 - \delta''/2 - 15\nu/4, [213] = [231] = 24 - \nu \text{ и } [311] = -34 + \beta' - \nu = \delta''/2 + 11\nu/4 - 154; [322] = 416 - \alpha'' - \delta'' = 58 + 9\nu/2, [232] = [223] = 420 - \delta'' - \beta'' = 540 - 3\delta''/2 - 15\nu/4, [133] = \alpha'' - 35 = -\delta'' - 9\nu/2 + 323, [331] = \nu \text{ и } [333] = 386 - \alpha'' - \delta'' - \beta'' - \nu = 148 - \delta''/2 - \nu/4;$$

$$[233] = -304 + \delta'' + \beta'' + \nu = -424 + 3\delta''/2 + 19\nu/4, [332] = [323] = -346 + \alpha'' + \beta'' + \delta'' = -108 - 3\nu/4 + \delta''/2.$$

Далее, $\nu \leq 24$, $35 \leq \alpha'' \leq 70$ (равносильно $288 \leq \delta'' + 9\nu/2 \leq 323$) и $34 + \nu \leq \beta'' \leq 69$ (равносильно $154 + \nu \leq \delta''/2 + 15\nu/4 \leq 189$). С другой стороны, $144 - 9\nu/4 \leq \delta''/2 \leq 148 - \nu/4$, $108 \leq \delta''/2 - \nu/4$ и в случае $\nu = 0$ имеем $154 \leq \delta''/2 \leq 148$, противоречие.

В случае $\nu = 24$ имеем $114 \leq \delta''/2 \leq 99$, противоречие. В случае $\nu = 20$ имеем $113 \leq \delta''/2 = 114$ и $[333] \in \{29, 30\}$, противоречие с тем, что $[313] + [333] \leq 40$. В случае $\nu = 16$ имеем $112 \leq \delta''/2 \leq 129$. Так как $[333] = 144 - \delta''/2 \leq 24$, то $120 \leq \delta''/2 \leq 129$, противоречие с тем, что $[311] = \delta''/2 - 90 \leq 12$.

В случае $\nu = 12$ имеем $117 \leq \delta''/2 \leq 135$. С учетом равенства $[311] = \delta''/2 - 121$ имеем $121 \leq \delta''/2 \leq 133$ и $12 \leq [333] = 145 - \delta''/2 \leq 24$.

В случае $\nu = 8$ имеем $135 \leq \delta''/2 \leq 143$ и $3 \leq [333] = 146 - \delta''/2 \leq 11$.

В случае $\nu = 4$ имеем $136 \leq \delta''/2 \leq 147$. С учетом равенства $[311] = \delta''/2 - 143$ имеем $143 \leq \delta''/2 \leq 147$ и $0 \leq [333] = 147 - \delta''/2 \leq 4$.

Лемма 13. Для любой вершины $z \in \Gamma$ подграф $\Gamma_3(z)$ не содержит 3-клик.

Доказательство. Пусть z — такая вершина графа Γ , что $\Omega = \Gamma_3(z)$ содержит 3-клику $\{u, v, w\}$. Положим $\{rst\}' = \Omega \cap \{rst\}^{uvw}$, $[rst]' = |\{rst\}'|$, $[111]' = \varphi'$ и $[222]' = \psi'$. Если X_i — множество вершин из $\Omega - \{u, v, w\}$, смежных в Ω_2 точно с i вершинами из $\{u, v, w\}$, $x_i = |X_i|$, то $x_3 = \psi'$, $x_2 = 3(83 - \psi')$, $x_1 = 3(\psi' - 28)$, $x_0 = [111]' + [333]' = 213 - \psi' - 3(83 - \psi') - 3(\psi' - 28) = 48 - \psi'$.

Далее, $X_2 \cap \Gamma_2(v) \cap \Gamma_2(w) = \{122\}' \cup \{322\}'$, поэтому $[122]' + [322]' = 83 - \psi'$. Заметим, что $\Omega(u) - \{111\}'$ содержится в $\Gamma_2(v) \cap \Gamma_2(w)$, следовательно, $X_2 \cap \Gamma_2(v) \cap \Gamma_2(w)$ содержит $35 - [111]'$ вершин из $\Omega(u)$ и $83 - \psi' - (35 - [111]') = 48 - \psi' + [111]' = 48 - \psi' + (-[333]' + 48 - \psi')$ вершин из $\Omega_3(u)$. Отсюда $[322]' = 96 - 2\psi' - [333]'$ и $2\psi' + [333]' \leq 96$. С другой стороны, $X_1 \cap \Gamma_2(v) = \{323\}'$ и $\psi' - 28 = [323]'$.

Ввиду леммы 10 имеем $[311]^{zuw} + [333]^{zuw} = 146 - \delta'/2 + \delta'/2 - 128 = 18$, поэтому $[111]' + [333]' \leq 17$ и $31 \leq \psi' \leq 40$.

Теперь $3 \leq \psi' - 28 = [323]' \leq 12$, $[333]' \leq 48 - \psi'$ и $40 = [323]' + [332]' + [333]' \leq 2(\psi' - 28) + 48 - \psi' = \psi' - 8$, противоречие. $\square$

Завершим доказательство теоремы 1. Пусть u — вершина графа Γ , v, w — смежные вершины из $\Omega = \Gamma_3(u)$, $[rst] = [rst]^{uvw}$, $[122] = \alpha'$, $[212] = \beta'$, $[221] = \gamma'$ и

$[222] = \delta'$. По лемме 10 имеем $\alpha' = 330 - \delta'$, $\beta' = \gamma' = \delta'/2 - 90$ и $130 \leq \delta'/2 \leq 146$.
Далее, $[311] = \delta'/2 - 128 = 0$ и $\delta'/2 = 128$, противоречие.

Теорема 1 доказана.

REFERENCES

- [1] J.H. Koolen, J. Park, *Shilla distance-regular graphs*, Europ. J. Comb., **31**:8 (2010), 2064–2073. MR2718281
- [2] A.E. Brouwer, S. Sumaloj, C. Worawannotai, *The nonexistence of distance-regular graphs with intersection arrays $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$ and $\{36, 28, 4; 1, 2, 24\}$* , Australasian J. Comb., **66** (2016), 330–332. MR3556137
- [3] I.N. Belousov, A.A. Makhnev, *Distance-regular graphs with intersection arrays $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ and $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ do not exist*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 1506–1512.
- [4] A. Jurisic, J. Vidali, *Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3*, Des. Codes Cryptogr., **65**:1–2 (2012), 29–47. MR2943642
- [5] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1989. MR1002568

IVAN NIKOLAEVICH BELOUSOV

N.N. KRASOVSKII INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS OF UB RAS,
16, S.KOVALEVSKAYA STR.,
YEKATERINBURG, 620990, RUSSIA
E-mail address: i_belousov@mail.ru

ALEKSANDR ALEKSEEVICH MAKHNEV

N.N. KRASOVSKII INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS OF UB RAS,
16, S.KOVALEVSKAYA STR.,
YEKATERINBURG, 620990, RUSSIA
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru