Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

P. N. Klepikov, Four-dimensional metric Lie groups with zero Schouten–Weyl tensor,
Sib. Èlektron. Mat. Izv., 2019, Volume 16, 271–330

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.019>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.209.52.79

April 26, 2023, 13:38:31

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 271–330 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.019

УДК 514.764.2

MSC 53C30, 53C50

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ЛИ
С НУЛЕВЫМ ТЕНЗОРОМ СХОУТЕНА-ВЕЙЛЯ

П.Н. КЛЕПИКОВ

ABSTRACT. In this paper we investigate a left-invariant (pseudo)Riemannian metrics on four-dimensional Lie groups with zero Schouten-Weyl tensor. A complete classification of metric Lie algebras of such Lie groups is obtained.

Keywords: left-invariant (pseudo)Riemannian metrics, Lie groups, Ricci operator, Schouten-Weyl tensor, Segre types.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Фундаментальная монография [1] содержит основную информацию о (псевдо)римановых многообразиях с нулевым тензором Схоутена-Вейля (или, что равносильно с нулевой дивергенцией тензора Вейля). Данный класс многообразий содержит в себе некоторые достаточно известные и изученные многообразия, например, многообразия Эйнштейна ($r = \lambda g$) и их прямые произведения, локально симметричные, Риччи параллельные и конформно плоские многообразия ($\nabla R = 0$, $\nabla r = 0$, $W = 0$ соответственно). Заметим также, что в случае многообразий постоянной скалярной кривизны (например, в случае метрических групп Ли), класс многообразий с нулевым тензором Схоутена-Вейля вкладывается в класс эйнштейново-подобных многообразий в смысле А. Грея [2].

В общем случае проблема классификации (псевдо)римановых многообразий с нулевым тензором Схоутена-Вейля является достаточно сложной задачей. Однако, для однородных многообразий известны некоторые результаты в случае малой размерности. В римановом случае известна классификация четырехмерных групп Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля Д.С. Воронова,

КЛЕПИКОВ, P.N., FOUR-DIMENSIONAL METRIC LIE GROUPS WITH ZERO SCHOUTEN-WEYL TENSOR.

© 2019 Клепиков П.Н.

Поступила 18 марта 2018 г., опубликована 11 марта 2019 г.

Е.Д. Родионова, В.В. Славского и О.П. Хромовой [3, 4, 5, 6]. Эйнштейновоподобные однородные (псевдо)римановы 4-многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии были классифицированы А. Заемом и А. Гаджи-Бадали в работе [7]. Классификация конформно плоских однородных (псевдо)римановых пространств (в том числе групп Ли) в четырехмерном случае была получена Дж. Кальварузо и А. Заемом (см. [8]). В случае четырехмерных групп Ли Дж. Кальварузо и А. Заем классифицировали левоинвариантные псевдоримановые метрики Эйнштейна и метрики с параллельным тензором Риччи [9, 10].

В данной работе, мы получим классификацию левоинвариантных псевдоримановых метрик на четырехмерных группах Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, которые не являются ни конформно плоскими, ни Риччи параллельными, что завершает классификацию четырехмерных однородных (псевдо)римановых многообразий с нулевым тензором Схоутена-Вейля.

Тензор Схоутена-Вейля SW (также известный как тензор Коттона) (псевдо)риманова многообразия (M, g) размерности $n \geq 3$ определяется формулой:

$$SW(X, Y, Z) = \nabla_Z A(X, Y) - \nabla_Y A(X, Z),$$

где $A = \frac{1}{n-2} \left(r - \frac{sg}{2(n-1)} \right)$ — тензор одномерной кривизны (тензор Схоутена), r — тензор Риччи, s — скалярная кривизна. Если $n \geq 4$, то тензор Схоутена-Вейля связан с дивергенцией тензора Вейля W через уравнение [1]:

$$SW = -(n-3) \operatorname{div} W.$$

Если скалярная кривизна является константой, то следующие условия эквивалентны

$$(1) \quad SW = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_Z r(X, Y) = \nabla_Y r(X, Z).$$

Следуя стандартной терминологии (см., например, [8, 11]), мы определим *тип Сегре* самосопряженного оператора, относительно знаконеопределенного скалярного произведения, который записывается между скобок $\{ \}$, и обозначает размеры клеток Жордана в разложении матрицы оператора. Круглые скобки группируют вместе различные блоки, соответствующие одному собственному значению. В таком случае тип Сегре называется *вырожденным*. Запись $\{1\bar{1}\}$ означает, что оператор имеет комплексно-сопряженные собственные значения кратности один, а запись $\{2\bar{2}\}$ — кратности два.

ТАБЛИЦА 1. Возможные типы Сегре оператора Риччи четырехмерной метрической группы Ли

Невырожденные	$\{1111\}$	$\{112\}$	$\{22\}$	$\{13\}$	$\{4\}$
Вырожденные	$\{11(11)\}$	$\{1(12)\}$	$\{(22)\}$	$\{(13)\}$	—
	$\{(11)(11)\}$	$\{(11)2\}$			
	$\{1(111)\}$	$\{(112)\}$			
	$\{(1111)\}$				
Невырожденные	$\{111\bar{1}\}$	$\{21\bar{1}\}$	$\{2\bar{2}\}$	$\{1\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$	
Вырожденные	$\{(11)1\bar{1}\}$	—	—	$\{(1\bar{1}\bar{1}\bar{1})\}$	

Ключевым шагом к решению проблемы классификации четырехмерных метрических групп Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля является рассмотрение различных типов Сегре оператора Риччи. Все возможные типы Сегре оператора Риччи четырехмерной метрической группы Ли приведены в таблице 1 (см., например, [8, 11]).

Отметим, что в случае лоренцевой метрики возможны только типы Сегре $\{1111\}$, $\{112\}$, $\{13\}$, $\{111\bar{1}\}$ и соответствующие вырожденные типы. В случае римановой метрики возможен только тип Сегре $\{1111\}$ и соответствующие вырожденные типы.

Определение 1. Метрической алгеброй называется пара $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — некоторое знаконеопределенное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$.

Произвольная метрическая группа Ли (G, g) определяет скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G , и наоборот, каждое скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}$ индуцирует левоинвариантную метрику g на группе G . Понятно, что исследования свойств кривизны некоторой метрической группы Ли гораздо удобнее проводить в терминах соответствующей метрической алгебры Ли.

Определение 2. Метрические алгебры Ли $(\mathfrak{g}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ и $(\mathfrak{g}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ называются изоморфными, если существует линейное отображение $L : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$, которое является одновременно изометрией (псевдо)евклидовых пространств и изоморфизмом алгебр Ли.

Если отождествить элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с левоинвариантными векторными полями на группе Ли G , то нетрудно получить в терминах $\mathfrak{g}$ (в некотором фиксированном базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$) формулы для вычисления основных характеристик кривизны метрической группы Ли (G, g) аналогично тому, как это делается в случае общих (псевдо)римановых многообразий. Далее приведем математическую модель, позволяющую вычислять компоненты тензора Риччи и записывать уравнение (1) через структурные константы C_{ij}^k и метрический тензор g_{ij} соответствующей метрической алгебры Ли (подробнее см. [3, 4, 5, 6]):

$$\begin{aligned}
 [e_i, e_j] &= C_{ij}^k e_k, \quad \nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k, \quad \langle e_i, e_j \rangle = g_{ij}, \\
 \Gamma_{ij}^s &= \frac{1}{2} (C_{ij}^s - C_{jk}^l g_{li} g^{ks} + C_{ki}^l g_{lj} g^{ks}), \\
 (2) \quad R_{ijkt} &= C_{ij}^s \Gamma_{sk}^l g_{lt} - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l g_{lt} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l g_{lt}, \quad r_{ik} = R_{ijkt} g^{jt}, \\
 r_{ij;k} &= \nabla_{e_k} r(e_i, e_j) = -r_{sj} \Gamma_{ki}^s - r_{is} \Gamma_{kj}^s, \\
 SW_{ijk} &= \frac{1}{n-2} (r_{ij;k} - r_{ik;j}).
 \end{aligned}$$

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП ЛИ С НУЛЕВЫМ ТЕНЗОРОМ СХОУТЕНА-ВЕЙЛЯ

В данном разделе мы рассмотрим левоинвариантные псевдоримановы метрики на группах Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, которые не являются ни конформно плоскими, ни Риччи параллельными. Ранее Дж. Кальварузо и А. Заем классифицировали левоинвариантные псевдоримановы метрики Эйнштейна, конформно плоские метрики и метрики с параллельным тензором Риччи на четырехмерных группах Ли (см. [8, 9, 10]).

Далее будем использовать удобные базисы в метрической алгебре Ли, в которых оператор Риччи, тензор Риччи и метрический тензор имеют удобный вид. Такие базисы были построены в работе [12].

При описании изоморфизмов метрических алгебр Ли матрицы перехода, сохраняющие вид метрического тензора g (возможно с точностью до переобозначения параметров), мы будем называть g -ортогональными. Например, пусть

$$g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица O является g -ортогональной, поскольку матрица

$$O^T g O = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}$$

совпадает с g с точностью до переобозначения $\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2$. Использование подобных матриц перехода допустимо, поскольку далее нас будет интересовать являются ли некоторые классы метрических алгебр Ли подклассами других; при этом далее мы не будем выделять конкретные пары изоморфных метрических алгебр Ли.

Структура данного раздела такова: в теореме 1 мы покажем, что оператор Риччи четырехмерной метрической группы Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, которая не является ни конформно плоской ни Риччи параллельной, может иметь лишь 5 из 20 возможных типов Сегре. Далее, теоремы 2–6 посвящены получению классификации метрических алгебр Ли таких групп Ли с точностью до изоморфизма. Таблица 2, в которой приведены полученные метрические алгебры Ли, расположена после теоремы 6. В теореме 7 показано, что полученные метрические алгебры Ли попарно неизоморфны.

Теорема 1. Пусть (G, g) — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной. Тогда для оператора Риччи ρ возможны только следующие типы Сегре: $\{1(12)\}$, $\{(11)2\}$, $\{(112)\}$, $\{111\bar{1}\}$, $\{(22)\}$.

Доказательство. По очереди разберем типы Сегре из таблицы 1.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{111\bar{1}\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$(3) \quad r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \rho_4 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix},$$

где $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ — попарно неравные действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
C_{12}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, & C_{12}^2 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\
C_{13}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_3) &= 0, & C_{23}^2 \varepsilon_2 (\rho_2 - \rho_3) &= 0, \\
C_{14}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_4) &= 0, & C_{24}^2 \varepsilon_2 (\rho_2 - \rho_4) &= 0, \\
C_{13}^3 \varepsilon_3 (\rho_1 - \rho_3) &= 0, & C_{14}^4 \varepsilon_4 (\rho_1 - \rho_4) &= 0, \\
C_{23}^3 \varepsilon_3 (\rho_2 - \rho_3) &= 0, & C_{24}^4 \varepsilon_4 (\rho_2 - \rho_4) &= 0, \\
C_{34}^3 \varepsilon_3 (\rho_3 - \rho_4) &= 0, & C_{34}^4 \varepsilon_4 (\rho_3 - \rho_4) &= 0, \\
C_{23}^1 (2\rho_1 - \rho_2 - \rho_3) \varepsilon_1 + (C_{12}^3 \varepsilon_3 + C_{13}^2 \varepsilon_2) (\rho_2 - \rho_3) &= 0, \\
C_{24}^1 (2\rho_1 - \rho_2 - \rho_4) \varepsilon_1 + (C_{12}^4 \varepsilon_4 + C_{14}^2 \varepsilon_2) (\rho_2 - \rho_4) &= 0, \\
C_{34}^1 (2\rho_1 - \rho_3 - \rho_4) \varepsilon_1 + (C_{13}^4 \varepsilon_4 + C_{14}^3 \varepsilon_3) (\rho_3 - \rho_4) &= 0, \\
C_{13}^2 (\rho_1 - 2\rho_2 + \rho_3) \varepsilon_2 + (C_{12}^3 \varepsilon_3 - C_{23}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_3) &= 0, \\
C_{14}^2 (\rho_1 - 2\rho_2 + \rho_4) \varepsilon_2 + (C_{12}^4 \varepsilon_4 - C_{24}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_4) &= 0, \\
C_{34}^2 (2\rho_2 - \rho_3 - \rho_4) \varepsilon_2 + (C_{23}^4 \varepsilon_4 + C_{24}^3 \varepsilon_3) (\rho_3 - \rho_4) &= 0, \\
C_{12}^3 (\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_3) \varepsilon_3 + (C_{13}^2 \varepsilon_2 + C_{23}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\
C_{14}^3 (\rho_1 - 2\rho_3 + \rho_4) \varepsilon_3 + (C_{13}^4 \varepsilon_4 - C_{34}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_4) &= 0, \\
C_{24}^3 (\rho_2 - 2\rho_3 + \rho_4) \varepsilon_3 + (C_{23}^4 \varepsilon_4 - C_{34}^2 \varepsilon_2) (\rho_2 - \rho_4) &= 0, \\
C_{12}^4 (\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_4) \varepsilon_4 + (C_{14}^2 \varepsilon_2 + C_{24}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\
C_{13}^4 (\rho_1 + \rho_3 - 2\rho_4) \varepsilon_4 + (C_{14}^3 \varepsilon_3 + C_{34}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_3) &= 0, \\
C_{23}^4 (\rho_2 + \rho_3 - 2\rho_4) \varepsilon_4 + (C_{24}^3 \varepsilon_3 + C_{34}^2 \varepsilon_2) (\rho_2 - \rho_3) &= 0.
\end{aligned}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что тензор Риччи имеет вид

$$r = \begin{pmatrix} \frac{2(C_{12}^4)^2 (\rho_2 - \rho_4)^2 (\rho_4 - \rho_1)}{\varepsilon_2 \varepsilon_4 (\rho_1 - \rho_2)^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(C_{12}^4)^2 (\rho_4 - \rho_1)^2 (\rho_2 - \rho_4)}{\varepsilon_1 \varepsilon_4 (\rho_1 - \rho_2)^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(C_{12}^4)^2 (\rho_2 - \rho_4)(\rho_4 - \rho_1)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2)^2} \end{pmatrix}$$

Пусть данный тензор Риччи имеет вид (3), тогда должна выполняться система уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{2(C_{12}^4)^2 (\rho_2 - \rho_4)^2 (\rho_4 - \rho_1)}{\varepsilon_2 \varepsilon_4 (\rho_1 - \rho_2)^3} &= \varepsilon_1 \rho_1, \\
\frac{2(C_{12}^4)^2 (\rho_4 - \rho_1)^2 (\rho_2 - \rho_4)}{\varepsilon_1 \varepsilon_4 (\rho_1 - \rho_2)^3} &= \varepsilon_2 \rho_2, \\
0 &= \varepsilon_3 \rho_3, \\
\frac{2(C_{12}^4)^2 (\rho_2 - \rho_4)(\rho_4 - \rho_1)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2)^2} &= \varepsilon_4 \rho_4,
\end{aligned}$$

равносильная следующей системе

$$\begin{aligned}\rho_3 &= 0, \\ (C_{12}^4)^2 &= -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \rho_4 (\rho_1 - \rho_2)^2}{2(\rho_2 - \rho_4)(\rho_1 - \rho_4)}, \\ \rho_4 &= -\rho_1 - \rho_2, \\ \frac{\rho_1^2 + \rho_1 \rho_2 + \rho_2^2}{\rho_1 - \rho_2} &= 0,\end{aligned}$$

но последнее уравнение неразрешимо в действительных числах. Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Серге $\{1111\}$.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Серге $\{(11)(11)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \rho_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix},$$

где ρ_1, ρ_2 — неравные друг другу действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{aligned}C_{13}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, & C_{23}^2 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ C_{14}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, & C_{24}^2 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ C_{34}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, & C_{34}^2 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ C_{12}^3 \varepsilon_3 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, & C_{12}^4 \varepsilon_4 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ C_{13}^3 \varepsilon_3 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, & C_{14}^4 \varepsilon_4 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ C_{23}^3 \varepsilon_3 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, & C_{24}^4 \varepsilon_4 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ (C_{12}^3 \varepsilon_3 + C_{13}^2 \varepsilon_2 + C_{23}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ (C_{12}^4 \varepsilon_4 + C_{14}^2 \varepsilon_2 + C_{24}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ (C_{12}^3 \varepsilon_3 - C_{13}^2 \varepsilon_2 - C_{23}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ (C_{12}^4 \varepsilon_4 - C_{14}^2 \varepsilon_2 - C_{24}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ (C_{13}^4 \varepsilon_4 + C_{14}^3 \varepsilon_3 - C_{34}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ (C_{23}^4 \varepsilon_4 + C_{24}^3 \varepsilon_3 - C_{34}^2 \varepsilon_2) (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ (C_{13}^4 \varepsilon_4 + C_{14}^3 \varepsilon_3 + C_{34}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ (C_{23}^4 \varepsilon_4 + C_{24}^3 \varepsilon_3 + C_{34}^2 \varepsilon_2) (\rho_1 - \rho_2) &= 0.\end{aligned}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, получаем, что данная метрическая группа Ли обязана иметь параллельный тензор Риччи.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Серге $\{11(11)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и

тензор Риччи r имеют следующий вид

$$(4) \quad r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \rho_3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix},$$

где ρ_1, ρ_2, ρ_3 — попарно неравные действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{aligned} C_{12}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, & C_{12}^2 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ C_{13}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_3) &= 0, & C_{23}^2 \varepsilon_2 (\rho_2 - \rho_3) &= 0, \\ C_{14}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_3) &= 0, & C_{24}^2 \varepsilon_2 (\rho_2 - \rho_3) &= 0, \\ C_{34}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_3) &= 0, & C_{34}^2 \varepsilon_2 (\rho_2 - \rho_3) &= 0, \\ C_{13}^3 \varepsilon_3 (\rho_1 - \rho_3) &= 0, & C_{14}^4 \varepsilon_4 (\rho_1 - \rho_3) &= 0, \\ C_{23}^3 \varepsilon_3 (\rho_2 - \rho_3) &= 0, & C_{24}^4 \varepsilon_4 (\rho_2 - \rho_3) &= 0, \\ (C_{13}^4 \varepsilon_4 + C_{14}^3 \varepsilon_3 - C_{34}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_3) &= 0, \\ (C_{23}^4 \varepsilon_4 + C_{24}^3 \varepsilon_3 - C_{34}^2 \varepsilon_2) (\rho_2 - \rho_3) &= 0, \\ (C_{13}^4 \varepsilon_4 + C_{14}^3 \varepsilon_3 + C_{34}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_3) &= 0, \\ (C_{23}^4 \varepsilon_4 + C_{24}^3 \varepsilon_3 + C_{34}^2 \varepsilon_2) (\rho_2 - \rho_3) &= 0, \\ C_{23}^1 (2\rho_1 - \rho_2 - \rho_3) \varepsilon_1 + (C_{12}^3 \varepsilon_3 + C_{13}^2 \varepsilon_2) (\rho_2 - \rho_3) &= 0, \\ C_{24}^1 (2\rho_1 - \rho_2 - \rho_3) \varepsilon_1 + (C_{12}^4 \varepsilon_4 + C_{14}^2 \varepsilon_2) (\rho_2 - \rho_3) &= 0, \\ C_{13}^2 (\rho_1 - 2\rho_2 + \rho_3) \varepsilon_2 + (C_{12}^3 \varepsilon_3 - C_{23}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_3) &= 0, \\ C_{14}^2 (\rho_1 - 2\rho_2 + \rho_3) \varepsilon_2 + (C_{12}^4 \varepsilon_4 - C_{24}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_3) &= 0, \\ C_{12}^3 (\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_3) \varepsilon_3 + (C_{13}^2 \varepsilon_2 + C_{23}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ C_{12}^4 (\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_3) \varepsilon_4 + (C_{14}^2 \varepsilon_2 + C_{24}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) &= 0. \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что тензор Риччи имеет вид

$$r = \begin{pmatrix} -\frac{2(C_{12}^4)^2(\rho_2 - \rho_3)^2(\rho_1 - \rho_3)}{\varepsilon_4 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2)^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(C_{12}^4)^2(\rho_1 - \rho_3)^2(\rho_2 - \rho_3)}{\varepsilon_4 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2)^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2(C_{12}^4)^2(\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_3)}{\varepsilon_2 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2)^2} \end{pmatrix}$$

что противоречит виду тензора Риччи (4). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{11(11)\}$.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1(111)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и

тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \rho_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix},$$

где ρ_1, ρ_2 — неравные действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{aligned} C_{12}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, & C_{13}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ C_{23}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, & C_{14}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ C_{24}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, & C_{34}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ C_{12}^2 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, & C_{13}^3 \varepsilon_3 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ C_{14}^4 \varepsilon_4 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ (C_{12}^3 \varepsilon_3 + C_{13}^2 \varepsilon_2 - C_{23}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ (C_{12}^4 \varepsilon_4 + C_{14}^2 \varepsilon_2 - C_{24}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ (C_{12}^3 \varepsilon_3 + C_{13}^2 \varepsilon_2 + C_{23}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ (C_{13}^4 \varepsilon_4 + C_{14}^3 \varepsilon_3 - C_{34}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ (C_{12}^4 \varepsilon_4 + C_{14}^2 \varepsilon_2 + C_{24}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\ (C_{13}^4 \varepsilon_4 + C_{14}^3 \varepsilon_3 + C_{34}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) &= 0. \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, получаем, что данная метрическая группа Ли обязана иметь параллельный тензор Риччи.

Если оператор Риччи имеет тип Сегре $\{(1111)\}$, то тензор Риччи пропорционален метрическому тензору, и метрическая группа Ли является многообразием Эйнштейна, а значит имеет параллельный тензор Риччи.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{112\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$(5) \quad r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \rho_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \rho_3 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix},$$

где ρ_1, ρ_2, ρ_3 — попарно неравные действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{aligned} C_{34}^4 \varepsilon_3 &= 0, \\ C_{12}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, & C_{13}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_3) &= 0, \\ C_{12}^2 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, & C_{23}^2 \varepsilon_2 (\rho_2 - \rho_3) &= 0, \\ C_{13}^4 \varepsilon_3 (\rho_1 - \rho_3) &= 0, & C_{23}^4 \varepsilon_3 (\rho_2 - \rho_3) &= 0, \\ (C_{14}^1 (\rho_1 - \rho_3) - C_{13}^1) \varepsilon_1 &= 0, & C_{34}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_3) - C_{13}^4 \varepsilon_3 &= 0, \\ (C_{24}^2 (\rho_2 - \rho_3) - C_{23}^2) \varepsilon_2 &= 0, & C_{34}^2 \varepsilon_2 (\rho_2 - \rho_3) - C_{23}^4 \varepsilon_3 &= 0, \\ ((C_{13}^3 + C_{14}^4) \varepsilon_3 - C_{34}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_3) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((C_{23}^3 + C_{24}^4) \varepsilon_3 - C_{34}^2 \varepsilon_2) (\rho_2 - \rho_3) = 0, \\
& (2(\rho_3 - \rho_1) C_{14}^3 - C_{13}^3 + 3C_{14}^4) \varepsilon_3 + C_{34}^1 \varepsilon_1 = 0, \\
& (2(\rho_3 - \rho_2) C_{24}^3 - C_{23}^3 + 3C_{24}^4) \varepsilon_3 + C_{34}^2 \varepsilon_2 = 0, \\
& C_{23}^1 (2\rho_1 - \rho_2 - \rho_3) \varepsilon_1 + (C_{12}^4 \varepsilon_3 + C_{13}^2 \varepsilon_2) (\rho_2 - \rho_3) = 0, \\
& C_{13}^2 (\rho_1 - 2\rho_2 + \rho_3) \varepsilon_2 + (C_{12}^4 \varepsilon_3 - C_{23}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_3) = 0, \\
& C_{12}^4 (\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_3) \varepsilon_3 + (C_{13}^2 \varepsilon_2 + C_{23}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
& ((2\rho_3 - \rho_1 - \rho_2) C_{12}^3 + 2C_{12}^4) \varepsilon_3 - (C_{14}^2 \varepsilon_2 + C_{24}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
& ((C_{13}^3 + C_{14}^4) \rho_3 - (C_{13}^3 + C_{14}^4) \rho_1 + 2C_{13}^4) \varepsilon_3 - C_{34}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_3) = 0, \\
& ((C_{23}^3 + C_{24}^4) \rho_3 - (C_{23}^3 + C_{24}^4) \rho_2 + 2C_{23}^4) \varepsilon_3 - C_{34}^2 \varepsilon_2 (\rho_2 - \rho_3) = 0, \\
& ((2\rho_1 - \rho_2 - \rho_3) C_{24}^1 - C_{23}^1) \varepsilon_1 + (\rho_2 C_{14}^2 - \rho_3 C_{14}^2 - C_{13}^2) \varepsilon_2 + \\
& \quad + (\rho_2 C_{12}^3 - \rho_3 C_{12}^3 - C_{12}^4) \varepsilon_3 = 0, \\
& ((2\rho_2 - \rho_1 - \rho_3) C_{14}^2 - C_{13}^2) \varepsilon_2 + (\rho_1 C_{24}^1 - \rho_3 C_{24}^1 - C_{23}^1) \varepsilon_1 - \\
& \quad - (\rho_1 C_{12}^3 - \rho_3 C_{12}^3 - C_{12}^4) \varepsilon_3 = 0.
\end{aligned}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что тензор Риччи имеет вид

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2\varepsilon_2\varepsilon_1(C_{12}^3)^2(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)}{(\rho_1-\rho_2)^2} \end{pmatrix}$$

что противоречит виду тензора Риччи (5). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре {112}.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре {22}. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$(6) \quad r = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1\rho_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_2 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix},$$

где ρ_1, ρ_2 — неравные действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
& C_{12}^2 \varepsilon_1 = 0, \quad C_{34}^4 \varepsilon_2 = 0, \\
& C_{13}^2 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \quad C_{13}^4 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
& ((\rho_1 - \rho_2) C_{14}^2 - C_{13}^2) \varepsilon_1 = 0, \quad ((\rho_1 - \rho_2) C_{23}^4 + C_{13}^4) \varepsilon_2 = 0, \\
& C_{34}^2 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) - C_{13}^4 \varepsilon_2 = 0, \quad C_{12}^4 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2) - C_{13}^2 \varepsilon_1 = 0, \\
& ((\rho_1 - \rho_2) C_{34}^1 + C_{34}^2) \varepsilon_1 - C_{23}^4 \varepsilon_2 = 0, \\
& ((\rho_2 - \rho_1) C_{12}^3 + C_{12}^4) \varepsilon_2 + C_{14}^2 \varepsilon_1 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((C_{13}^1 + C_{23}^2) \varepsilon_1 + C_{12}^4 \varepsilon_2) (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
& ((C_{13}^3 + C_{14}^4) \varepsilon_2 - C_{34}^2 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
& (2(\rho_1 - \rho_2) C_{23}^1 - C_{13}^1 + 3C_{23}^2) \varepsilon_1 - C_{12}^4 \varepsilon_2 = 0, \\
& (2(\rho_2 - \rho_1) C_{14}^3 - C_{13}^3 + 3C_{14}^4) \varepsilon_2 + C_{34}^2 \varepsilon_1 = 0, \\
& (2(\rho_1 - \rho_2) C_{24}^1 - C_{14}^1 - 2C_{23}^1 + 3C_{24}^2) \varepsilon_1 - C_{12}^3 \varepsilon_2 = 0, \\
& (2(\rho_2 - \rho_1) C_{24}^3 - 2C_{14}^3 - C_{23}^3 + 3C_{24}^4) \varepsilon_2 + C_{34}^1 \varepsilon_1 = 0, \\
& ((C_{13}^1 + C_{23}^2) \rho_1 - (C_{13}^1 + C_{23}^2) \rho_2 + 2C_{13}^2) \varepsilon_1 - C_{12}^4 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
& ((C_{13}^3 + C_{14}^4) \rho_2 - (C_{13}^3 + C_{14}^4) \rho_1 + 2C_{13}^4) \varepsilon_2 - C_{34}^2 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
& ((C_{14}^1 + C_{24}^2) \rho_1 - (C_{14}^1 + C_{24}^2) \rho_2 - C_{13}^1 - C_{23}^2) \varepsilon_1 + \varepsilon_2 (\rho_1 C_{12}^3 - \rho_2 C_{12}^3 - C_{12}^4) = 0, \\
& ((C_{23}^3 + C_{24}^4) \rho_2 - (C_{23}^3 + C_{24}^4) \rho_1 - C_{13}^3 - C_{14}^4) \varepsilon_2 + \varepsilon_1 (\rho_1 C_{34}^1 - \rho_2 C_{34}^1 + C_{34}^2) = 0, \\
& ((C_{14}^1 + C_{24}^2) \rho_1 - (C_{14}^1 + C_{24}^2) \rho_2 - C_{13}^1 + 2C_{14}^2 - C_{23}^2) \varepsilon_1 - \\
& \quad - (\rho_1 C_{12}^3 - \rho_2 C_{12}^3 - C_{12}^4) \varepsilon_2 = 0, \\
& ((C_{23}^3 + C_{24}^4) \rho_2 - (C_{23}^3 + C_{24}^4) \rho_1 - C_{13}^3 - C_{14}^4 + 2C_{23}^4) \varepsilon_2 - \\
& \quad - (\rho_1 C_{34}^1 - \rho_2 C_{34}^1 + C_{34}^2) \varepsilon_1 = 0.
\end{aligned}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что данная метрическая алгебра Ли обязана быть Риччи плоской, что противоречит виду тензора Риччи (6). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре {22}.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре {13}. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$(7) \quad r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \rho_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \rho_2 & \varepsilon_2 \\ 0 & \varepsilon_2 \rho_2 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где ρ_1, ρ_2 — неравные действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
& C_{23}^4 \varepsilon_2 = 0, \quad C_{23}^3 \varepsilon_2 = 0, \\
& C_{23}^4 \varepsilon_2 = 0, \quad C_{24}^4 \varepsilon_2 = 0, \\
& (C_{23}^3 + C_{24}^4) \varepsilon_2 = 0, \quad (C_{24}^2 - 2C_{34}^3) \varepsilon_2 = 0, \\
& C_{12}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \quad C_{12}^4 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
& (C_{23}^2 - C_{34}^4 - 3C_{24}^3) \varepsilon_2 = 0, \quad (C_{24}^3 + C_{23}^2 - 3C_{34}^4) \varepsilon_2 = 0, \\
& ((\rho_1 - \rho_2) C_{13}^1 - C_{12}^1) \varepsilon_1 = 0, \quad ((\rho_1 - \rho_2) C_{14}^1 - C_{13}^1) \varepsilon_1 = 0, \\
& C_{23}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) - C_{12}^4 \varepsilon_2 = 0, \\
& ((C_{12}^3 + C_{13}^4) \varepsilon_2 - C_{23}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
& (2(\rho_1 - \rho_2) C_{24}^1 - C_{23}^1) \varepsilon_1 - (C_{12}^3 + C_{13}^4) \varepsilon_2 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2(\rho_2 - \rho_1)C_{13}^3 - C_{12}^3 + 3C_{13}^4)\varepsilon_2 + C_{23}^1\varepsilon_1 = 0, \\
& (2(\rho_2 - \rho_1)C_{14}^2 - C_{13}^2 + 3C_{14}^3)\varepsilon_2 + C_{34}^1\varepsilon_1 = 0, \\
& (2(\rho_1 - \rho_2)C_{34}^1 - C_{24}^1)\varepsilon_1 + (C_{12}^2 - 2C_{13}^3 + C_{14}^4)\varepsilon_2 = 0, \\
& ((C_{12}^3 + C_{13}^4)\rho_2 - (C_{12}^3 + C_{13}^4)\rho_1 + 2C_{12}^4)\varepsilon_2 - C_{23}^1\varepsilon_1(\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
& ((C_{13}^2 + C_{14}^3)\rho_2 - (C_{13}^2 + C_{14}^3)\rho_1 + 2C_{14}^4)\varepsilon_2 + C_{34}^1\varepsilon_1(\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
& ((C_{12}^2 + C_{14}^4)\rho_2 - (C_{12}^2 + C_{14}^4)\rho_1 + 2C_{12}^3)\varepsilon_2 - C_{24}^1\varepsilon_1(\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
& ((C_{12}^2 + C_{14}^4)\rho_2 - (C_{12}^2 + C_{14}^4)\rho_1 + C_{12}^3 - C_{13}^4)\varepsilon_2 + \\
& \quad + (\rho_1 C_{24}^1 - \rho_2 C_{24}^1 - C_{23}^1)\varepsilon_1 = 0, \\
& ((C_{13}^2 + C_{14}^3)\rho_2 - (C_{13}^2 + C_{14}^3)\rho_1 - C_{12}^2 + 2C_{13}^3 + C_{14}^4)\varepsilon_2 - \\
& \quad - (\rho_1 C_{34}^1 - \rho_2 C_{34}^1 - C_{24}^1)\varepsilon_1 = 0.
\end{aligned}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что тензор Риччи имеет вид

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{34}^3)^2 \end{pmatrix}$$

что противоречит виду тензора Риччи (7). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре {13}.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре {(13)}. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \rho_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \rho_1 & \varepsilon_2 \\ 0 & \varepsilon_2 \rho_1 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\rho_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
& C_{12}^1\varepsilon_1 = 0, \quad C_{12}^3\varepsilon_2 = 0, \\
& C_{12}^4\varepsilon_2 = 0, \quad C_{13}^1\varepsilon_1 = 0, \\
& C_{23}^3\varepsilon_2 = 0, \quad C_{23}^4\varepsilon_2 = 0, \\
& C_{14}^4\varepsilon_2 = 0, \quad C_{24}^4\varepsilon_2 = 0, \\
& (C_{23}^3 + C_{24}^4)\varepsilon_2 = 0, \quad (C_{24}^2 - 2C_{34}^3)\varepsilon_2 = 0, \\
& (C_{24}^3 + C_{23}^2 - 3C_{34}^4)\varepsilon_2 = 0, \quad (C_{23}^2 - C_{34}^4 - 3C_{24}^3)\varepsilon_2 = 0, \\
& (C_{12}^3 + C_{13}^4)\varepsilon_2 + C_{23}^1\varepsilon_1 = 0, \quad (C_{12}^3 - C_{13}^4)\varepsilon_2 - C_{23}^1\varepsilon_1 = 0, \\
& (3C_{13}^4 - C_{12}^3)\varepsilon_2 + C_{23}^1\varepsilon_1 = 0, \quad (3C_{14}^3 - C_{13}^2)\varepsilon_2 + C_{34}^1\varepsilon_1 = 0, \\
& (C_{12}^2 - 2C_{13}^3 + C_{14}^4)\varepsilon_2 - C_{24}^1\varepsilon_1 = 0, \\
& (C_{12}^2 - 2C_{13}^3 - C_{14}^4)\varepsilon_2 + C_{24}^1\varepsilon_1 = 0.
\end{aligned}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, получаем, что данная метрическая группа Ли обязана быть конформно плоской.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{4\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$(8) \quad r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \rho_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \rho_1 & \varepsilon_1 \\ 0 & \varepsilon_1 \rho_1 & \varepsilon_1 & 0 \\ \varepsilon_1 \rho_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\rho_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{aligned} C_{12}^3 \varepsilon_1 &= 0, & C_{12}^4 \varepsilon_1 &= 0, \\ C_{13}^4 \varepsilon_1 &= 0, & C_{14}^3 \varepsilon_1 &= 0, \\ (C_{23}^2 - C_{34}^4) \varepsilon_1 &= 0, & (C_{12}^3 + C_{13}^4) \varepsilon_1 &= 0, \\ (C_{12}^2 + C_{14}^4) \varepsilon_1 &= 0, & (C_{13}^2 - 2C_{23}^3) \varepsilon_1 &= 0, \\ (C_{24}^1 - 2C_{34}^2) \varepsilon_1 &= 0, & (C_{12}^2 + C_{13}^3 + C_{23}^4) \varepsilon_1 &= 0, \\ (C_{13}^3 + C_{12}^2 - 3C_{23}^4) \varepsilon_1 &= 0, & (C_{12}^2 - C_{23}^4 - 3C_{13}^3) \varepsilon_1 &= 0, \\ (C_{23}^1 + C_{24}^2 - 3C_{34}^3) \varepsilon_1 &= 0, & (C_{13}^1 - C_{34}^4 - 3C_{14}^2) \varepsilon_1 &= 0, \\ (C_{14}^3 + C_{12}^1 - C_{24}^4 - 2C_{13}^2) \varepsilon_1 &= 0, \\ (C_{12}^2 - C_{23}^4 - C_{13}^3 + 2C_{14}^4) \varepsilon_1 &= 0, \\ (C_{14}^2 + C_{13}^1 - C_{34}^4 - 2C_{24}^3) \varepsilon_1 &= 0, \\ (C_{14}^3 + C_{24}^4 - C_{12}^1 + 2C_{13}^2) \varepsilon_1 &= 0, \\ (C_{14}^3 + C_{12}^1 - 3C_{24}^4 + 2C_{23}^3) \varepsilon_1 &= 0, \\ (C_{23}^1 - C_{34}^3 - 3C_{24}^2 + 2C_{14}^1) \varepsilon_1 &= 0, \\ (C_{34}^4 + C_{14}^2 + C_{13}^1 - 2C_{24}^3 - 2C_{23}^2) \varepsilon_1 &= 0. \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что тензор Риччи имеет вид

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{24}^2)^2 + 3C_{24}^2 C_{34}^3 - 6(C_{34}^3)^2 \end{pmatrix}$$

что противоречит виду тензора Риччи (8). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{4\}$.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{(11)1\bar{1}\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и

тензор Риччи r имеют следующий вид

$$(9) \quad r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \alpha & \varepsilon_3 \beta \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \beta & -\varepsilon_3 \alpha \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

где $\rho_1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\beta \neq 0$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{aligned} C_{34}^4 \beta \varepsilon_3 &= 0, \quad C_{34}^3 \beta \varepsilon_3 = 0, \\ ((\rho_1 - \alpha) C_{13}^1 + \beta C_{14}^1) \varepsilon_1 &= 0, \quad ((\alpha - \rho_1) C_{14}^1 + \beta C_{13}^1) \varepsilon_1 = 0, \\ ((\rho_1 - \alpha) C_{23}^2 + \beta C_{24}^2) \varepsilon_2 &= 0, \quad ((\alpha - \rho_1) C_{24}^2 + \beta C_{23}^2) \varepsilon_2 = 0, \\ ((\alpha - \rho_1) C_{12}^3 + \beta C_{12}^4) \varepsilon_3 &= 0, \quad ((\rho_1 - \alpha) C_{12}^4 + \beta C_{12}^3) \varepsilon_3 = 0, \\ C_{34}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \alpha) - \beta \varepsilon_3 (C_{13}^3 - C_{14}^4) &= 0, \\ C_{34}^2 \varepsilon_2 (\rho_1 - \alpha) - \beta \varepsilon_3 (C_{23}^3 - C_{24}^4) &= 0, \\ ((3C_{13}^4 + C_{14}^3) \beta - 2(\rho_1 - \alpha) C_{13}^3) \varepsilon_3 + \beta C_{34}^1 \varepsilon_1 &= 0, \\ ((3C_{23}^4 + C_{24}^3) \beta - 2(\rho_1 - \alpha) C_{23}^3) \varepsilon_3 + \beta C_{34}^2 \varepsilon_2 &= 0, \\ ((C_{13}^4 + 3C_{14}^3) \beta + 2C_{14}^4 (\rho_1 - \alpha)) \varepsilon_3 + \beta C_{34}^1 \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{23}^4 + 3C_{24}^3) \beta + 2C_{24}^4 (\rho_1 - \alpha)) \varepsilon_3 + \beta C_{34}^2 \varepsilon_2 &= 0, \\ ((C_{14}^3 - C_{13}^4) \alpha + (C_{13}^4 - C_{14}^3) \rho_1 + 2\beta C_{14}^4) \varepsilon_3 + C_{34}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \alpha) &= 0, \\ ((C_{24}^3 - C_{23}^4) \alpha + (C_{23}^4 - C_{24}^3) \rho_1 + 2\beta C_{24}^4) \varepsilon_3 + C_{34}^2 \varepsilon_2 (\rho_1 - \alpha) &= 0, \\ ((C_{14}^3 - C_{13}^4) \alpha + (C_{13}^4 - C_{14}^3) \rho_1 + 2\beta C_{13}^3) \varepsilon_3 - C_{34}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \alpha) &= 0, \\ ((C_{24}^3 - C_{23}^4) \alpha + (C_{23}^4 - C_{24}^3) \rho_1 + 2\beta C_{23}^3) \varepsilon_3 - C_{34}^2 \varepsilon_2 (\rho_1 - \alpha) &= 0, \\ (\alpha C_{23}^1 - \beta C_{24}^1 - \rho_1 C_{23}^1) \varepsilon_1 + (\alpha C_{13}^2 - \beta C_{14}^2 - \rho_1 C_{13}^2) \varepsilon_2 + \\ &+ (\alpha C_{12}^3 + \beta C_{12}^4 - \rho_1 C_{12}^3) \varepsilon_3 = 0, \\ (\alpha C_{24}^1 + \beta C_{23}^1 - \rho_1 C_{24}^1) \varepsilon_1 + (\alpha C_{14}^2 + \beta C_{13}^2 - \rho_1 C_{14}^2) \varepsilon_2 - \\ &- (\alpha C_{12}^4 - \beta C_{12}^3 - \rho_1 C_{12}^4) \varepsilon_3 = 0, \\ (\alpha C_{23}^1 - \beta C_{24}^1 - \rho_1 C_{23}^1) \varepsilon_1 + (\alpha C_{13}^2 - \beta C_{14}^2 - \rho_1 C_{13}^2) \varepsilon_2 - \\ &- (\alpha C_{12}^3 + \beta C_{12}^4 - \rho_1 C_{12}^3) \varepsilon_3 = 0, \\ (\alpha C_{24}^1 + \beta C_{23}^1 - \rho_1 C_{24}^1) \varepsilon_1 + (\alpha C_{14}^2 + \beta C_{13}^2 - \rho_1 C_{14}^2) \varepsilon_2 + \\ &+ (\alpha C_{12}^4 - \beta C_{12}^3 - \rho_1 C_{12}^4) \varepsilon_3 = 0. \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что данная метрическая алгебра Ли обязана быть Риччи плоской, что противоречит виду тензора Риччи (9). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{(11)1\bar{1}\}$.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{21\bar{1}\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор

Риччи r имеют следующий вид

$$(10) \quad r = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \rho_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 \rho_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \alpha & \varepsilon_2 \beta \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \beta & -\varepsilon_2 \alpha \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

где $\rho_1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\beta \neq 0$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{aligned} C_{12}^2 \varepsilon_1 &= 0, \\ C_{34}^3 \beta \varepsilon_2 &= 0, \quad C_{34}^4 \beta \varepsilon_2 = 0, \\ ((\rho_1 - \alpha) C_{13}^2 + \beta C_{14}^2) \varepsilon_1 &= 0, \quad ((\alpha - \rho_1) C_{14}^2 + \beta C_{13}^2) \varepsilon_1 = 0, \\ C_{34}^2 (\rho_1 - \alpha) \varepsilon_1 - \beta \varepsilon_2 (C_{13}^3 - C_{14}^4) &= 0, \\ ((\alpha - \rho_1) C_{12}^3 + \beta C_{12}^4) \varepsilon_2 + C_{13}^2 \varepsilon_1 &= 0, \\ ((\rho_1 - \alpha) C_{12}^4 + \beta C_{12}^3) \varepsilon_2 + C_{14}^2 \varepsilon_1 &= 0, \\ (C_{34}^1 (\rho_1 - \alpha) + C_{34}^2) \varepsilon_1 - \beta \varepsilon_2 (C_{23}^3 - C_{24}^4) &= 0, \\ ((3C_{13}^4 + C_{14}^3) \beta - 2C_{13}^3 (\rho_1 - \alpha)) \varepsilon_2 + \beta C_{34}^2 \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{13}^4 + 3C_{14}^3) \beta + 2C_{14}^4 (\rho_1 - \alpha)) \varepsilon_2 + \beta C_{34}^2 \varepsilon_1 &= 0, \\ (2(\rho_1 - \alpha) C_{23}^1 + 2\beta C_{24}^1 - C_{13}^1 + 3C_{23}^2) \varepsilon_1 - C_{12}^3 \varepsilon_2 &= 0, \\ (2(\rho_1 - \alpha) C_{24}^1 - 2\beta C_{23}^1 - C_{14}^1 + 3C_{24}^2) \varepsilon_1 + C_{12}^4 \varepsilon_2 &= 0, \\ ((3C_{23}^4 + C_{24}^3) \beta + 2(\alpha - \rho_1) C_{23}^3 - 2C_{13}^3) \varepsilon_2 + \beta C_{34}^1 \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{23}^4 + 3C_{24}^3) \beta + 2(\rho_1 - \alpha) C_{24}^4 + 2C_{14}^4) \varepsilon_2 + \beta C_{34}^1 \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{14}^3 - C_{13}^4) \alpha + (C_{13}^4 - C_{14}^3) \rho_1 + 2\beta C_{14}^4) \varepsilon_2 + C_{34}^2 (\rho_1 - \alpha) \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{14}^3 - C_{13}^4) \alpha + (C_{13}^4 - C_{14}^3) \rho_1 + 2\beta C_{13}^3) \varepsilon_2 - C_{34}^2 (\rho_1 - \alpha) \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{13}^1 + C_{23}^2) \rho_1 - (C_{13}^1 + C_{23}^2) \alpha + (C_{14}^1 + C_{24}^2) \beta) \varepsilon_1 - \\ &\quad - (\alpha C_{12}^3 + \beta C_{12}^4 - \rho_1 C_{12}^3) \varepsilon_2 = 0, \\ ((C_{14}^1 + C_{24}^2) \rho_1 - (C_{14}^1 + C_{24}^2) \alpha - (C_{13}^1 + C_{23}^2) \beta) \varepsilon_1 + \\ &\quad + (\alpha C_{12}^4 - \beta C_{12}^3 - \rho_1 C_{12}^4) \varepsilon_2 = 0, \\ ((C_{24}^3 - C_{23}^4) \alpha + (C_{23}^4 - C_{24}^3) \rho_1 + 2\beta C_{24}^4 + C_{13}^4 - C_{14}^3) \varepsilon_2 - \\ &\quad - (\alpha C_{34}^1 - \rho_1 C_{34}^1 - C_{34}^2) \varepsilon_1 = 0, \\ ((C_{24}^3 - C_{23}^4) \alpha + (C_{23}^4 - C_{24}^3) \rho_1 + 2\beta C_{23}^3 + C_{13}^4 - C_{14}^3) \varepsilon_2 + \\ &\quad + (\alpha C_{34}^1 - \rho_1 C_{34}^1 - C_{34}^2) \varepsilon_1 = 0, \\ ((C_{13}^1 + C_{23}^2) \rho_1 - (C_{13}^1 + C_{23}^2) \alpha + (C_{14}^1 + C_{24}^2) \beta + 2C_{13}^2) \varepsilon_1 + \\ &\quad + (\alpha C_{12}^3 + \beta C_{12}^4 - \rho_1 C_{12}^3) \varepsilon_2 = 0, \\ ((C_{14}^1 + C_{24}^2) \rho_1 - (C_{14}^1 + C_{24}^2) \alpha - (C_{13}^1 + C_{23}^2) \beta + 2C_{14}^2) \varepsilon_1 - \\ &\quad - (\alpha C_{12}^4 - \beta C_{12}^3 - \rho_1 C_{12}^4) \varepsilon_2 = 0. \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем,

что данная метрическая алгебра Ли обязана быть Риччи плоской, что противоречит виду тензора Риччи (10). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{21\bar{1}\}$.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{2\bar{2}\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$(11) \quad r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_1 \alpha & \varepsilon_1 \beta \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \beta & -\varepsilon_1 \alpha \\ \varepsilon_1 \alpha & \varepsilon_1 \beta & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 \beta & -\varepsilon_1 \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\beta \neq 0$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{aligned} C_{12}^3 \beta \varepsilon_1 &= 0, \quad C_{12}^4 \beta \varepsilon_1 = 0, \\ (C_{13}^4 - C_{23}^3 + C_{12}^1 + 2C_{14}^3) \beta \varepsilon_1 &= 0, \\ (C_{12}^2 + C_{14}^4 - C_{24}^3 - 2C_{23}^4) \beta \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{12}^2 + C_{13}^3 - C_{23}^4) \beta + C_{12}^3) \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{12}^1 + C_{14}^3 - C_{24}^4) \beta - C_{12}^4) \varepsilon_1 &= 0, \\ (C_{12}^2 + C_{14}^4 + 3C_{24}^3 + 2C_{23}^4) \beta \varepsilon_1 &= 0, \\ (C_{12}^1 - C_{23}^3 - 3C_{13}^4 - 2C_{14}^3) \beta \varepsilon_1 &= 0, \\ (4\beta C_{34}^2 + C_{13}^2 - C_{14}^1 + 2C_{23}^1 + 3C_{34}^3) \varepsilon_1 &= 0, \\ (4\beta C_{34}^1 - C_{23}^2 + C_{24}^1 + 2C_{14}^2 - 3C_{34}^4) \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{12}^2 - C_{14}^4 + C_{24}^3 + 2C_{13}^3) \beta + 2C_{12}^3) \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{12}^1 - C_{13}^4 + C_{23}^3 - 2C_{24}^4) \beta - 2C_{12}^4) \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{12}^2 + C_{24}^3 + 3C_{14}^4 - 2C_{13}^3) \beta - 2C_{12}^3) \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{12}^1 - C_{13}^4 - 3C_{23}^3 + 2C_{24}^4) \beta + 2C_{12}^4) \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{23}^2 - C_{34}^4 + 3C_{24}^1 + 2C_{14}^2) \beta - 4C_{24}^4) \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{14}^1 + C_{34}^3 + 3C_{13}^2 + 2C_{23}^1) \beta + 4C_{13}^3) \varepsilon_1 &= 0, \\ (2(C_{13}^1 - C_{14}^2 - C_{34}^4) \beta + C_{12}^1 - C_{13}^4 - C_{23}^3) \varepsilon_1 &= 0, \\ (2(C_{23}^1 - C_{24}^2 - C_{34}^3) \beta - C_{12}^2 - C_{14}^4 - C_{24}^3) \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{13}^2 - C_{14}^1 + 2C_{24}^2 + C_{34}^3) \beta - 2C_{23}^4 + 2C_{24}^3) \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{24}^1 - C_{23}^2 + 2C_{13}^1 - C_{34}^4) \beta - 2C_{13}^4 + 2C_{14}^3) \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{13}^2 + 3C_{14}^1 - 2C_{24}^2 + C_{34}^3) \beta + C_{12}^2 - 3C_{14}^4 + C_{24}^3) \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{34}^4 - 3C_{23}^2 + 2C_{13}^1 - C_{24}^1) \beta - C_{12}^1 - 3C_{23}^3 + C_{13}^4) \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{13}^2 - C_{14}^1 + 2C_{23}^1 - C_{34}^3) \beta - C_{12}^2 - C_{14}^4 - 2C_{23}^4 + C_{24}^3) \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{34}^4 - C_{23}^2 + 2C_{14}^2 + C_{24}^1) \beta - C_{12}^1 - C_{13}^4 + 2C_{14}^3 + C_{23}^3) \varepsilon_1 &= 0. \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем,

что данная метрическая алгебра Ли обязана быть Риччи плоской, что противоречит виду тензора Риччи (11). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{2\bar{2}\}$.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1\bar{1}1\bar{1}\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$(12) \quad r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \alpha_1 & \varepsilon_1 \beta_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 \beta_1 & -\varepsilon_1 \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \alpha_2 & \varepsilon_2 \beta_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \beta_2 & -\varepsilon_2 \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\beta_i \neq 0$, $(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 \neq 0$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{aligned} C_{12}^2 \beta_1 \varepsilon_1 &= 0, \quad C_{12}^1 \beta_1 \varepsilon_1 = 0, \\ C_{34}^4 \beta_2 \varepsilon_2 &= 0, \quad C_{34}^3 \beta_2 \varepsilon_2 = 0, \\ ((\alpha_1 - \alpha_2) C_{34}^1 + \beta_1 C_{34}^2) \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \beta_2 (C_{13}^3 - C_{14}^4) &= 0, \\ ((\alpha_2 - \alpha_1) C_{34}^2 + \beta_1 C_{34}^1) \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \beta_2 (C_{23}^3 - C_{24}^4) &= 0, \\ ((\alpha_2 - \alpha_1) C_{12}^3 + \beta_2 C_{12}^4) \varepsilon_2 + \beta_1 \varepsilon_1 (C_{13}^1 - C_{23}^2) &= 0, \\ ((\alpha_1 - \alpha_2) C_{12}^4 + \beta_2 C_{12}^3) \varepsilon_2 + \beta_1 \varepsilon_1 (C_{14}^1 - C_{24}^2) &= 0, \\ ((3C_{13}^2 + C_{23}^1) \beta_1 + 2(\alpha_1 - \alpha_2) C_{13}^1 + 2\beta_2 C_{14}^1) \varepsilon_1 - \beta_1 C_{12}^3 \varepsilon_2 &= 0, \\ ((3C_{14}^2 + C_{24}^1) \beta_1 + 2(\alpha_1 - \alpha_2) C_{14}^1 - 2\beta_2 C_{13}^1) \varepsilon_1 + \beta_1 C_{12}^4 \varepsilon_2 &= 0, \\ ((C_{13}^2 + 3C_{23}^1) \beta_1 + 2(\alpha_2 - \alpha_1) C_{23}^2 - 2\beta_2 C_{24}^2) \varepsilon_1 - \beta_1 C_{12}^3 \varepsilon_2 &= 0, \\ ((C_{14}^2 + 3C_{24}^1) \beta_1 + 2(\alpha_2 - \alpha_1) C_{24}^2 + 2\beta_2 C_{23}^2) \varepsilon_1 + \beta_1 C_{12}^4 \varepsilon_2 &= 0, \\ ((3C_{13}^4 + C_{14}^3) \beta_2 + 2(\alpha_2 - \alpha_1) C_{13}^3 + 2\beta_1 C_{23}^3) \varepsilon_2 + \beta_2 C_{34}^1 \varepsilon_1 &= 0, \\ ((3C_{23}^4 + C_{24}^3) \beta_2 + 2(\alpha_2 - \alpha_1) C_{23}^3 - 2\beta_1 C_{13}^3) \varepsilon_2 - \beta_2 C_{34}^2 \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{13}^4 + 3C_{14}^3) \beta_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2) C_{14}^4 - 2\beta_1 C_{24}^4) \varepsilon_2 + \beta_2 C_{34}^1 \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{23}^4 + 3C_{24}^3) \beta_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2) C_{24}^4 + 2\beta_1 C_{14}^4) \varepsilon_2 - \beta_2 C_{34}^2 \varepsilon_1 &= 0, \\ ((C_{23}^1 - C_{13}^2) \alpha_1 + (C_{13}^2 - C_{23}^1) \alpha_2 + (C_{24}^1 - C_{14}^2) \beta_2 + 2\beta_1 C_{23}^2) \varepsilon_1 + \\ &\quad + (\alpha_1 C_{12}^3 - \alpha_2 C_{12}^3 - \beta_2 C_{12}^4) \varepsilon_2 = 0, \\ ((C_{24}^1 - C_{14}^2) \alpha_1 + (C_{14}^2 - C_{24}^1) \alpha_2 + (C_{13}^2 - C_{23}^1) \beta_2 + 2\beta_1 C_{24}^2) \varepsilon_1 - \\ &\quad - (\alpha_1 C_{12}^4 - \alpha_2 C_{12}^4 + \beta_2 C_{12}^3) \varepsilon_2 = 0, \\ ((C_{23}^1 - C_{13}^2) \alpha_1 + (C_{13}^2 - C_{23}^1) \alpha_2 + (C_{24}^1 - C_{14}^2) \beta_2 + 2\beta_1 C_{13}^1) \varepsilon_1 - \\ &\quad - (\alpha_1 C_{12}^3 - \alpha_2 C_{12}^3 - \beta_2 C_{12}^4) \varepsilon_2 = 0, \\ ((C_{24}^1 - C_{14}^2) \alpha_1 + (C_{14}^2 - C_{24}^1) \alpha_2 + (C_{13}^2 - C_{23}^1) \beta_2 + 2\beta_1 C_{14}^1) \varepsilon_1 + \\ &\quad + (\alpha_1 C_{12}^4 - \alpha_2 C_{12}^4 + \beta_2 C_{12}^3) \varepsilon_2 = 0, \\ ((C_{13}^4 - C_{14}^3) \alpha_1 + (C_{14}^3 - C_{13}^4) \alpha_2 + (C_{24}^3 - C_{23}^4) \beta_1 + 2\beta_2 C_{14}^4) \varepsilon_2 + \\ &\quad + (\alpha_1 C_{34}^1 - \alpha_2 C_{34}^1 + \beta_1 C_{34}^2) \varepsilon_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((C_{23}^4 - C_{24}^3) \alpha_1 + (C_{24}^3 - C_{23}^4) \alpha_2 + (C_{13}^4 - C_{14}^3) \beta_1 + 2\beta_2 C_{24}^4) \varepsilon_2 - \\
& \quad - (\alpha_1 C_{34}^2 - \alpha_2 C_{34}^2 - \beta_1 C_{34}^1) \varepsilon_1 = 0, \\
& ((C_{13}^4 - C_{14}^3) \alpha_1 + (C_{14}^3 - C_{13}^4) \alpha_2 + (C_{24}^3 - C_{23}^4) \beta_1 + 2\beta_2 C_{13}^3) \varepsilon_2 - \\
& \quad - (\alpha_1 C_{34}^1 - \alpha_2 C_{34}^1 + \beta_1 C_{34}^2) \varepsilon_1 = 0, \\
& ((C_{23}^4 - C_{24}^3) \alpha_1 + (C_{24}^3 - C_{23}^4) \alpha_2 + (C_{13}^4 - C_{14}^3) \beta_1 + 2\beta_2 C_{23}^3) \varepsilon_2 + \\
& \quad + (\alpha_1 C_{34}^2 - \alpha_2 C_{34}^2 - \beta_1 C_{34}^1) \varepsilon_1 = 0.
\end{aligned}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что данная метрическая алгебра Ли обязана быть Риччи плоской, что противоречит виду тензора Риччи (12). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{1\bar{1}1\bar{1}\}$.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{(1\bar{1}1\bar{1})\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$(13) \quad r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \alpha & \varepsilon_1 \beta & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 \beta & -\varepsilon_1 \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \alpha & \varepsilon_2 \beta \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \beta & -\varepsilon_2 \alpha \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\beta \neq 0$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
& C_{12}^2 \beta \varepsilon_1 = 0, \quad C_{12}^1 \beta \varepsilon_1 = 0, \\
& C_{34}^4 \beta \varepsilon_2 = 0, \quad C_{34}^3 \beta \varepsilon_2 = 0, \\
& ((C_{13}^3 - C_{14}^4) \varepsilon_2 - C_{34}^2 \varepsilon_1) \beta = 0, \quad ((C_{23}^3 - C_{24}^4) \varepsilon_2 - C_{34}^1 \varepsilon_1) \beta = 0, \\
& ((C_{13}^1 - C_{23}^2) \varepsilon_1 + C_{12}^4 \varepsilon_2) \beta = 0, \quad ((C_{14}^1 - C_{24}^2) \varepsilon_1 + C_{12}^3 \varepsilon_2) \beta = 0, \\
& ((C_{14}^2 - C_{24}^1 - 2C_{23}^2) \varepsilon_1 + C_{12}^4 \varepsilon_2) \beta = 0, \\
& ((C_{23}^1 - C_{13}^2 - 2C_{24}^2) \varepsilon_1 + C_{12}^3 \varepsilon_2) \beta = 0, \\
& ((C_{24}^1 - C_{14}^2 + 2C_{13}^1) \varepsilon_1 + C_{12}^4 \varepsilon_2) \beta = 0, \\
& ((C_{13}^2 - C_{23}^1 + 2C_{14}^1) \varepsilon_1 + C_{12}^3 \varepsilon_2) \beta = 0, \\
& ((C_{13}^4 - C_{14}^3 + 2C_{24}^4) \varepsilon_2 + C_{34}^1 \varepsilon_1) \beta = 0, \\
& ((C_{13}^4 - C_{14}^3 + 2C_{23}^3) \varepsilon_2 - C_{34}^1 \varepsilon_1) \beta = 0, \\
& ((C_{24}^3 - C_{23}^4 + 2C_{13}^3) \varepsilon_2 - C_{34}^2 \varepsilon_1) \beta = 0, \\
& ((C_{23}^1 + 2C_{14}^1 + 3C_{13}^2) \varepsilon_1 - C_{12}^3 \varepsilon_2) \beta = 0, \\
& ((C_{24}^1 - 2C_{13}^1 + 3C_{14}^2) \varepsilon_1 + C_{12}^4 \varepsilon_2) \beta = 0, \\
& ((C_{13}^2 - 2C_{24}^2 + 3C_{23}^1) \varepsilon_1 - C_{12}^3 \varepsilon_2) \beta = 0, \\
& ((C_{14}^2 + 2C_{23}^2 + 3C_{24}^1) \varepsilon_1 + C_{12}^4 \varepsilon_2) \beta = 0, \\
& ((C_{13}^4 - 2C_{24}^4 + 3C_{14}^3) \varepsilon_2 + C_{34}^1 \varepsilon_1) \beta = 0, \\
& ((C_{23}^4 + 2C_{14}^4 + 3C_{24}^3) \varepsilon_2 - C_{34}^2 \varepsilon_1) \beta = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((C_{24}^3 - 2C_{13}^3 + 3C_{23}^4)\varepsilon_2 - C_{34}^2\varepsilon_1)\beta &= 0, \\
(2C_{14}^4\varepsilon_2 - C_{23}^4\varepsilon_2 + C_{24}^3\varepsilon_2 + C_{34}^2\varepsilon_1)\beta &= 0, \\
(3C_{13}^4\varepsilon_2 + C_{14}^3\varepsilon_2 + 2C_{23}^3\varepsilon_2 + C_{34}^1\varepsilon_1)\beta &= 0.
\end{aligned}$$

Решая систему уравнений (1) относительно структурных констант алгебры Ли, получаем, что данная метрическая группа Ли обязана иметь параллельный тензор Риччи. $\square$

Из теоремы 1 немедленно получаем

Следствие 1. *Если четырехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой имеет нулевой тензор Схоутена-Вейля, то метрика является либо конформно плоской, либо Риччи параллельной.*

Доказательство. Оператор Риччи четырехмерной группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой может иметь только тип Сегре {1111} и соответствующие вырожденные типы, что противоречит теореме 1. $\square$

Теорема 2. *Пусть (G, g) — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной, оператор Риччи которой имеет тип Сегре {1(12)}. Тогда метрическая алгебра Ли группы G содержится в таблице 2.*

Доказательство. Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре {1(12)}. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix},$$

где ρ_1, ρ_2 — неравные действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
C_{23}^2\varepsilon_2 &= 0, \quad C_{23}^4\varepsilon_3 = 0, \\
C_{34}^4\varepsilon_3 &= 0, \quad C_{12}^1\varepsilon_1(\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
C_{13}^1\varepsilon_1(\rho_1 - \rho_2) &= 0, \quad C_{23}^1\varepsilon_1(\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
C_{12}^2\varepsilon_2(\rho_1 - \rho_2) &= 0, \quad C_{13}^4\varepsilon_3(\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
((\rho_1 - \rho_2)C_{14}^1 - C_{13}^1)\varepsilon_1 &= 0, \\
(3C_{24}^4 - C_{23}^3)\varepsilon_3 + C_{34}^2\varepsilon_2 &= 0, \\
(\rho_1 - \rho_2)C_{34}^1\varepsilon_1 - C_{13}^4\varepsilon_3 &= 0, \\
(\rho_1 - \rho_2)((C_{13}^3 + C_{14}^4)\varepsilon_3 - C_{34}^1\varepsilon_1) &= 0, \\
(C_{12}^4\varepsilon_3 + C_{13}^2\varepsilon_2 - C_{23}^1\varepsilon_1)(\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\
(C_{12}^4\varepsilon_3 + C_{13}^2\varepsilon_2 + C_{23}^1\varepsilon_1)(\rho_1 - \rho_2) &= 0, \\
(2(\rho_2 - \rho_1)C_{14}^3 - C_{13}^3 + 3C_{14}^4)\varepsilon_3 + C_{34}^1\varepsilon_1 &= 0, \\
(2(\rho_1 - \rho_2)C_{24}^1 - C_{23}^1)\varepsilon_1 - C_{12}^4\varepsilon_3 - C_{13}^2\varepsilon_2 &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\rho_2 C_{12}^3 - \rho_1 C_{12}^3 + 2C_{12}^4) \varepsilon_3 - (C_{14}^2 \varepsilon_2 + C_{24}^1 \varepsilon_1) (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
& ((C_{13}^3 + C_{14}^4) \rho_2 - (C_{13}^3 + C_{14}^4) \rho_1 + 2C_{13}^4) \varepsilon_3 - (\rho_1 - \rho_2) C_{34}^1 \varepsilon_1 = 0, \\
& (\rho_1 C_{24}^1 - \rho_2 C_{24}^1 - C_{23}^1) \varepsilon_1 + (\rho_2 C_{14}^2 - \rho_1 C_{14}^2 - C_{13}^2) \varepsilon_2 - \\
& \quad - (\rho_1 C_{12}^3 - \rho_2 C_{12}^3 - C_{12}^4) \varepsilon_3 = 0.
\end{aligned}$$

Решая данную систему получим, что

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= C_{12}^3 e_3 + \frac{1}{2} (\varepsilon_3 C_{14}^2 \varepsilon_2 + C_{12}^3) (\rho_1 - \rho_2) e_4, \\
[e_1, e_3] &= -\frac{1}{2} (\varepsilon_2 C_{12}^3 \varepsilon_3 + C_{14}^2) (\rho_1 - \rho_2) e_2 - \frac{1}{2} C_{14}^3 (\rho_1 - \rho_2) e_3, \\
[e_2, e_3] &= C_{23}^3 e_3, \\
[e_1, e_4] &= C_{14}^2 e_2 + C_{14}^3 e_3 + \frac{1}{2} C_{14}^3 (\rho_1 - \rho_2) e_4, \\
[e_2, e_4] &= C_{24}^2 e_2 + C_{24}^3 e_3 + C_{24}^4 e_4, \\
[e_3, e_4] &= \varepsilon_2 \varepsilon_3 (C_{23}^3 - 3C_{24}^4) e_2 + C_{34}^3 e_3.
\end{aligned}$$

Далее, накладывая условие выполнения тождества Якоби и отбрасывая конформно плоские и Риччи параллельные решения, получаем однопараметрическую метрическую алгебру Ли:

$$\begin{aligned}
[e_2, e_3] &= 3\alpha_1 e_3, \quad [e_2, e_4] = -\frac{\varepsilon_2}{2\alpha_1} e_3 + \alpha_1 e_4, \quad \alpha_1 \neq 0; \\
\langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}$$

Отметим, что заменой базиса с g -ортогональной матрицей перехода вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

параметр α_1 можно сделать положительным. □

Теорема 3. Пусть (G, g) — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной, оператор Риччи которой имеет тип Сегре $\{(11)2\}$. Тогда метрическая алгебра Ли группы G содержится в таблице 2.

Доказательство. Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{(11)2\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \rho_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \rho_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix},$$

где ρ_1, ρ_2 — неравные действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
C_{34}^4 \varepsilon_3 &= 0, \quad C_{13}^1 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
C_{23}^2 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \quad C_{12}^4 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
C_{13}^4 (\rho_1 - \rho_2) &= 0, \quad C_{23}^4 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
C_{14}^1 (\rho_1 - \rho_2) - C_{13}^1 &= 0, \quad C_{24}^2 (\rho_1 - \rho_2) - C_{23}^2 = 0, \\
C_{12}^3 (\rho_1 - \rho_2) - C_{12}^4 &= 0, \quad C_{34}^1 (\rho_1 - \rho_2) \varepsilon_1 - C_{13}^4 \varepsilon_3 = 0, \\
C_{34}^2 (\rho_1 - \rho_2) \varepsilon_2 - C_{23}^4 \varepsilon_3 &= 0, \quad C_{12}^4 \varepsilon_3 + C_{13}^2 \varepsilon_2 + C_{23}^1 \varepsilon_1 = 0, \\
C_{12}^4 \varepsilon_3 - C_{13}^2 \varepsilon_2 - C_{23}^1 \varepsilon_1 &= 0, \quad (C_{13}^3 + C_{14}^4) \varepsilon_3 - C_{34}^1 \varepsilon_1 = 0 \\
(C_{23}^3 + C_{24}^4) \varepsilon_3 - C_{34}^2 \varepsilon_2 &= 0, \\
(2(\rho_1 - \rho_2) C_{14}^3 + C_{13}^3 - 3C_{14}^4) \varepsilon_3 - C_{34}^1 \varepsilon_1 &= 0, \\
(2(\rho_1 - \rho_2) C_{24}^3 + C_{23}^3 - 3C_{24}^4) \varepsilon_3 - C_{34}^2 \varepsilon_2 &= 0, \\
((C_{13}^3 + C_{14}^4) \rho_1 - (C_{13}^3 + C_{14}^4) \rho_2 - 2C_{13}^4) \varepsilon_3 + C_{34}^1 (\rho_1 - \rho_2) \varepsilon_1 &= 0, \\
((C_{23}^3 + C_{24}^4) \rho_1 - (C_{23}^3 + C_{24}^4) \rho_2 - 2C_{23}^4) \varepsilon_3 + C_{34}^2 (\rho_1 - \rho_2) \varepsilon_2 &= 0, \\
(\rho_1 C_{24}^1 - \rho_2 C_{24}^1 - C_{23}^1) \varepsilon_1 + (\rho_1 C_{14}^2 - \rho_2 C_{14}^2 - C_{13}^2) \varepsilon_2 + \\
&+ (\rho_1 C_{12}^3 - \rho_2 C_{12}^3 - C_{12}^4) \varepsilon_3 = 0, \\
(\rho_1 C_{24}^1 - \rho_2 C_{24}^1 - C_{23}^1) \varepsilon_1 + (\rho_1 C_{14}^2 - \rho_2 C_{14}^2 - C_{13}^2) \varepsilon_2 - \\
&- (\rho_1 C_{12}^3 - \rho_2 C_{12}^3 - C_{12}^4) \varepsilon_3 = 0.
\end{aligned}$$

Решая данную систему получим, что

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= C_{12}^1 e_1 + C_{12}^2 e_2, \quad [e_1, e_3] = -\frac{1}{2} \rho_1 C_{14}^3 e_3, \\
[e_2, e_3] &= -\frac{1}{2} \rho_1 C_{24}^3 e_3, \quad [e_1, e_4] = C_{14}^3 e_3 + \frac{1}{2} \rho_1 C_{14}^3 e_4, \\
[e_2, e_4] &= C_{24}^3 e_3 + \frac{1}{2} \rho_1 C_{24}^3 e_4.
\end{aligned}$$

Тождество Якоби и вид тензора Риччи в данной алгебре Ли накладывают следующие ограничения:

$$\begin{aligned}
C_{12}^1 C_{14}^3 + C_{12}^2 C_{24}^3 &= 0, \quad \rho_1 = -\varepsilon_2 (C_{12}^1)^2 - \varepsilon_1 (C_{12}^2)^2, \\
\rho_1 \left((C_{14}^3)^2 \varepsilon_1 + (C_{24}^3)^2 \varepsilon_2 \right) - C_{12}^1 C_{24}^3 \varepsilon_2 + C_{12}^2 C_{14}^3 \varepsilon_1 + 1 &= 0, \quad (C_{14}^3)^2 + (C_{24}^3)^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим замены базиса в данной алгебре Ли с матрицами следующего вида

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} f(\varphi) & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 h(\varphi) & 0 & 0 \\ h(\varphi) & f(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ где}$$

$$f(\varphi) = \begin{cases} \cos(\varphi), & \varepsilon_2 = \varepsilon_1, \\ \operatorname{ch}(\varphi), & \varepsilon_2 = -\varepsilon_1; \end{cases} \quad h(\varphi) = \begin{cases} \sin(\varphi), & \varepsilon_2 = \varepsilon_1, \\ \operatorname{sh}(\varphi), & \varepsilon_2 = -\varepsilon_1. \end{cases}$$

Такие замены базиса не изменяют метрический тензор и тензор Риччи. При преобразовании базиса следующие структурные константы будут иметь вид

$$(C_{14}^3)' = C_{14}^3 f(\varphi) - C_{24}^3 h(\varphi), \quad (C_{24}^3)' = C_{24}^3 f(\varphi) - \varepsilon_1 \varepsilon_2 C_{14}^3 h(\varphi).$$

Т.к. случай $C_{14}^3 = \pm C_{24}^3$ ведет к противоречию с видом тензора Риччи, и с учетом того, что C_{14}^3 и C_{24}^3 одновременно не зануляются, мы всегда можем выбрать угол φ так, чтобы либо $(C_{14}^3)' = 0$, либо $(C_{24}^3)' = 0$. Таким образом, получим два решения:

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \frac{\delta_1 \sqrt{5} - \varepsilon_2}{2\alpha_1} e_1, \quad [e_2, e_3] = \frac{3\varepsilon_2 - \delta_1 \sqrt{5}}{4\alpha_1} e_3, \quad [e_2, e_4] = \alpha_1 e_3 + \frac{\delta_1 \sqrt{5} - 3\varepsilon_2}{4\alpha_1} e_4, \\ \delta_1 &= \pm 1, \quad \alpha_1 \neq 0; \\ \langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1; \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \frac{\delta_1 \sqrt{5} + \varepsilon_1}{2\alpha_1} e_2, \quad [e_1, e_3] = \frac{3\varepsilon_1 + \delta_1 \sqrt{5}}{4\alpha_1} e_3, \quad [e_1, e_4] = \alpha_1 e_3 - \frac{\delta_1 \sqrt{5} + 3\varepsilon_1}{4\alpha_1} e_4, \\ \delta_1 &= \pm 1, \quad \alpha_1 \neq 0; \\ \langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1. \end{aligned}$$

Однако, замена базиса с g -ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

переводит первое решение во второе. Кроме того, заменой базиса с g -ортогональной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \text{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

параметр α_1 можно сделать положительным. Таким образом, решением является единственное однопараметрическое семейство метрических алгебр Ли. $\square$

Теорема 4. Пусть (G, g) — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной, оператор Риччи которой имеет тип Сегре $\{(112)\}$. Тогда метрическая алгебра Ли группы G содержится в таблице 2.

Доказательство. Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{(112)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \rho_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \rho_1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\rho_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} C_{13}^1 \varepsilon_1 &= 0, & C_{13}^4 \varepsilon_3 &= 0, \\ C_{23}^2 \varepsilon_2 &= 0, & C_{23}^4 \varepsilon_3 &= 0, \\ C_{12}^4 \varepsilon_3 &= 0, & C_{34}^4 \varepsilon_3 &= 0, \\ (3C_{14}^4 - C_{13}^3) \varepsilon_3 + C_{34}^1 \varepsilon_1 &= 0, & (3C_{24}^4 - C_{23}^3) \varepsilon_3 + C_{34}^2 \varepsilon_2 &= 0, \\ C_{12}^4 \varepsilon_3 + C_{13}^2 \varepsilon_2 + C_{23}^1 \varepsilon_1 &= 0, & C_{12}^4 \varepsilon_3 - C_{13}^2 \varepsilon_2 - C_{23}^1 \varepsilon_1 &= 0. \end{aligned}$$

Решая данную систему получим, что

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= C_{12}^1 e_1 + C_{12}^2 e_2 + C_{12}^3 e_3, \\ [e_1, e_3] &= C_{13}^3 e_3, & [e_2, e_3] &= C_{23}^3 e_3, \\ [e_1, e_4] &= C_{14}^1 e_1 + C_{14}^2 e_2 + C_{14}^3 e_3, \\ [e_2, e_4] &= C_{24}^1 e_1 + C_{24}^2 e_2 + C_{24}^3 e_3, \\ [e_3, e_4] &= \varepsilon_1 \varepsilon_3 C_{13}^3 e_1 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 C_{23}^3 e_2 + C_{34}^3 e_3, \end{aligned}$$

Далее, накладывая условие выполнения тождества Якоби и отбрасывая конформно плоские и Риччи параллельные решения, получаем следующие решения:

(a)

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -\alpha_1 \delta_1 e_1 + \alpha_1 e_2, & [e_1, e_3] &= \alpha_1 e_3, & [e_2, e_3] &= \delta_1 \alpha_1 e_3, \\ [e_1, e_4] &= -\alpha_2 \delta_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, & [e_2, e_4] &= -\alpha_4 \delta_1 e_1 + \alpha_4 e_2 + \alpha_5 e_3, \\ [e_3, e_4] &= \alpha_1 \varepsilon_3 \varepsilon_1 e_1 - \delta_1 \alpha_1 \varepsilon_3 \varepsilon_1 e_2 - \\ &\quad - \frac{4\alpha_1 \alpha_3 \varepsilon_1 \varepsilon_3 - 4\alpha_1 \alpha_5 \delta_1 \varepsilon_1 \varepsilon_3 - 2\alpha_2 \alpha_4 \delta_1 + \alpha_2^2 + \alpha_4^2 + 2\varepsilon_3}{2(\alpha_2 \delta_1 - \alpha_4)} e_3, \\ 4\alpha_1 \alpha_3 \varepsilon_1 \varepsilon_3 - 4\alpha_1 \alpha_5 \delta_1 \varepsilon_1 \varepsilon_3 - 2\alpha_2 \alpha_4 \delta_1 + \alpha_2^2 + \alpha_4^2 + 2\varepsilon_3 &\neq 0, \\ \alpha_2 \delta_1 - \alpha_4 &\neq 0, \\ 4\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \delta_1 \varepsilon_3 - 4\alpha_1 \alpha_4 \alpha_5 \delta_1 \varepsilon_3 + \alpha_2^3 \delta_1 \varepsilon_1 - \alpha_2 \alpha_4^2 \delta_1 \varepsilon_1 - 4\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 \varepsilon_3 + 4\alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 \varepsilon_3 - \\ &\quad - \alpha_2^2 \alpha_4 \varepsilon_1 + 2\alpha_2 \delta_1 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \alpha_4^3 \varepsilon_1 + 2\alpha_4 \varepsilon_1 \varepsilon_3 \neq 0, \\ \delta_1 &= \pm 1; \\ \langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, & \langle e_2, e_2 \rangle &= -\varepsilon_1, & \langle e_3, e_4 \rangle &= \varepsilon_3, & \varepsilon_i &= \pm 1. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \alpha_1 \delta_1 e_2 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_3, \\ [e_1, e_4] &= -\frac{\delta_1 (\alpha_2^2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + 2\alpha_1 \alpha_3 + 2\varepsilon_1)}{2\alpha_1} e_3, \\ [e_2, e_4] &= \alpha_3 e_3, & [e_3, e_4] &= \frac{\varepsilon_1 \delta_1 (\alpha_2^2 \varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_2} e_3, \\ \alpha_1 &\neq 0, & \alpha_2 &\neq 0, \\ 4\alpha_1 \alpha_3 \varepsilon_3 + \alpha_2^2 \varepsilon_1 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 &\neq 0, & \alpha_2^2 + 2\varepsilon_3 &\neq 0, \\ \delta_1 &= \pm 1; \end{aligned}$$

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(с)

$$\begin{aligned} [e_1, e_4] &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \quad [e_2, e_4] = \alpha_3 \delta_1 e_3 + \alpha_4 e_1 + \alpha_5 e_2, \\ [e_3, e_4] &= \frac{\alpha_2^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \alpha_4^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2\alpha_1^2 + 2\alpha_2 \alpha_4 + 2\alpha_5^2 + 2\varepsilon_3}{2(\alpha_1 + \alpha_5)} e_3, \\ &\alpha_1 + \alpha_5 \neq 0, \\ 4\alpha_1^2 \alpha_5 \varepsilon_1 + \alpha_1 \alpha_2^2 \varepsilon_2 - 2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \varepsilon_1 - 3\alpha_1 \alpha_4^2 \varepsilon_2 - 4\alpha_1 \alpha_5^2 \varepsilon_1 + 3\alpha_2^2 \alpha_5 \varepsilon_2 + 2\alpha_2 \alpha_4 \alpha_5 \varepsilon_1 - \\ &\quad - \alpha_4^2 \alpha_5 \varepsilon_2 - 2\alpha_1 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + 2\alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_3 \neq 0, \\ 2\alpha_1^2 \alpha_2 \varepsilon_2 - 2\alpha_1^2 \alpha_4 \varepsilon_1 - 4\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 \varepsilon_2 - 4\alpha_1 \alpha_4 \alpha_5 \varepsilon_1 + \alpha_2^3 \varepsilon_1 + 3\alpha_2^2 \alpha_4 \varepsilon_2 + 3\alpha_2 \alpha_4^2 \varepsilon_1 - \\ &\quad - 2\alpha_2 \alpha_5^2 \varepsilon_2 + \alpha_4^3 \varepsilon_2 + 2\alpha_4 \alpha_5^2 \varepsilon_1 + 2\alpha_2 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + 2\alpha_4 \varepsilon_1 \varepsilon_3 \neq 0, \\ \alpha_2^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \alpha_4^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2\alpha_1^2 + 2\alpha_2 \alpha_4 + 2\alpha_5^2 + 2\varepsilon_3 &\neq 0, \\ \delta_1 &= \pm 1; \\ \langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} [e_1, e_4] &= -\frac{1}{2} \delta_2 \sqrt{-\alpha_1^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \alpha_3^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\alpha_1 \alpha_3 - 2\varepsilon_3 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3}, \\ [e_2, e_4] &= \alpha_3 e_1 + \frac{1}{2} \delta_2 \sqrt{-\alpha_1^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \alpha_3^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\alpha_1 \alpha_3 - 2\varepsilon_3 e_2 + \delta_1 \alpha_2 e_3}, \\ [e_3, e_4] &= \alpha_4 e_3, \\ \varepsilon_2 \alpha_3^2 - \varepsilon_2 \alpha_1^2 - \delta_2 \sqrt{-\alpha_1^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \alpha_3^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\alpha_1 \alpha_3 - 2\varepsilon_3 \varepsilon_1 \alpha_4} &\neq 0, \\ \alpha_4 \alpha_1 \varepsilon_2 - \alpha_1 \delta_2 \sqrt{-\alpha_1^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \alpha_3^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\alpha_1 \alpha_3 - 2\varepsilon_3 \varepsilon_2} + \\ &+ \delta_2 \sqrt{-\alpha_1^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \alpha_3^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\alpha_1 \alpha_3 - 2\varepsilon_3 \alpha_3 \varepsilon_1 + \alpha_4 \alpha_3 \varepsilon_1} \neq 0, \\ \alpha_4 &\neq 0, \\ \delta_i &= \pm 1; \\ \langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1. \end{aligned}$$

Уменьшим количество параметров в полученных решениях. Если $\alpha_1 \neq 0$, то замена базиса с g -ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & B \\ -A\varepsilon_1\varepsilon_3 & B\varepsilon_1\varepsilon_3 & 1 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_3(A^2 - B^2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} B &= -2\delta_1 \varepsilon_1 (\alpha_2^4 \alpha_5 \delta_1 \varepsilon_3 - 2\alpha_2^3 \alpha_3 \alpha_4 \delta_1 \varepsilon_3 - 6\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4^3 \delta_1 \varepsilon_3 - \alpha_4^4 \alpha_5 \delta_1 \varepsilon_3 - 2\alpha_2^3 \alpha_4 \alpha_5 \varepsilon_3 + \\ &\quad + 6\alpha_2^2 \alpha_3 \alpha_4^2 \varepsilon_3 + 2\alpha_2 \alpha_4^3 \alpha_5 \varepsilon_3 + 2\alpha_3 \alpha_4^4 \varepsilon_3 - 2\alpha_2^2 \alpha_5 \delta_1 - 2\alpha_4^2 \alpha_5 \delta_1 + 4\alpha_2 \alpha_4 \alpha_5) / \\ &\quad / ((\alpha_2 \delta_1 - \alpha_4)(\alpha_2^4 + 6\alpha_2^2 \alpha_4^2 + \alpha_4^4 - 4\alpha_2^3 \alpha_4 \delta_1 - 4\alpha_2 \alpha_4^3 \delta_1 - 4)), \\ A &= \frac{(\alpha_2 \delta_1 - \alpha_4)(\alpha_2^2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + 2\alpha_1 \alpha_3)}{(\alpha_2^2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 - 2\alpha_2 \alpha_4 \delta_1 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \alpha_4^2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 - 4\alpha_1 \alpha_5 \delta_1 + 4\alpha_1 \alpha_3 + 2\varepsilon_1) \alpha_1}, \end{aligned}$$

зануляет параметры α_2 и α_3 в решении (а). Если же $\alpha_1 = 0$, то замена базиса с g -ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & B \\ -A\varepsilon_1\varepsilon_3 & B\varepsilon_1\varepsilon_3 & 1 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_3(A^2 - B^2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} B &= -2\varepsilon_1(6\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4^2\delta_1\varepsilon_3 - 2\alpha_2^3\alpha_4\alpha_5\delta_1\varepsilon_3 + 2\alpha_2\alpha_4^3\alpha_5\delta_1\varepsilon_3 + 2\alpha_3\alpha_4^4\delta_1\varepsilon_3 + \alpha_2^4\alpha_5\varepsilon_3 - \\ &\quad - 2\alpha_2^3\alpha_3\alpha_4\varepsilon_3 - 6\alpha_2\alpha_3\alpha_4^3\varepsilon_3 - \alpha_4^4\alpha_5\varepsilon_3 + 4\alpha_2\alpha_4\alpha_5\delta_1 - 2\alpha_2^2\alpha_5 - 2\alpha_4^2\alpha_5)/ \\ &\quad /((\alpha_2\delta_1 - \alpha_4)(\alpha_2^4 + 6\alpha_2^2\alpha_4^2 + \alpha_4^4 - 4\alpha_2^3\alpha_4\delta_1 - 4\alpha_2\alpha_4^3\delta_1 - 4)), \\ A &= -2\varepsilon_1(\alpha_2^3\alpha_3\delta_1\varepsilon_3 + 4\alpha_2^2\alpha_4\alpha_5\delta_1\varepsilon_3 - \alpha_2\alpha_3\alpha_4^2\delta_1\varepsilon_3 - 2\alpha_2^3\alpha_5\varepsilon_3 - \alpha_2^2\alpha_3\alpha_4\varepsilon_3 - \\ &\quad - 2\alpha_2\alpha_4^2\alpha_5\varepsilon_3 + \alpha_3\alpha_4^3\varepsilon_3 + 2\alpha_2\alpha_3\delta_1 - 2\alpha_3\alpha_4)/ \\ &\quad /(\alpha_2^4 + 6\alpha_2^2\alpha_4^2 + \alpha_4^4 - 4\alpha_2^3\alpha_4\delta_1 - 4\alpha_2\alpha_4^3\delta_1 - 4), \end{aligned}$$

обнулит параметры α_3 и α_5 . Заметим, что все знаменатели не равны нулю в силу ограничений на структурные константы, которые приведены выше.

Для решения (b) выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \text{ch}(\varphi) & \text{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ \text{sh}(\varphi) & \text{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha_2^2\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\alpha_1\alpha_3\delta_1 - 2\alpha_1\alpha_3 + 2\delta_1\varepsilon_1}{\alpha_2^2\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\alpha_1\alpha_3\delta_1 + 2\alpha_1\alpha_3 + 2\delta_1\varepsilon_1} \right)$; либо с g -ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \text{sh}(\varphi) & \text{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ \text{ch}(\varphi) & \text{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{\alpha_2^2\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\alpha_1\alpha_3\delta_1 - 2\alpha_1\alpha_3 + 2\delta_1\varepsilon_1}{\alpha_2^2\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\alpha_1\alpha_3\delta_1 + 2\alpha_1\alpha_3 + 2\delta_1\varepsilon_1} \right)$. Данные замены зануляют параметр α_3 . Заметим, что одна из данных замен всегда возможна из-за ограничений на структурные константы, которые приведены выше.

Для решения (с), если $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) & 0 & B \\ -\sin(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & \cos(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & 1 & -\frac{1}{2}B^2\varepsilon_1\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} B &= -\frac{\alpha_3\varepsilon_3\varepsilon_1(\sin(\varphi)\delta_1 + \cos(\varphi))}{\cos^2(\varphi)\alpha_4 + \cos^2(\varphi)\alpha_2 + \sin(\varphi)\cos(\varphi)\alpha_5 - \sin(\varphi)\cos(\varphi)\alpha_1 - \alpha_4}, \\ \varphi &= -\arctan((2\alpha_1\alpha_2\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_5\delta_1 + 2\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_4 + \alpha_4^2 + 2\varepsilon_3)/ \\ &\quad /(\alpha_2^2\delta_1 - 2\alpha_1\alpha_5\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_4\delta_1 + \alpha_4^2\delta_1 + 2\alpha_5^2\delta_1 + 2\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_4\alpha_5 + 2\delta_1\varepsilon_3)); \end{aligned}$$

если $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$, то используем g -ортогональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\varphi) & \operatorname{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}(\varphi) & \operatorname{ch}(\varphi) & 0 & B \\ \operatorname{sh}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & \operatorname{ch}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & 1 & \frac{1}{2}B^2\varepsilon_1\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$B = \frac{\alpha_3\varepsilon_3\varepsilon_1(\operatorname{ch}(\varphi) - \operatorname{sh}(\varphi)\delta_1)}{\operatorname{ch}^2(\varphi)\alpha_4 - \operatorname{ch}^2(\varphi)\alpha_2 + \operatorname{sh}(\varphi)\operatorname{ch}(\varphi)\alpha_5 - \operatorname{sh}(\varphi)\operatorname{ch}(\varphi)\alpha_1 - \alpha_4},$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln((2\alpha_1\alpha_2\delta_1 - 2\alpha_1\alpha_5\delta_1 - \alpha_2^2\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_4\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_5\delta_1 - \alpha_4^2\delta_1 + 2\alpha_5^2\delta_1 +$$

$$+ 2\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_4 - 2\alpha_1\alpha_5 - \alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_4 - \alpha_4^2 + 2\alpha_4\alpha_5 + 2\delta_1\varepsilon_3 + 2\varepsilon_3)/$$

$$/(-2\alpha_1\alpha_2\delta_1 - 2\alpha_1\alpha_5\delta_1 - \alpha_2^2\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_4\delta_1 - 2\alpha_2\alpha_5\delta_1 - \alpha_4^2\delta_1 + 2\alpha_5^2\delta_1 -$$

$$- 2\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2^2 - 2\alpha_2\alpha_4 + \alpha_4^2 + 2\alpha_4\alpha_5 + 2\delta_1\varepsilon_3 - 2\varepsilon_3));$$

или

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sh}(\varphi) & \operatorname{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ \operatorname{ch}(\varphi) & \operatorname{sh}(\varphi) & 0 & B \\ \operatorname{ch}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & \operatorname{sh}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & 1 & \frac{1}{2}B^2\varepsilon_1\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$B = \frac{\alpha_3\varepsilon_3\varepsilon_1(\operatorname{sh}(\varphi) - \operatorname{ch}(\varphi)\delta_1)}{\alpha_5\operatorname{ch}(\varphi)\operatorname{sh}(\varphi) - \alpha_1\operatorname{sh}(\varphi)\operatorname{ch}(\varphi) - \alpha_2\operatorname{ch}^2(\varphi) + \operatorname{ch}^2(\varphi)\alpha_4 + \alpha_2},$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln(-(2\alpha_1\alpha_2\delta_1 - 2\alpha_1\alpha_5\delta_1 - \alpha_2^2\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_4\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_5\delta_1 - \alpha_4^2\delta_1 + 2\alpha_5^2\delta_1 +$$

$$+ 2\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_4 - 2\alpha_1\alpha_5 - \alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_4 - \alpha_4^2 + 2\alpha_4\alpha_5 + 2\delta_1\varepsilon_3 + 2\varepsilon_3)/$$

$$/(-2\alpha_1\alpha_2\delta_1 - 2\alpha_1\alpha_5\delta_1 - \alpha_2^2\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_4\delta_1 - 2\alpha_2\alpha_5\delta_1 - \alpha_4^2\delta_1 + 2\alpha_5^2\delta_1 -$$

$$- 2\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2^2 - 2\alpha_2\alpha_4 + \alpha_4^2 + 2\alpha_4\alpha_5 + 2\delta_1\varepsilon_3 - 2\varepsilon_3)).$$

Вышеприведенные замены обнуляют параметр α_3 . Но они невозможны в следующих случаях: $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ и $\alpha_9 = -\alpha_7$; либо $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ и $\alpha_8 = -\frac{2\alpha_7^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}$, где $\alpha_1 = (\alpha_6 + \alpha_7)\delta_1$, $\alpha_5 = (\alpha_6 - \alpha_7)\delta_1$, $\alpha_2 = \alpha_8 + \alpha_9$, $\alpha_4 = \alpha_8 - \alpha_9$.

Для решения (d) выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & B \\ -A\varepsilon_1\delta_2\varepsilon_3 & -B\varepsilon_2\delta_2\varepsilon_3 & \delta_2 & -\frac{1}{2}(A^2\varepsilon_1 + B^2\varepsilon_2)\delta_2\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

где

$$B = -\frac{2\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_2 \left(\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3\delta_1\delta_2 + 2\alpha_4\delta_1 + 2\alpha_3} \right)}{\alpha_1^2\varepsilon_2\varepsilon_3 - 2\alpha_1\alpha_3\varepsilon_1\varepsilon_3 + \alpha_3^2\varepsilon_2\varepsilon_3 + 4\alpha_4^2\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\varepsilon_1},$$

$$A = \frac{2\alpha_2(\delta_2\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3} - 2\delta_1\alpha_1 - 2\alpha_4)}{\alpha_1^2\varepsilon_2\varepsilon_3 - 2\alpha_1\alpha_3\varepsilon_1\varepsilon_3 + \alpha_3^2\varepsilon_2\varepsilon_3 + 4\alpha_4^2\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\varepsilon_1},$$

что обнулит параметр α_2 , а параметр δ_2 сделает равным единице.

Таким образом получим следующие метрические алгебры Ли

(a.1)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= -\alpha_1 \delta_1 e_1 + \alpha_1 e_2, & [e_1, e_3] &= \alpha_1 e_3, & [e_2, e_3] &= \delta_1 \alpha_1 e_3, \\
[e_2, e_4] &= -\alpha_4 \delta_1 e_1 + \alpha_4 e_2 + \alpha_5 e_3, \\
[e_3, e_4] &= \alpha_1 \varepsilon_3 \varepsilon_1 e_1 - \delta_1 \alpha_1 \varepsilon_3 \varepsilon_1 e_2 - \frac{4\alpha_1 \alpha_5 \delta_1 \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \alpha_4^2 - 2\varepsilon_3}{2\alpha_4} e_3, \\
\alpha_1 &\neq 0, & \alpha_4 &\neq 0, \\
\alpha_4^2 \varepsilon_3 - 4\alpha_1 \alpha_5 \delta_1 \varepsilon_1 + 2 &\neq 0, \\
\delta_1 &= \pm 1; \\
\langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, & \langle e_2, e_2 \rangle &= -\varepsilon_1, & \langle e_3, e_4 \rangle &= \varepsilon_3, & \varepsilon_i &= \pm 1.
\end{aligned}$$

(a.2)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_4] &= -\alpha_2 \delta_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \\
[e_2, e_4] &= -\alpha_4 \delta_1 e_1 + \alpha_4 e_2, \\
[e_3, e_4] &= -\frac{\alpha_2^2 - 2\alpha_2 \alpha_4 \delta_1 + \alpha_4^2 + 2\varepsilon_3}{2(\alpha_2 \delta_1 - \alpha_4)} e_3, \\
\alpha_2 \delta_1 - \alpha_4 &\neq 0, \\
(\alpha_2 - \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_4)(\alpha_2 \delta_1 - \alpha_4) + 2\varepsilon_3(\alpha_2 \delta_1 + \alpha_4) &\neq 0, \\
(\alpha_2 - \alpha_4 \delta_1)^2 + 2\varepsilon_3 &\neq 0, \\
\delta_1 &= \pm 1; \\
\langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, & \langle e_2, e_2 \rangle &= -\varepsilon_1, & \langle e_3, e_4 \rangle &= \varepsilon_3, & \varepsilon_i &= \pm 1.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= \alpha_1 \delta_1 e_2 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_3, \\
[e_1, e_4] &= -\frac{\varepsilon_1 \delta_1 (\alpha_2^2 \varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_1} e_3, \\
[e_3, e_4] &= \frac{\varepsilon_1 \delta_1 (\alpha_2^2 \varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_2} e_3, \\
\alpha_1 &\neq 0, & \alpha_2 &\neq 0, & \alpha_2^2 + 2\varepsilon_3 &\neq 0, \\
\delta_1 &= \pm 1; \\
\langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, & \langle e_2, e_2 \rangle &= -\varepsilon_1, & \langle e_3, e_4 \rangle &= \varepsilon_3, & \varepsilon_i &= \pm 1.
\end{aligned}$$

(c.1)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_4] &= (\alpha_6 \delta_1 + \alpha_7 \delta_1) e_1 + (\alpha_8 + \alpha_9) e_2, \\
[e_2, e_4] &= (\alpha_9 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \alpha_8 \varepsilon_1 \varepsilon_2) e_1 + (\alpha_6 \delta_1 - \alpha_7 \delta_1) e_2, \\
[e_3, e_4] &= \frac{\delta_1 (2\alpha_9^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2\alpha_6^2 + 2\alpha_7^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6} e_3, \\
\alpha_6 &\neq 0, \\
2\alpha_6^2 \alpha_7 \varepsilon_1 + 4\alpha_6 \alpha_8 \alpha_9 \varepsilon_2 - 2\alpha_7^3 \varepsilon_1 - 2\alpha_7 \alpha_9^2 \varepsilon_2 - \alpha_7 \varepsilon_1 \varepsilon_3 &\neq 0, \\
2\alpha_6^2 \alpha_9 \varepsilon_2 - 4\alpha_6 \alpha_7 \alpha_8 \varepsilon_2 - 2\alpha_7^2 \alpha_9 \varepsilon_2 - 2\alpha_9^3 \varepsilon_1 - \alpha_9 \varepsilon_2 \varepsilon_3 &\neq 0, \\
2\alpha_9^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + 2\alpha_6^2 \varepsilon_3 + 2\alpha_7^2 \varepsilon_3 + 1 &\neq 0, \\
\delta_1 &= \pm 1;
\end{aligned}$$

$$(c.2) \quad \langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

$$\begin{aligned} [e_1, e_4] &= (\alpha_6 \delta_1 + \alpha_7 \delta_1) e_1 + (\alpha_8 - \alpha_7) e_2 + \alpha_3 e_3, \\ [e_2, e_4] &= (\alpha_8 + \alpha_7) e_1 + (\alpha_6 \delta_1 - \alpha_7 \delta_1) e_2 + \delta_1 \alpha_3 e_3, \end{aligned}$$

$$[e_3, e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6} e_3,$$

$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0,$$

$$2\alpha_6^2 + 4\alpha_6\alpha_8 - \varepsilon_3 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$

$$\delta_1 = \pm 1;$$

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.3)

$$[e_1, e_4] = (\alpha_6 \delta_1 + \alpha_7 \delta_1) e_1 + \frac{2\alpha_6\alpha_9 - 2\alpha_7^2 + 2\alpha_9^2 - \varepsilon_3}{2\alpha_6} e_2 + \alpha_3 e_3,$$

$$[e_2, e_4] = -\frac{2\alpha_6\alpha_9 + 2\alpha_7^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6} e_1 + (\alpha_6 \delta_1 - \alpha_7 \delta_1) e_2 + \delta_1 \alpha_3 e_3,$$

$$[e_3, e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + 2\alpha_7^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6} e_3,$$

$$\alpha_6 \neq 0,$$

$$2\alpha_6^2\alpha_7 - 2\alpha_7^3 + 4\alpha_7^2\alpha_9 + 2\alpha_7\alpha_9^2 - 4\alpha_9^3 - \alpha_7\varepsilon_3 + 2\alpha_9\varepsilon_3 \neq 0,$$

$$2\alpha_6^2\alpha_9 + 4\alpha_7^3 - 2\alpha_7^2\alpha_9 - 4\alpha_7\alpha_9^2 + 2\alpha_9^3 + 2\alpha_7\varepsilon_3 - \alpha_9\varepsilon_3 \neq 0,$$

$$2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 2\alpha_7^2\varepsilon_3 - 2\alpha_9^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$

$$\delta_1 = \pm 1;$$

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(d.1)

$$[e_1, e_4] = -\frac{1}{2} \sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3\varepsilon_1 + \alpha_1\varepsilon_2},$$

$$[e_2, e_4] = \alpha_3\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3\varepsilon_2},$$

$$[e_3, e_4] = \alpha_4\varepsilon_3,$$

$$-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3 \geq 0,$$

$$\varepsilon_1\alpha_1^2 + \sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3\alpha_4\varepsilon_2 - \varepsilon_1\alpha_3^2} \neq 0,$$

$$\begin{aligned} &\alpha_4\alpha_1\varepsilon_2 - \alpha_1\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3\varepsilon_2} + \\ &+ \sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3\alpha_3\varepsilon_1 + \alpha_4\alpha_3\varepsilon_1} \neq 0, \end{aligned}$$

$$\alpha_4 \neq 0,$$

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(d.2)

$$[e_1, e_4] = -\frac{1}{2} \delta_2 \sqrt{-4\alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_1 + (\alpha_5\varepsilon_2 + \alpha_6\varepsilon_2)\varepsilon_2 + \alpha_2\varepsilon_3},$$

$$\begin{aligned}
[e_2, e_4] &= (\alpha_5 \varepsilon_1 - \alpha_6 \varepsilon_1) e_1 + \frac{1}{2} \delta_2 \sqrt{-4\alpha_5^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 e_2} + \delta_1 \alpha_2 e_3, \\
[e_3, e_4] &= \frac{1}{2} \delta_3 \sqrt{-4\alpha_6^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 e_3}, \\
-4\alpha_5^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 &\geq 0, \quad -4\alpha_6^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 > 0, \\
\delta_2 \delta_3 \sqrt{-4\alpha_5^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3} \sqrt{-4\alpha_6^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3} + 8\alpha_5 \alpha_6 \varepsilon_1 &\neq 0, \\
\delta_3 \sqrt{-4\alpha_6^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3} \alpha_5 - 2\delta_2 \sqrt{-4\alpha_5^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3} \alpha_6 &\neq 0, \\
\delta_i &= \pm 1; \\
\langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}$$

Для решения (а.1) сделаем замену базиса с g -ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \text{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \text{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sign}(\alpha_4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sign}(\alpha_4) \end{pmatrix}$$

что делает параметр δ_1 равным единице, а параметры α_1 и α_4 положительными.

Для решения (а.2) сделаем замену базиса с g -ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \text{ch}(\varphi) & \delta_1 \text{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ \text{sh}(\varphi) & \delta_1 \text{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 \text{sign}\left(\frac{\alpha_4^2 - \alpha_2^2}{\alpha_4 \delta_1 + \alpha_2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \text{sign}\left(\frac{\alpha_4^2 - \alpha_2^2}{\alpha_4 \delta_1 + \alpha_2}\right) \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha_4 \delta_1 + \alpha_2}{\alpha_4 \delta_1 - \alpha_2} \right)$; либо с матрицей

$$\begin{pmatrix} \text{sh}(\varphi) & \delta_1 \text{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ \text{ch}(\varphi) & \delta_1 \text{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 \text{sign}\left(\frac{\alpha_4^2 - \alpha_2^2}{\alpha_4 \delta_1 + \alpha_2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \text{sign}\left(\frac{\alpha_4^2 - \alpha_2^2}{\alpha_4 \delta_1 + \alpha_2}\right) \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{\alpha_4 \delta_1 + \alpha_2}{\alpha_4 \delta_1 - \alpha_2} \right)$. После одной из этих замен параметр δ_1 будет равным единице, параметр α_2 занулится, а параметр α_4 станет положительным. Заметим, что одна из данных замен всегда возможна из-за ограничений на структурные константы, которые приведены выше.

Для решения (b) сделаем замену базиса с g -ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \text{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 \text{sign}(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sign}(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

что делает параметр δ_1 равным единице, а параметры α_1 и α_2 положительными.

Для решения (с.1), если $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\alpha_9}{\delta_1 \alpha_7}\right)$, что обратит параметр α_9 в ноль; если $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$, то используем g -ортогональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \text{ch}(\varphi) & \text{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ \text{sh}(\varphi) & \text{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где либо $\varphi = \frac{1}{4} \ln\left(-\frac{\alpha_7 \delta_1 - \alpha_9}{\alpha_7 \delta_1 + \alpha_9}\right)$, и тогда параметр α_7 будет равен нулю; либо $\varphi = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{\alpha_7 \delta_1 - \alpha_9}{\alpha_7 \delta_1 + \alpha_9}\right)$, и тогда параметр α_9 будет равен нулю. Если же $\alpha_7 \pm \alpha_9 = 0$, то после замены базиса с $\varphi = \pm \frac{1}{2} \ln(|\alpha_7|)$, параметр α_7 становится равным ± 1 .

Для решения (с.2), выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \text{ch}(\varphi) & \delta_1 \text{sh}(\varphi) & 0 & -\frac{2\delta_1 \alpha_3 (\text{sh}(\varphi) - \text{ch}(\varphi)) \alpha_6 \varepsilon_1}{2\alpha_6 \alpha_8 \varepsilon_3 - 1} \\ \text{sh}(\varphi) & \delta_1 \text{ch}(\varphi) & 0 & \frac{2\delta_1 \alpha_3 (\text{sh}(\varphi) - \text{ch}(\varphi)) \alpha_6 \varepsilon_1}{2\alpha_6 \alpha_8 \varepsilon_3 - 1} \\ \frac{2\varepsilon_3 \delta_1 \alpha_3 \alpha_6}{1 - 2\alpha_6 \alpha_8 \varepsilon_3} & \frac{2\varepsilon_3 \alpha_3 \alpha_6}{1 - 2\alpha_6 \alpha_8 \varepsilon_3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2} \ln(|\alpha_7|)$, что делает параметр α_3 равным нулю, параметр α_7 равным ± 1 , а параметр δ_1 равным единице.

Для решения (с.3), выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha_3 \varepsilon_3 \varepsilon_1 \delta_1}{\alpha_7 - \alpha_9} \\ 0 & \delta_1 & 0 & \frac{\alpha_3 \varepsilon_3 \varepsilon_1 \delta_1}{\alpha_7 - \alpha_9} \\ -\frac{\delta_1 \alpha_3}{\alpha_7 - \alpha_9} & \frac{\alpha_3}{\alpha_7 - \alpha_9} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что делает параметр α_3 равным нулю, а параметр δ_1 равным единице.

Для решения (d.1), если $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\alpha_5}{\sqrt{-4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}}\right)$, что обратит параметр α_5 в ноль; если $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$, то используем g -ортогональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \text{sh}(\varphi) & \text{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ \text{ch}(\varphi) & \text{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{\pm 2 + \sqrt{2}}{\sqrt{4\alpha_5^2 - 2 - 2\alpha_5}} \right)$, если $\varepsilon_3 = 1$; либо $\varphi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\pm 2 + \sqrt{6}}{\sqrt{4\alpha_5^2 + 2 - 2\alpha_5}} \right)$, если $\varepsilon_3 = -1$. После данной замены параметр α_5 становится равным ± 1 .

Для решения (d.2), если $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\delta_3 \sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \delta_3 \cos(\varphi) & 0 & B \\ -\sin(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3\delta_3 & -\cos(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & \delta_3 & -\frac{1}{2}B^2\varepsilon_1\varepsilon_3\delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} B &= 2\alpha_2\varepsilon_3(\sin(\varphi)\delta_3\delta_1 + \cos(\varphi)\delta_3\delta_1 - \cos(\varphi) + \sin(\varphi))/ \\ &/ (2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\sqrt{-4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_1\delta_2} + 4\sin(\varphi)\cos(\varphi)\delta_3\alpha_5 - 4\cos^2(\varphi)\delta_3\alpha_5 + \\ &+ 2\cos^2(\varphi)\sqrt{-4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_1\delta_2} - 2\delta_3\alpha_6 + 2\delta_3\alpha_5 - \sqrt{-4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_1\delta_2} - \\ &- \sqrt{-4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_1\delta_3}), \\ \varphi &= \arctan \left(-\frac{\sqrt{-4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_1\delta_2} - \sqrt{-4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_1\delta_3} - 2\alpha_5\delta_1 - 2\alpha_6\delta_1}{\sqrt{-4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_1\delta_2}\delta_3\varepsilon_1 + \sqrt{-4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_1\delta_3} + 2\alpha_5\delta_3 - 2\alpha_6\delta_3} \right); \end{aligned}$$

если $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$, то используем g -ортогональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \text{ch}(\varphi) & \delta_1 \text{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ \delta_1\delta_3 \text{sh}(\varphi) & \delta_3 \text{ch}(\varphi) & 0 & B \\ \delta_1 \text{sh}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & \text{ch}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & \delta_3 & \frac{1}{2}B^2\varepsilon_1\varepsilon_3\delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} B &= 2\alpha_2\varepsilon_3(\text{sh}(\varphi)\delta_1 - \text{sh}(\varphi)\delta_3 - \text{ch}(\varphi)\delta_1 + \delta_3 \text{ch}(\varphi))/ \\ &/ (2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3} \text{ch}(\varphi) \text{sh}(\varphi)\varepsilon_1\delta_1\delta_2 + 2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3} \text{ch}^2(\varphi)\varepsilon_1\delta_2\delta_3 + \\ &+ 4 \text{ch}(\varphi) \text{sh}(\varphi)\delta_1\alpha_5\delta_3 - \varepsilon_1\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\delta_3 + 4 \text{ch}^2(\varphi)\alpha_5 - \\ &- \sqrt{4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_1 - 2\alpha_5 + 2\alpha_6}), \\ \varphi &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_1\delta_3} - 2\alpha_6\delta_1}{\varepsilon_1\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3} + 2\alpha_5\delta_1} \right); \end{aligned}$$

либо

$$\begin{pmatrix} \text{sh}(\varphi) & \delta_1 \text{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ -\delta_3\delta_1 \text{ch}(\varphi) & -\delta_3 \text{sh}(\varphi) & 0 & B \\ -\text{ch}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3/\delta_1 & -\text{sh}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & \delta_3 & \frac{1}{2}B^2\varepsilon_1\varepsilon_3\delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} B &= -2\alpha_2\varepsilon_3(\delta_1 \text{ch}(\varphi) + \delta_3 \text{ch}(\varphi) - \text{sh}(\varphi)\delta_1 - \text{sh}(\varphi)\delta_3)/ \\ &/ (2 \text{ch}(\varphi)^2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_1\delta_2}\delta_1 - 2 \text{sh}(\varphi) \text{ch}(\varphi)\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_1\delta_3}\delta_2 - \\ &- 4 \text{ch}^2(\varphi)\delta_3\alpha_5\delta_1 - \sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_1\delta_2}\delta_1 + \sqrt{4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_1\delta_3}\delta_1 + \\ &+ 4 \text{sh}(\varphi) \text{ch}(\varphi)\alpha_5 + 2\delta_3\alpha_5\delta_1 + 2\delta_3\alpha_6\delta_1), \end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{\sqrt{4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_1\delta_3 - 2\alpha_6\delta_1}}{\varepsilon_1\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3 + 2\alpha_5\delta_1}} \right).$$

Вышеприведенные замены обратят параметр α_2 в ноль, а параметр δ_3 сделают равным единице.

Таким образом получим следующие метрические алгебры Ли

(a.1)

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -\alpha_1 e_1 + \alpha_1 e_2, & [e_1, e_3] &= \alpha_1 e_3, & [e_2, e_3] &= \alpha_1 e_3, \\ [e_2, e_4] &= -\alpha_4 e_1 + \alpha_4 e_2 + \alpha_5 e_3, \\ [e_3, e_4] &= \alpha_1 \varepsilon_1 \varepsilon_3 e_1 - \alpha_1 \varepsilon_1 \varepsilon_3 e_2 - \frac{4\alpha_1 \alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \alpha_4^2 - 2\varepsilon_3}{2\alpha_4} e_3, \\ \alpha_1 &> 0, & \alpha_4 &> 0, \\ \alpha_4^2 \varepsilon_1 - 4\alpha_1 \alpha_5 \varepsilon_3 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 &\neq 0, \\ \langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, & \langle e_2, e_2 \rangle &= -\varepsilon_1, & \langle e_3, e_4 \rangle &= \varepsilon_3, & \varepsilon_i &= \pm 1. \end{aligned}$$

(a.2)

$$\begin{aligned} [e_2, e_4] &= -\alpha_4 e_1 + \alpha_4 e_2, & [e_3, e_4] &= \frac{\alpha_4^2 + 2\varepsilon_3}{2\alpha_4} e_3, \\ \alpha_4 &> 0, & \alpha_4^2 + 2\varepsilon_3 &\neq 0, \\ \langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, & \langle e_2, e_2 \rangle &= -\varepsilon_1, & \langle e_3, e_4 \rangle &= \varepsilon_3, & \varepsilon_i &= \pm 1. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \alpha_1 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3, \\ [e_1, e_4] &= -\frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2 \varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_1} e_3, & [e_3, e_4] &= \frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2 \varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_2} e_3, \\ \alpha_1 &> 0, & \alpha_2 &> 0, & \alpha_2^2 + 2\varepsilon_3 &\neq 0, \\ \langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, & \langle e_2, e_2 \rangle &= -\varepsilon_1, & \langle e_3, e_4 \rangle &= \varepsilon_3, & \varepsilon_i &= \pm 1. \end{aligned}$$

(c.1.1)

$$\begin{aligned} [e_1, e_4] &= (\alpha_6 \delta_1 + \alpha_7 \delta_1) e_1 + \alpha_8 e_2, \\ [e_2, e_4] &= -\alpha_8 \varepsilon_1 \varepsilon_2 e_1 + (\alpha_6 \delta_1 - \alpha_7 \delta_1) e_2, \\ [e_3, e_4] &= \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + 2\alpha_7^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6} e_3, \\ \alpha_6 &\neq 0, & \alpha_7 &\neq 0, & \alpha_8 &\neq 0, \\ 2\alpha_6^2 \varepsilon_3 + 2\alpha_7^2 \varepsilon_3 + 1 &\neq 0, & 2\alpha_6^2 - 2\alpha_7^2 - \varepsilon_3 &\neq 0, \\ \delta_1 &= \pm 1; \\ \langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, & \langle e_2, e_2 \rangle &= \varepsilon_2, & \langle e_3, e_4 \rangle &= \varepsilon_3, & \varepsilon_i &= \pm 1. \end{aligned}$$

(c.1.2)

$$\begin{aligned} [e_1, e_4] &= \alpha_6 \delta_1 e_1 + (\alpha_8 + \alpha_9) e_2, \\ [e_2, e_4] &= (\alpha_8 - \alpha_9) e_1 + \alpha_6 \delta_1 e_2, \\ [e_3, e_4] &= \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6} e_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_8 \neq 0, \quad \alpha_9 \neq 0, \\
& 2\alpha_6^2\varepsilon_3 - 2\alpha_9^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2 + 2\alpha_9^2 - \varepsilon_3 \neq 0, \\
& \delta_1 = \pm 1; \\
& \langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}
\tag{c.1.3}$$

$$\begin{aligned}
& [e_1, e_4] = (\alpha_6\delta_1 + \delta_1\delta_2)e_1 + (\alpha_8 + \delta_3)e_2, \\
& [e_2, e_4] = (-\alpha_8 + \delta_3)e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \delta_1\delta_2)e_2, \\
& [e_3, e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + \varepsilon_3 + 4)}{2\alpha_6}e_3, \\
& \alpha_6 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 4\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \\
& 2\alpha_6^2\delta_2 + 4\alpha_6\alpha_8\delta_3 - \delta_2\varepsilon_3 - 4\delta_2 \neq 0, \\
& 2\alpha_6^2\delta_3 - 4\alpha_6\alpha_8\delta_2 - \delta_3\varepsilon_3 - 4\delta_3 \neq 0, \\
& \delta_i = \pm 1; \\
& \langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}
\tag{c.2.1}$$

$$\begin{aligned}
& [e_1, e_4] = (\alpha_6 + \delta_2)e_1 + (\alpha_8 - \delta_2)e_2, \\
& [e_2, e_4] = (\alpha_8 + \delta_2)e_1 + (\alpha_6 - \delta_2)e_2, \\
& [e_3, e_4] = \frac{2\alpha_6^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3, \\
& \alpha_6 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2 + 4\alpha_6\alpha_8 - \varepsilon_3 \neq 0, \\
& \delta_2 = \pm 1; \\
& \langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}
\tag{c.2.2}$$

$$\begin{aligned}
& [e_1, e_4] = (\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1)e_1 - \frac{2\alpha_6\alpha_7 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2 + \alpha_3e_3, \\
& [e_2, e_4] = \frac{2\alpha_6\alpha_7 + \varepsilon_3}{\alpha_6}e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \alpha_7\delta_1)e_2 + \delta_1\alpha_3e_3, \\
& [e_3, e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6}e_3, \\
& \alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \\
& \delta_1 = \pm 1; \\
& \langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}
\tag{c.3.1}$$

$$\begin{aligned}
& [e_1, e_4] = (\alpha_6 + \alpha_7)e_1 + \frac{2\alpha_6\alpha_9 - 2\alpha_7^2 + 2\alpha_9^2 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2, \\
& [e_2, e_4] = -\frac{2\alpha_6\alpha_9 + 2\alpha_7^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6 - \alpha_7)e_2, \\
& [e_3, e_4] = \frac{2\alpha_6^2 + 2\alpha_7^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_6 \neq 0, \\
& 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 2\alpha_7^2\varepsilon_3 - 2\alpha_9^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \\
& 2\alpha_6^2\alpha_7 - 2\alpha_7^3 + 4\alpha_7^2\alpha_9 + 2\alpha_7\alpha_9^2 - 4\alpha_9^3 - \alpha_7\varepsilon_3 + 2\alpha_9\varepsilon_3 \neq 0, \\
& 2\alpha_6^2\alpha_9 + 4\alpha_7^3 - 2\alpha_7^2\alpha_9 - 4\alpha_7\alpha_9^2 + 2\alpha_9^3 + 2\alpha_7\varepsilon_3 - \alpha_9\varepsilon_3 \neq 0, \\
& \langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}$$

(c.3.2)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_4] &= (\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1)e_1 + \frac{2\alpha_6\alpha_7 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2 + \alpha_3e_3, \\
[e_2, e_4] &= -\frac{2\alpha_6\alpha_7 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \alpha_7\delta_1)e_2 + \delta_1\alpha_3e_3, \\
[e_3, e_4] &= \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6}e_3, \\
& \alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \\
& \delta_1 = \pm 1; \\
& \langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}$$

(d.1.1)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_4] &= -\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \alpha_6e_2, \\
[e_2, e_4] &= -\alpha_6e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, \\
[e_3, e_4] &= \alpha_4e_3, \\
& \alpha_4 \neq 0, \quad \alpha_6 \neq 0, \\
& \langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = -1, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}$$

(d.1.2)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_4] &= -\frac{\sqrt{4-2\varepsilon_3}}{2}e_1 + (\delta_3 + \alpha_6)e_2, \\
[e_2, e_4] &= (\alpha_6 - \delta_3)e_1 + \frac{\sqrt{4-2\varepsilon_3}}{2}e_2, \\
[e_3, e_4] &= \alpha_4e_3, \\
& \alpha_4 \neq 0, \quad \sqrt{4-2\varepsilon_3}\alpha_4 - 4\delta_3\alpha_6 \neq 0, \quad \sqrt{4-2\varepsilon_3}\alpha_6 - \alpha_4\delta_3 \neq 0, \\
& \delta_3 = \pm 1; \\
& \langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}$$

(d.2)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_4] &= -\frac{\delta_2\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3}}{2}e_1 + (\alpha_5\varepsilon_2 + \alpha_6\varepsilon_2)e_2, \\
[e_2, e_4] &= (\alpha_5\varepsilon_1 - \alpha_6\varepsilon_1)e_1 + \frac{\delta_2\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3}}{2}e_2, \\
[e_3, e_4] &= \frac{\sqrt{-4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3}}{2}e_3, \\
& -4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 > 0, \quad -4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 \geq 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8\varepsilon_2\alpha_5\alpha_6 + \delta_2\varepsilon_1\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3}\sqrt{-4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3} &\neq 0, \\
2\delta_2\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3}\alpha_6 - \sqrt{-4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3}\alpha_5 &\neq 0, \\
\delta_2 &= \pm 1; \\
\langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i &= \pm 1.
\end{aligned}$$

Для решения (а.1), выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix}
\frac{\alpha_1^2+1}{2\alpha_1} & \frac{\alpha_1^2-1}{2\alpha_1} & 0 & A \\
\frac{\alpha_1^2-1}{2\alpha_1} & \frac{\alpha_1^2+1}{2\alpha_1} & 0 & B \\
-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3(A\alpha_1^2-B\alpha_1^2+A+B)}{2\alpha_1} & -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3(A\alpha_1^2-B\alpha_1^2-A-B)}{2\alpha_1} & 1 & -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3(A^2-B^2)}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{\alpha_4(4\alpha_1^5\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3 - \alpha_1^4\alpha_4^2 - 4\alpha_1^3\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\alpha_1^2\alpha_4^2 - \alpha_4^2)}{4\alpha_1^4(4\alpha_1\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3 - \alpha_4^2 - 2\varepsilon_3)}, \\
B &= -\frac{\alpha_4(4\alpha_1^5\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3 - \alpha_1^4\alpha_4^2 - 4\alpha_1^3\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3 - 4\alpha_1^4\varepsilon_3 + 4\alpha_1^2\varepsilon_3 + \alpha_4^2)}{4\alpha_1^4(4\alpha_1\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3 - \alpha_4^2 - 2\varepsilon_3)},
\end{aligned}$$

что делает параметр α_1 равным единице.

Замена базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix}
\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\alpha_4\right)\right) & \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\alpha_4\right)\right) & 0 & 0 \\
\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\alpha_4\right)\right) & \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\alpha_4\right)\right) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

переводит решение (а.2) в решение (с.2.1).

Для решения (с.1.2), если $\varepsilon_1 = -1$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

что делает параметр ε_1 равным единице.

Замена базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix}
\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \delta_2\delta_1\delta_3\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) & 0 & 0 \\
\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) & -\delta_2\delta_1\delta_3\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

переводит решение (с.1.3) в решение (с.1.1).

Для решения (с.1.1) выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \delta_1\operatorname{sign}(\alpha_8) & 0 & 0 \\
0 & 0 & \delta_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \delta_1
\end{pmatrix}$$

что делает параметр α_8 положительным, а параметр δ_1 равным единице.

Для решения (с.2.1), если $\varepsilon_1 = -1$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что делает параметр ε_1 равным единице.

Для решения (с.2.2) выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha_3^2+1}{2\alpha_3} & \frac{\delta_1(\alpha_3^2-1)}{2\alpha_3} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_3^2 0 1}{2\alpha_3} & \frac{\delta_1(\alpha_3^2+1)}{2\alpha_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 \operatorname{sign}(\alpha_6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \operatorname{sign}(\alpha_6) \end{pmatrix}$$

если $\alpha_3 \neq 0$, что делает параметры α_3 и δ_1 равными единице.

Для решения (с.3.1) выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\varphi) & \operatorname{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}(\varphi) & \operatorname{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\alpha_9 - \alpha_7}{\alpha_9 + \alpha_7} \right)$, если $\alpha_9^2 > \alpha_7^2$, что делает параметр α_7 равным нулю; либо $\varphi = \frac{1}{4} \ln \left(-\frac{\alpha_9 - \alpha_7}{\alpha_9 + \alpha_7} \right)$, если $\alpha_9^2 < \alpha_7^2$, что делает параметр α_9 равным нулю.

Замена базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2\alpha_6\alpha_3\varepsilon_1\delta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha_6\alpha_3\delta_1\varepsilon_3 & 0 & 1 & -2\varepsilon_1\alpha_6^2\alpha_3^2\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

переводит решение (с.3.2) в решение (с.2.2).

Замена базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\alpha_5\varepsilon_1\delta_2}{\sqrt{-4\alpha_5^2+2}} \right)$, переводит решение (d.2) (если $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ и $\varepsilon_3 = -1$) в решение (d.1.1).

Для решения (d.1.1), если $\alpha_4 < 0$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

что делает параметр α_4 положительным.

Для решения (d.1.2) выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что делает параметр δ_3 равным единице.

Таким образом получим следующие метрические алгебры Ли

(a.1)

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -e_1 + e_2, & [e_1, e_3] &= e_3, & [e_2, e_3] &= e_3, \\ [e_2, e_4] &= -\alpha_4 e_1 + \alpha_4 e_2 + \alpha_5 e_3, \\ [e_3, e_4] &= \varepsilon_1 \varepsilon_3 e_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_3 e_2 + \frac{-4\alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \alpha_4^2 + 2\varepsilon_3}{2\alpha_4} e_3, \\ 4\alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \alpha_4^2 - 2\varepsilon_3 &\neq 0, & \alpha_4 &> 0, \\ \langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, & \langle e_2, e_2 \rangle &= -\varepsilon_1, & \langle e_3, e_4 \rangle &= \varepsilon_3, & \varepsilon_i &= \pm 1. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \alpha_1 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3, \\ [e_1, e_4] &= -\frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2 \varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_1} e_3, & [e_3, e_4] &= \frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2 \varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_2} e_3, \\ \alpha_1 &> 0, & \alpha_2 &> 0, & \alpha_2^2 + 2\varepsilon_3 &\neq 0, \\ \langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, & \langle e_2, e_2 \rangle &= -\varepsilon_1, & \langle e_3, e_4 \rangle &= \varepsilon_3, & \varepsilon_i &= \pm 1. \end{aligned}$$

(c.1.1)

$$\begin{aligned} [e_1, e_4] &= (\alpha_6 + \alpha_7) e_1 + \alpha_8 e_2, & [e_2, e_4] &= -\alpha_8 \varepsilon_1 \varepsilon_2 e_1 + (\alpha_6 - \alpha_7) e_2, \\ [e_3, e_4] &= \frac{2\alpha_6^2 + 2\alpha_7^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6} e_3, \\ \alpha_6 &\neq 0, & \alpha_8 &> 0, & \alpha_7 &\neq 0, \\ 2\alpha_6^2 \varepsilon_3 + 2\alpha_7^2 \varepsilon_3 + 1 &\neq 0, & 2\alpha_6^2 - 2\alpha_7^2 - \varepsilon_3 &\neq 0, \\ \langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, & \langle e_2, e_2 \rangle &= \varepsilon_2, & \langle e_3, e_4 \rangle &= \varepsilon_3, & \varepsilon_i &= \pm 1. \end{aligned}$$

(c.1.2)

$$\begin{aligned} [e_1, e_4] &= \alpha_6 \delta_1 e_1 + (\alpha_8 + \alpha_9) e_2, & [e_2, e_4] &= (\alpha_8 - \alpha_9) e_1 + \alpha_6 \delta_1 e_2, \\ [e_3, e_4] &= \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6} e_3, \\ \alpha_6 &\neq 0, & \alpha_8 &\neq 0, & \alpha_9 &\neq 0, \\ 2\alpha_6^2 \varepsilon_3 - 2\alpha_9^2 \varepsilon_3 + 1 &\neq 0, & 2\alpha_6^2 + 2\alpha_9^2 - \varepsilon_3 &\neq 0, \\ \delta_1 &= \pm 1; \\ \langle e_1, e_1 \rangle &= 1, & \langle e_2, e_2 \rangle &= -1, & \langle e_3, e_4 \rangle &= \varepsilon_3, & \varepsilon_3 &= \pm 1. \end{aligned}$$

(c.2.1)

$$\begin{aligned} [e_1, e_4] &= (\alpha_6 + \delta_2) e_1 + (\alpha_8 - \delta_2) e_2, & [e_2, e_4] &= (\alpha_8 + \delta_2) e_1 + (\alpha_6 - \delta_2) e_2, \\ [e_3, e_4] &= \frac{2\alpha_6^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6} e_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_6 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2 + 4\alpha_6\alpha_8 - \varepsilon_3 \neq 0, \\
& \delta_2 = \pm 1; \\
& \langle e_1, e_1 \rangle = 1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_3 = \pm 1.
\end{aligned}
\tag{c.2.2.1}$$

$$\begin{aligned}
[e_1, e_4] &= (\alpha_6 + \alpha_7)e_1 - \frac{2\alpha_6\alpha_7 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2 + e_3, \\
[e_2, e_4] &= \frac{2\alpha_6\alpha_7 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6 - \alpha_7)e_2 + e_3, \\
[e_3, e_4] &= \frac{2\alpha_6^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3, \\
& \alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \\
& \langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}
\tag{c.2.2.2}$$

$$\begin{aligned}
[e_1, e_4] &= (\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1)e_1 - \frac{2\alpha_6\alpha_7 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}, \\
[e_2, e_4] &= \frac{2\alpha_6\alpha_7 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \alpha_7\delta_1)e_2, \\
[e_3, e_4] &= \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6}e_3, \\
& \alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \\
& \delta_1 = \pm 1; \\
& \langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}
\tag{c.3.1.1}$$

$$\begin{aligned}
[e_1, e_4] &= \alpha_6e_1 + \frac{2\alpha_6\alpha_9 + 2\alpha_9^2 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2, \\
[e_2, e_4] &= -\frac{2\alpha_6\alpha_9 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + \alpha_6e_2, \\
[e_3, e_4] &= \frac{2\alpha_6^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3, \\
& \alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_9 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 - 2\alpha_9^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \\
& 2\alpha_9^2 - \varepsilon_3 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2 + 2\alpha_9^2 - \varepsilon_3 \neq 0, \\
& \langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}
\tag{c.3.1.2}$$

$$\begin{aligned}
[e_1, e_4] &= (\alpha_6 + \alpha_7)e_1 - \frac{2\alpha_7^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2, \\
[e_2, e_4] &= -\frac{2\alpha_7^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6 - \alpha_7)e_2, \\
[e_3, e_4] &= \frac{2\alpha_6^2 + 2\alpha_7^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3, \\
& \alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 2\alpha_7^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\alpha_6^2 - 2\alpha_7^2 - \varepsilon_3 \neq 0, \quad 2\alpha_7^2 + \varepsilon_3 \neq 0, \\
& \langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}
\tag{с.3.1.3}$$

$$\begin{aligned}
& [e_1, e_4] = (\alpha_6 + \alpha_7)e_1 + \frac{2\alpha_6\alpha_7\delta_2 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2, \\
& [e_2, e_4] = -\frac{2\alpha_6\alpha_7\delta_2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6 - \alpha_7)e_2, \\
& [e_3, e_4] = \frac{2\alpha_6^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3, \\
& \alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \\
& 2\alpha_6^2 + 2\delta_2\varepsilon_3 - \varepsilon_3 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\delta_2 - \delta_2\varepsilon_3 + 2\varepsilon_3 \neq 0, \\
& \delta_2 = \pm 1; \\
& \langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}
\tag{d.1.1}$$

$$\begin{aligned}
& [e_1, e_4] = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \alpha_6e_2, \quad [e_2, e_4] = -\alpha_6e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, \\
& [e_3, e_4] = \alpha_4e_3, \\
& \alpha_4 > 0, \\
& \langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = -1, \quad \varepsilon_1 = \pm 1.
\end{aligned}
\tag{d.1.2}$$

$$\begin{aligned}
& [e_1, e_4] = -\frac{\sqrt{4-2\varepsilon_3}}{2}e_1 + (1 + \alpha_6)e_2, \\
& [e_2, e_4] = (\alpha_6 - 1)e_1 + \frac{\sqrt{4-2\varepsilon_3}}{2}e_2, \\
& [e_3, e_4] = \alpha_4e_3, \\
& \alpha_4 \neq 0, \quad \sqrt{4-2\varepsilon_3}\alpha_4 - 4\alpha_6 \neq 0, \quad \sqrt{4-2\varepsilon_3}\alpha_6 - \alpha_4 \neq 0, \\
& \langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}
\tag{d.2}$$

$$\begin{aligned}
& [e_1, e_4] = -\frac{\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}}{2}e_1 + (-\alpha_5\varepsilon_1 - \alpha_6\varepsilon_1)e_2, \\
& [e_2, e_4] = (\alpha_5\varepsilon_1 - \alpha_6\varepsilon_1)e_1 + \frac{\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}}{2}e_2, \\
& [e_3, e_4] = \frac{\sqrt{4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3}}{2}e_3, \\
& 4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3 > 0, \quad 4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3 \geq 0, \\
& 2\alpha_6\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3} - \sqrt{4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3}\alpha_5 \neq 0, \\
& \delta_2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\sqrt{4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3} - 8\alpha_5\alpha_6 \neq 0, \\
& \delta_2 = \pm 1; \\
& \langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}$$

Для решения (с.2.2.2) замена базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \ln (|\alpha_7|) \right) & \delta_1 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \ln (|\alpha_7|) \right) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \ln (|\alpha_7|) \right) & \delta_1 \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \ln (|\alpha_7|) \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon_1 = 1$, либо с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \ln (|\alpha_7|) \right) & \delta_1 \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \ln (|\alpha_7|) \right) & 0 & 0 \\ \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \ln (|\alpha_7|) \right) & \delta_1 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \ln (|\alpha_7|) \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon_1 = -1$ переводит данную метрическую алгебру Ли в решение (с.2.1).

При $\varepsilon_1 = 1$ решение (с.3.1.1) совпадает с решением (с.1.2) с точностью до переобозначения параметра α_8 ; при $\varepsilon_1 = -1$ замена базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

переводит решение (с.3.1.1) в решение (с.1.2).

Отметим, что решение (с.3.1.2) совпадает с решением (с.1.1) при $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ с точностью до переобозначения параметра α_7 .

Для решения (с.3.1.3) замена базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \ln (|\alpha_7|) \right) & -\delta_2 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \ln (|\alpha_7|) \right) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \ln (|\alpha_7|) \right) & -\delta_2 \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \ln (|\alpha_7|) \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon_1 = 1$, либо с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \ln (|\alpha_7|) \right) & -\delta_2 \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \ln (|\alpha_7|) \right) & 0 & 0 \\ \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \ln (|\alpha_7|) \right) & -\delta_2 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \ln (|\alpha_7|) \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon_1 = -1$ переводит данную метрическую алгебру Ли в решение (с.2.1).

Для решения (d.2) замена базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sign}(A) \delta_2 \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \ln (|A|) \right) & \operatorname{sign}(A) \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \ln (|A|) \right) & 0 & 0 \\ \operatorname{sign}(A) \delta_2 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \ln (|A|) \right) & \operatorname{sign}(A) \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \ln (|A|) \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sign}(A) \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sign}(A) \delta_2 \end{pmatrix}$$

где $A = \frac{\sqrt{4-2\varepsilon_3}-2}{2\alpha_5\varepsilon_1+\sqrt{4\alpha_5^2-2\varepsilon_3}}$, переводит данную метрическую алгебру Ли в решение (d.1.2).

Для решения (с.1.1), если $\alpha_7 < 0$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_2 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что делает параметр α_7 положительным. Далее, если $\alpha_6 < 0$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

что делает параметр α_6 положительным.

Для решения (с.1.2) выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sign}(\alpha_6) \text{sign}(\alpha_9) \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sign}(\alpha_6) \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sign}(\alpha_6) \delta_1 \end{pmatrix}$$

что делает параметры α_6 и α_9 положительными, а параметр δ_1 равным единице.

Для решения (с.2.1) выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

что делает параметр δ_2 равным единице.

Для решения (с.2.2.1), если $\varepsilon_1 = -1$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что делает параметр ε_1 равным единице. После этого выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sign}(\alpha_6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sign}(\alpha_6) \end{pmatrix}$$

что делает параметр α_6 положительным.

Для решения (d.1.1) выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sign}(\alpha_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что делает параметр α_6 неотрицательным.

Для решения (d.1.2), если $\varepsilon_1 = -1$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

что делает параметр ε_1 равным единице. После этого, если $\varepsilon_3 = -1$, то выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\frac{1}{2} \ln(3 - 2\sqrt{2})) & -\operatorname{sh}(\frac{1}{2} \ln(3 - 2\sqrt{2})) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}(\frac{1}{2} \ln(3 - 2\sqrt{2})) & -\operatorname{ch}(\frac{1}{2} \ln(3 - 2\sqrt{2})) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

что делает параметр α_6 неотрицательным; если $\varepsilon_3 = 1$, то используем g -ортогональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\frac{1}{2} \ln(5 - 2\sqrt{6})) & -\operatorname{sh}(\frac{1}{2} \ln(5 - 2\sqrt{6})) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}(\frac{1}{2} \ln(5 - 2\sqrt{6})) & -\operatorname{ch}(\frac{1}{2} \ln(5 - 2\sqrt{6})) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что делает параметр α_4 положительным. $\square$

Теорема 5. Пусть (G, g) — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной, оператор Риччи которой имеет тип Сегре $\{111\bar{1}\}$. Тогда метрическая алгебра Ли группы G содержится в таблице 2.

$$[e_1, e_3] = -\sqrt{3}\alpha_1 e_3 + \alpha_1 e_4, \quad [e_1, e_4] = \alpha_1 e_3 + \sqrt{3}\alpha_1 e_4, \quad [e_3, e_4] = 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 \alpha_1 e_1, \\ \alpha_1 > 0,$$

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_3 \rangle = -\langle e_4, e_4 \rangle = 1, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Доказательство. Пусть оператор Риччи имеет тип Сегре $\{111\bar{1}\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \alpha & \varepsilon_3 \beta \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \beta & -\varepsilon_3 \alpha \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

где $\rho_1, \rho_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, $\rho_1 \neq \rho_2$ и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет вид

$$2C_{34}^3 \beta \varepsilon_3 = 0, \quad 2C_{34}^4 \beta \varepsilon_3 = 0, \\ C_{12}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \quad C_{12}^2 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\ ((\rho_1 - \alpha)C_{13}^1 + \beta C_{14}^1) \varepsilon_1 = 0, \quad ((\alpha - \rho_1)C_{14}^1 + \beta C_{13}^1) \varepsilon_1 = 0, \\ ((\rho_2 - \alpha)C_{23}^2 + \beta C_{24}^2) \varepsilon_2 = 0, \quad ((\alpha - \rho_2)C_{24}^2 + \beta C_{23}^2) \varepsilon_2 = 0, \\ C_{34}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \alpha) - \beta \varepsilon_3 (C_{13}^3 - C_{14}^4) = 0, \quad C_{34}^2 \varepsilon_2 (\rho_2 - \alpha) - \beta \varepsilon_3 (C_{23}^3 - C_{24}^4) = 0, \\ ((3C_{13}^4 + C_{14}^3) \beta - 2(\rho_1 - \alpha)C_{13}^3) \varepsilon_3 + \beta C_{34}^1 \varepsilon_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
& ((3C_{23}^4 + C_{24}^3)\beta - 2(\rho_2 - \alpha)C_{23}^3)\varepsilon_3 + \beta C_{34}^2\varepsilon_2 = 0, \\
& ((C_{13}^4 + 3C_{14}^3)\beta + 2C_{14}^4(\rho_1 - \alpha))\varepsilon_3 + \beta C_{34}^1\varepsilon_1 = 0, \\
& ((C_{23}^4 + 3C_{24}^3)\beta + 2C_{24}^4(\rho_2 - \alpha))\varepsilon_3 + \beta C_{34}^2\varepsilon_2 = 0, \\
& ((2\alpha - \rho_1 - \rho_2)C_{12}^3 + 2\beta C_{12}^4)\varepsilon_3 - (\rho_1 - \rho_2)(C_{13}^2\varepsilon_2 + C_{23}^1\varepsilon_1) = 0, \\
& ((\rho_1 + \rho_2 - 2\alpha)C_{12}^4 + 2\beta C_{12}^3)\varepsilon_3 - (\rho_1 - \rho_2)(C_{14}^2\varepsilon_2 + C_{24}^1\varepsilon_1) = 0, \\
& ((C_{14}^3 - C_{13}^4)\alpha + (C_{13}^4 - C_{14}^3)\rho_1 + 2\beta C_{14}^4)\varepsilon_3 + C_{34}^1\varepsilon_1(\rho_1 - \alpha) = 0, \\
& ((C_{24}^3 - C_{23}^4)\alpha + (C_{23}^4 - C_{24}^3)\rho_2 + 2\beta C_{24}^4)\varepsilon_3 + C_{34}^2\varepsilon_2(\rho_2 - \alpha) = 0, \\
& ((C_{14}^3 - C_{13}^4)\alpha + (C_{13}^4 - C_{14}^3)\rho_1 + 2\beta C_{13}^3)\varepsilon_3 - C_{34}^1\varepsilon_1(\rho_1 - \alpha) = 0, \\
& ((C_{24}^3 - C_{23}^4)\alpha + (C_{23}^4 - C_{24}^3)\rho_2 + 2\beta C_{23}^3)\varepsilon_3 - C_{34}^2\varepsilon_2(\rho_2 - \alpha) = 0, \\
& ((2\rho_1 - \rho_2 - \alpha)C_{23}^1 + \beta C_{24}^1)\varepsilon_1 + (\rho_2 C_{13}^2 - \alpha C_{13}^2 + \beta C_{14}^2)\varepsilon_2 - \\
& \quad - (\alpha C_{12}^3 + \beta C_{12}^4 - \rho_2 C_{12}^3)\varepsilon_3 = 0, \\
& ((2\rho_1 - \rho_2 - \alpha)C_{24}^1 - \beta C_{23}^1)\varepsilon_1 + (\rho_2 C_{14}^2 - \alpha C_{14}^2 - \beta C_{13}^2)\varepsilon_2 + \\
& \quad + (\alpha C_{12}^4 - \beta C_{12}^3 - \rho_2 C_{12}^4)\varepsilon_3 = 0, \\
& ((2\rho_2 - \rho_1 - \alpha)C_{13}^2 + \beta C_{14}^2)\varepsilon_2 + (\rho_1 C_{23}^1 - \alpha C_{23}^1 + \beta C_{24}^1)\varepsilon_1 + \\
& \quad + (\alpha C_{12}^3 + \beta C_{12}^4 - \rho_1 C_{12}^3)\varepsilon_3 = 0, \\
& ((2\rho_2 - \rho_1 - \alpha)C_{14}^2 - \beta C_{13}^2)\varepsilon_2 + (\rho_1 C_{24}^1 - \alpha C_{24}^1 - \beta C_{23}^1)\varepsilon_1 - \\
& \quad - (\alpha C_{12}^4 - \beta C_{12}^3 - \rho_1 C_{12}^4)\varepsilon_3 = 0.
\end{aligned}$$

Решая данную систему уравнений, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получим две метрические алгебры Ли:

$$\begin{aligned}
[e_2, e_3] &= -\sqrt{3}\delta_1\alpha_1e_3 + \alpha_1e_4, & [e_2, e_4] &= \alpha_1e_3 + \sqrt{3}\delta_1\alpha_1e_4, \\
[e_3, e_4] &= 2\varepsilon_2\varepsilon_3\alpha_1e_2, \\
\alpha_1 &\neq 0, & \delta_1 &= \pm 1; \\
\langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, & \langle e_2, e_2 \rangle &= \varepsilon_2, & \langle e_3, e_3 \rangle &= -\langle e_4, e_4 \rangle = \varepsilon_3, & \varepsilon_i &= \pm 1.
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
[e_1, e_3] &= -\sqrt{3}\delta_1\alpha_1e_3 + \alpha_1e_4, & [e_1, e_4] &= \alpha_1e_3 + \sqrt{3}\delta_1\alpha_1e_4, \\
[e_3, e_4] &= 2\varepsilon_1\varepsilon_3\alpha_1e_1, \\
\alpha_1 &\neq 0, & \delta_1 &= \pm 1; \\
\langle e_1, e_1 \rangle &= \varepsilon_1, & \langle e_2, e_2 \rangle &= \varepsilon_2, & \langle e_3, e_3 \rangle &= -\langle e_4, e_4 \rangle = \varepsilon_3, & \varepsilon_i &= \pm 1.
\end{aligned}$$

Отметим, что замена базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

переводит первое решение во второе.

Для второго решения, если $\varepsilon_3 = -1$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр ε_3 равным единице. Далее, замена базиса с g -ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \text{sign}(\alpha_1)\delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

делает параметр α_1 положительным, а параметр δ_1 равным единице. $\square$

Теорема 6. Пусть (G, g) — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной, оператор Риччи которой имеет тип Сегре $\{(22)\}$. Тогда метрическая алгебра Ли группы G содержится в таблице 2.

Доказательство. Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{(22)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1\rho_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_1 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\rho_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (1), с учетом формул (2), в данном базисе имеет вид

$$\begin{aligned} C_{12}^2\varepsilon_1 &= 0, & C_{13}^2\varepsilon_1 &= 0, \\ C_{13}^4\varepsilon_2 &= 0, & C_{34}^4\varepsilon_2 &= 0, \\ C_{23}^4\varepsilon_2 - C_{34}^2\varepsilon_1 &= 0, & C_{12}^4\varepsilon_2 + C_{14}^2\varepsilon_1 &= 0, \\ (C_{13}^1 + C_{23}^2)\varepsilon_1 + C_{12}^4\varepsilon_2 &= 0, & (C_{13}^3 + C_{14}^4)\varepsilon_2 - C_{34}^2\varepsilon_1 &= 0, \\ (3C_{23}^2 - C_{13}^1)\varepsilon_1 - C_{12}^4\varepsilon_2 &= 0, & (3C_{14}^4 - C_{13}^3)\varepsilon_2 + C_{34}^2\varepsilon_1 &= 0, \\ (2C_{14}^2 - C_{13}^1 - C_{23}^2)\varepsilon_1 + C_{12}^4\varepsilon_2 &= 0, \\ (2C_{23}^4 - C_{13}^3 - C_{14}^4)\varepsilon_2 - C_{34}^2\varepsilon_1 &= 0, \\ (3C_{24}^2 - 2C_{23}^1 - C_{14}^1)\varepsilon_1 - C_{12}^3\varepsilon_2 &= 0, \\ (3C_{24}^4 - 2C_{14}^3 - C_{23}^3)\varepsilon_2 + C_{34}^1\varepsilon_1 &= 0. \end{aligned}$$

Решая данную систему уравнений, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получим следующие метрические алгебры Ли:

(а)

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \frac{2\alpha_1^2\alpha_2 - 2\alpha_1^2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 - 4\alpha_2\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\alpha_2^2\alpha_5 + 2\alpha_5^3 + \alpha_5\varepsilon_1}{2\alpha_5(\alpha_2 - \alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)}e_1 - \frac{\alpha_2\alpha_1}{\alpha_5}e_3, \\ [e_2, e_3] &= \alpha_1e_1 + (\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_2)e_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[e_1, e_4] &= \frac{\alpha_1(\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_5)}{\alpha_5}e_1 + \alpha_2e_3, \\
[e_2, e_4] &= \alpha_3e_1 + \alpha_4e_3, \\
[e_3, e_4] &= \alpha_5e_1 + \\
&+ \frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\alpha_1^2\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\alpha_2\alpha_5^3\varepsilon_1\varepsilon_2 - 4\alpha_1^2\alpha_2\alpha_5 - 2\alpha_2^2\alpha_5^2 + \alpha_5^2\varepsilon_1}{2\alpha_5\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)}e_3, \\
&\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_5 \neq 0, \\
&\alpha_2 - \alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 \neq 0, \\
&2\alpha_1^3\alpha_2\alpha_4\varepsilon_2 - 2\alpha_1^3\alpha_4\alpha_5\varepsilon_1 + 2\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_5\varepsilon_1 - 2\alpha_1^2\alpha_3\alpha_5^2\varepsilon_2 + 2\alpha_1\alpha_2^2\alpha_4\alpha_5\varepsilon_2 - \\
&- 2\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_5^2\varepsilon_1 + 2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_5^2\varepsilon_1 - 2\alpha_2\alpha_3\alpha_5^3\varepsilon_2 + \alpha_1\alpha_4\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3\alpha_5^2 \neq 0, \\
\langle e_1, e_2 \rangle &= \varepsilon_1, \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= \frac{2\alpha_1^2 + \varepsilon_1}{2\alpha_1}e_1, \quad [e_2, e_3] = -\frac{2\alpha_1^2 + \varepsilon_1}{2\alpha_1}e_3, \\
[e_1, e_4] &= \alpha_1e_3, \quad [e_2, e_4] = \alpha_2e_1 + \alpha_3e_3, \\
[e_3, e_4] &= \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(2\alpha_1^2 - \varepsilon_1)}{2\alpha_1}e_1 + \alpha_4e_3, \\
&\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2\alpha_4\varepsilon_1 - 2\alpha_1\alpha_3\varepsilon_2 \neq 0, \\
\langle e_1, e_2 \rangle &= \varepsilon_1, \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= \frac{(2\alpha_2^2 + \varepsilon_1)}{2\alpha_2}e_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_1e_3, \\
[e_2, e_3] &= -2\alpha_2e_3, \quad [e_1, e_4] = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_3, \\
[e_2, e_4] &= \alpha_3e_1 + \alpha_4e_3, \quad [e_3, e_4] = \frac{2\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2}{2\alpha_1}e_3, \\
&\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \\
&2\alpha_1\alpha_2^2\alpha_4 + 2\alpha_2^3\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4\varepsilon_1 - \alpha_2\alpha_3\varepsilon_1 \neq 0, \\
\langle e_1, e_2 \rangle &= \varepsilon_1, \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= \delta_1\sqrt{2}e_1, \quad [e_2, e_3] = -\delta_1\sqrt{2}e_3, \quad [e_1, e_4] = \frac{\delta_1\sqrt{2}}{2}e_3, \\
[e_2, e_4] &= \alpha_1e_1 + \alpha_2e_3, \quad [e_3, e_4] = \alpha_3e_3, \\
&\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\delta_1\varepsilon_2\sqrt{2} \neq 0, \\
&\delta_1 = \pm 1, \\
\langle e_1, e_2 \rangle &= 1, \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = \pm 1.
\end{aligned}$$

(e)

$$[e_1, e_2] = \alpha_1e_1 - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(2\alpha_2^2 - \varepsilon_2)}{2\alpha_2}e_3, \quad [e_2, e_3] = \alpha_2e_1,$$

$$\begin{aligned}
[e_1, e_4] &= -\frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_2}{2\alpha_2} e_1, \quad [e_2, e_4] = \alpha_3 e_1 + \alpha_4 e_3, \\
[e_3, e_4] &= -\frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_2}{2\alpha_2} e_3, \\
\alpha_2 &\neq 0, \quad \alpha_1 \alpha_4 \varepsilon_2 + 2\alpha_2 \alpha_3 \varepsilon_1 \neq 0, \\
\langle e_1, e_2 \rangle &= \varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= \frac{2\alpha_1^2 + \varepsilon_1}{2\alpha_1} e_1, \quad [e_2, e_3] = -\frac{2\alpha_1^2 + 3\varepsilon_1}{4\alpha_1} e_3, \\
[e_1, e_4] &= \alpha_1 e_3, \quad [e_2, e_4] = \alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_3 + \frac{2\alpha_1^2 - \varepsilon_1}{4\alpha_1} e_4, \\
\alpha_1 &\neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0, \quad 2\alpha_1^2 + \varepsilon_1 \neq 0, \\
\langle e_1, e_2 \rangle &= \varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}$$

Далее, замена базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

переводит решение (b) в решение (e).

Кроме того, замена базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

переводит решение (d) в решение (e).

Для решения (a), если $\alpha_1^2 \neq \frac{\alpha_5(2\alpha_2^2 - 2\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}{2(\alpha_2 - \alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)}$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -A\varepsilon_1\varepsilon_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$A = \frac{2\alpha_3\alpha_5(\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_2)}{(2\alpha_1^2\alpha_2 + 2\alpha_2^2\alpha_5 - 2\alpha_1^2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_2\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \alpha_5\varepsilon_1)},$$

что делает параметр α_3 равным нулю; если $\alpha_1^2 = \frac{\alpha_5(2\alpha_2^2 - 2\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}{2(\alpha_2 - \alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)}$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -A\varepsilon_1\varepsilon_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$A = \frac{\alpha_4\varepsilon_2\delta_1\sqrt{2\alpha_5(4\alpha_2^2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_2^3 - 2\alpha_2\alpha_5^2 - \alpha_2\varepsilon_1 + \alpha_5\varepsilon_2)}}{2\alpha_5},$$

что делает параметр α_4 равным нулю.

Для решения (с), если $2\alpha_2^2 - \varepsilon_1 \neq 0$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2\alpha_1\alpha_4}{2\alpha_2^2 - \varepsilon_1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\alpha_4\alpha_1\varepsilon_1\varepsilon_2}{2\alpha_2^2 - \varepsilon_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что делает параметр α_4 равным нулю; если $2\alpha_2^2 - \varepsilon_1 = 0$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_3\varepsilon_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что делает параметр α_3 равным нулю.

Для решения (е) выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha_4\varepsilon_2\varepsilon_1}{2\alpha_2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_4}{2\alpha_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что делает параметр α_4 равным нулю.

Для решения (f), если $6\alpha_1^2 + \varepsilon_1 \neq 0$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4\alpha_2\alpha_1}{6\alpha_1^2 + \varepsilon_1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\alpha_2\alpha_1\varepsilon_1\varepsilon_2}{6\alpha_1^2 + \varepsilon_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что делает параметр α_2 равным нулю.

Таким образом, получим следующие метрические алгебры Ли:

(a.1)

$$[e_1, e_2] = \frac{2\alpha_1^2\alpha_2 + 2\alpha_2^2\alpha_5 + 2\alpha_5^3 - 2\alpha_1^2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 - 4\alpha_2\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \alpha_5\varepsilon_1}{2\alpha_5(\alpha_2 - \alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)}e_1 - \frac{\alpha_2\alpha_1}{\alpha_5}e_3,$$

$$[e_2, e_3] = \alpha_1e_1 + (\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_2)e_3,$$

$$[e_1, e_4] = \frac{\alpha_1(\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_5)}{\alpha_5}e_1 + \alpha_2e_3, \quad [e_2, e_4] = \alpha_4e_3,$$

$$[e_3, e_4] = \alpha_5e_1 +$$

$$+ \frac{(2\alpha_1^2\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\alpha_1^2\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\alpha_2\alpha_5^3\varepsilon_1\varepsilon_2 - 4\alpha_1^2\alpha_2\alpha_5 - 2\alpha_2^2\alpha_5^2 + \alpha_5^2\varepsilon_1)}{2\alpha_5(\alpha_2 - \alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)\alpha_1}e_3,$$

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_4 \neq 0, \quad \alpha_5 \neq 0,$$

$$\alpha_2 - \alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 \neq 0,$$

$$2\alpha_1^2\alpha_2\varepsilon_2 - 2\alpha_1^2\alpha_5\varepsilon_1 + 2\alpha_2^2\alpha_5\varepsilon_2 - 2\alpha_2\alpha_5^2\varepsilon_1 + \alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 \neq 0,$$

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \varepsilon_1, \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(a.2)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= -\alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2 e_1 + \alpha_2 \delta_1 \sqrt{\frac{2\alpha_2^2 - 2\alpha_2 \alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1}{2\alpha_5(\alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \alpha_2)}} e_3, \\
[e_2, e_3] &= -\delta_1 \sqrt{\frac{\alpha_5(2\alpha_2^2 - 2\alpha_2 \alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1)}{2(\alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \alpha_2)}} e_1 + (\alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\alpha_2) e_3, \\
[e_1, e_4] &= \delta_1 (2\alpha_5 - \alpha_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2) \sqrt{\frac{2\alpha_2^2 - 2\alpha_2 \alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1}{2\alpha_5(\alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \alpha_2)}} e_1 + \alpha_2 e_3, \\
[e_2, e_4] &= \alpha_3 e_1, \\
[e_3, e_4] &= \alpha_5 e_1 + \frac{\delta_1 (2\alpha_2^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\alpha_2^2 \alpha_5 + \alpha_2 \varepsilon_2 - 2\alpha_5 \varepsilon_1)}{\sqrt{2\alpha_5(2\alpha_2^2 - 2\alpha_2 \alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \alpha_2)}} e_3, \\
\alpha_3 &\neq 0, \quad \alpha_5 \neq 0, \quad \alpha_2 - \alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \neq 0, \\
\alpha_5 (4\alpha_2^2 \alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\alpha_2^3 - 2\alpha_2 \alpha_5^2 - \alpha_2 \varepsilon_1 + \alpha_5 \varepsilon_2) &> 0, \\
\delta_1 &= \pm 1, \\
\langle e_1, e_2 \rangle &= \varepsilon_1, \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}$$

(c.1)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= \frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_1}{2\alpha_2} e_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha_1 e_3, \quad [e_2, e_3] = -2\alpha_2 e_3, \\
[e_1, e_4] &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_3, \quad [e_2, e_4] = \alpha_3 e_1, \\
[e_3, e_4] &= \frac{2\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2}{2\alpha_1} e_3, \\
\alpha_1 &\neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0, \\
2\alpha_2^2 - \varepsilon_1 &\neq 0, \\
\langle e_1, e_2 \rangle &= \varepsilon_1, \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}$$

(c.2)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= \sqrt{2} \delta_1 e_1 - \varepsilon_2 \alpha_1 e_3, \quad [e_2, e_3] = -\sqrt{2} \delta_1 e_3, \\
[e_1, e_4] &= \alpha_1 e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \delta_1 e_3, \quad [e_2, e_4] = \alpha_4 e_3, \\
[e_3, e_4] &= \alpha_1 e_3, \\
\alpha_4 &\neq 0, \\
\delta_1 &= \pm 1, \\
\langle e_1, e_2 \rangle &= 1, \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = \pm 1.
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= \alpha_1 e_1 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (2\alpha_2^2 - \varepsilon_2)}{2\alpha_2} e_3, \\
[e_2, e_3] &= \alpha_2 e_1, \quad [e_1, e_4] = -\frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_2}{2\alpha_2} e_1, \\
[e_2, e_4] &= \alpha_3 e_1, \quad [e_3, e_4] = -\frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_2}{2\alpha_2} e_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0, \\ \langle e_1, e_2 \rangle = \varepsilon_1, \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1. \end{aligned} \quad (\text{f.1})$$

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \frac{2\alpha_1^2 + \varepsilon_1}{2\alpha_1} e_1, \quad [e_2, e_3] = -\frac{(2\alpha_1^2 + 3\varepsilon_1)}{4\alpha_1} e_3, \\ [e_1, e_4] &= \alpha_1 e_3, \quad [e_2, e_4] = \alpha_3 e_3 + \frac{(2\alpha_1^2 - \varepsilon_1)}{4\alpha_1} e_4, \\ \alpha_1 &\neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0, \\ 6\alpha_1^2 + \varepsilon_1 &\neq 0, \quad 2\alpha_1^2 + \varepsilon_1 \neq 0, \\ \langle e_1, e_2 \rangle &= \varepsilon_1, \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1. \end{aligned}$$

(f.2)

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -\frac{\sqrt{6}}{3} \delta_1 e_1, \quad [e_2, e_3] = \frac{2\sqrt{6}}{3} \delta_1 e_3, \\ [e_1, e_4] &= \frac{\sqrt{6}}{6} \delta_1 e_3, \quad [e_2, e_4] = \alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_3 + \frac{\sqrt{6}}{3} \delta_1 e_4, \\ \alpha_3 &\neq 0, \\ \delta_1 &= \pm 1, \\ \langle e_1, e_2 \rangle &= -1, \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = \pm 1. \end{aligned}$$

Для решения (а.1), если $\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_5^2 \varepsilon_2 \neq 0$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha_1 \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_5^2 \varepsilon_2) \delta_8}} & \frac{\alpha_4 \varepsilon_1 \alpha_1 (\alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \alpha_2) \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_5^2 \varepsilon_2) \delta_8}} & -\frac{\alpha_5 \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_5^2 \varepsilon_2) \delta_8}} & -\frac{\alpha_4 \varepsilon_2 \alpha_1^2 (\alpha_2 - \alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2) \delta_8}{\alpha_5 \sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_5^2 \varepsilon_2) \delta_8}} \\ 0 & \frac{\alpha_1 \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_5^2 \varepsilon_2) \delta_8}} & 0 & -\frac{\alpha_5 \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_5^2 \varepsilon_2) \delta_8}} \\ \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha_5 \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_5^2 \varepsilon_2) \delta_8}} & \frac{\alpha_4 \varepsilon_1 \alpha_1^2 (\alpha_2 - \alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2) \delta_8}{\alpha_5 \sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_5^2 \varepsilon_2) \delta_8}} & \frac{\alpha_1 \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_5^2 \varepsilon_2) \delta_8}} & -\frac{\alpha_4 \varepsilon_1 \alpha_1 (\alpha_2 - \alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2) \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_5^2 \varepsilon_2) \delta_8}} \\ 0 & \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha_5 \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_5^2 \varepsilon_2) \delta_8}} & 0 & \frac{\alpha_1 \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_5^2 \varepsilon_2) \delta_8}} \end{pmatrix}$$

где $\delta_8 = \pm 1$, что переводит решение (а.1) в решение (е).

Для решения (а.2), если $2\alpha_2^2 \varepsilon_2 - 4\alpha_2 \alpha_5 \varepsilon_1 + 2\alpha_5^2 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \neq 0$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta_8}{\sqrt{(2F^2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \delta_8}} & A \varepsilon_1 \varepsilon_2 F \delta_1 \sqrt{2} & -\frac{\delta_8 \delta_1 F \sqrt{2}}{\sqrt{(2F^2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \delta_8}} & A \\ 0 & \frac{\delta_8}{\sqrt{(2F^2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \delta_8}} & 0 & -\frac{\delta_8 \delta_1 F \sqrt{2}}{\sqrt{(2F^2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \delta_8}} \\ \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta_8 \delta_1 F \sqrt{2}}{\sqrt{(2F^2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \delta_8}} & -A \varepsilon_1 \varepsilon_2 & \frac{\delta_8}{\sqrt{(2F^2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \delta_8}} & A \varepsilon_1 \varepsilon_2 F \delta_1 \sqrt{2} \\ 0 & \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta_8 \delta_1 F \sqrt{2}}{\sqrt{(2F^2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \delta_8}} & 0 & \frac{\delta_8}{\sqrt{(2F^2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \delta_8}} \end{pmatrix}$$

где $A = \frac{\varepsilon_1 \delta_8 F^2 (2\alpha_2^2 - 2\alpha_2 \alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1) \alpha_3}{\alpha_5 \sqrt{(2F^2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \delta_8}}$, $F = \frac{\sqrt{\alpha_5 (4\alpha_2^2 \alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\alpha_2^3 - 2\alpha_2 \alpha_5^2 - \alpha_2 \varepsilon_1 + \alpha_5 \varepsilon_2)}}{2\alpha_2^2 - 2\alpha_2 \alpha_5 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1}$ и $\delta_8 = \pm 1$, что переводит решение (а.2) в решение (е).

Для решения (с.1), если $\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_2^2 \varepsilon_2 \neq 0$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha_1 \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_2^2 \varepsilon_2) \delta_8}} & -\frac{\alpha_2^2 \alpha_3 \delta_8 \varepsilon_1}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_2^2 \varepsilon_2) \delta_8}} & -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha_2 \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_2^2 \varepsilon_2) \delta_8}} & -\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \varepsilon_1 \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_2^2 \varepsilon_2) \delta_8}} \\ 0 & \frac{\alpha_1 \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_2^2 \varepsilon_2) \delta_8}} & 0 & -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha_2 \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_2^2 \varepsilon_2) \delta_8}} \\ \frac{\alpha_2 \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_2^2 \varepsilon_2) \delta_8}} & \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \delta_8 \varepsilon_2}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_2^2 \varepsilon_2) \delta_8}} & \frac{\alpha_1 \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_2^2 \varepsilon_2) \delta_8}} & -\frac{\alpha_2^2 \alpha_3 \delta_8 \varepsilon_1}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_2^2 \varepsilon_2) \delta_8}} \\ 0 & \frac{\alpha_2 \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_2^2 \varepsilon_2) \delta_8}} & 0 & \frac{\alpha_1 \delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2 \varepsilon_1 + \alpha_2^2 \varepsilon_2) \delta_8}} \end{pmatrix}$$

где $\delta_8 = \pm 1$, что переводит решение (с.1) в решение (е).

Для решения (с.2), если $2\alpha_1^2 + \varepsilon_2 \neq 0$, замена базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon_2 \alpha_1 \delta_6 \sqrt{2} \delta_1}{\sqrt{(2\alpha_1^2 + \varepsilon_2) \delta_6}} & \frac{\alpha_1 \alpha_4 \delta_6 \varepsilon_2}{\sqrt{(2\alpha_1^2 + \varepsilon_2) \delta_6}} & \frac{\delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2 + \varepsilon_2) \delta_6}} & \frac{\alpha_1^2 \alpha_4 \delta_6 \sqrt{2} \delta_1 \varepsilon_2}{\sqrt{(2\alpha_1^2 + \varepsilon_2) \delta_6}} \\ 0 & -\frac{\varepsilon_2 \alpha_1 \delta_6 \sqrt{2} \delta_1}{\sqrt{(2\alpha_1^2 + \varepsilon_2) \delta_6}} & 0 & \frac{\delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2 + \varepsilon_2) \delta_6}} \\ \frac{\delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2 + \varepsilon_2) \delta_6}} & \frac{\alpha_1^2 \alpha_4 \delta_6 \sqrt{2} \delta_1 \varepsilon_2}{\sqrt{(2\alpha_1^2 + \varepsilon_2) \delta_6}} & \frac{\alpha_1 \sqrt{2} \delta_1 \delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2 + \varepsilon_2) \delta_6}} & -\frac{\alpha_1 \alpha_4 \delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2 + \varepsilon_2) \delta_6}} \\ 0 & \frac{\delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2 + \varepsilon_2) \delta_6}} & 0 & \frac{\alpha_1 \sqrt{2} \delta_1 \delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2 + \varepsilon_2) \delta_6}} \end{pmatrix}$$

где $\delta_6 = \pm 1$, переводит решение (с.2) в решение (е).

Для решения (f.1), если $2\alpha_1^2 - \varepsilon_1 = 0$, выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

что переводит решение (f.1) в решение (е).

Для решения (е) выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \text{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sign}(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sign}(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

что сделает параметр α_1 неотрицательным, а параметр α_2 положительным.

Для решения (f.2) выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sign}(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sign}(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

что сделает параметр α_2 неотрицательным, а параметр δ_1 равным единице.

Таким образом, получим следующие метрические алгебры Ли:

(a.1)

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \frac{12\alpha_6^2 + 4\alpha_6\alpha_7 + \varepsilon_1}{4\alpha_6} e_1 + (\alpha_7\delta_1 - \alpha_6\delta_1) e_3, \\ [e_2, e_3] &= (\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1) e_1 + (\alpha_7 - 3\alpha_6) e_3, \\ [e_1, e_4] &= -(3\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1) e_1 + (\alpha_6 - \alpha_7) e_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[e_2, e_4] &= \alpha_4 e_3, \\
[e_3, e_4] &= (\alpha_6 + \alpha_7) e_1 - \frac{(12\alpha_6^2 - 4\alpha_6\alpha_7 - \varepsilon_1)\delta_1}{4\alpha_6} e_3, \\
\alpha_4 &\neq 0, \quad \alpha_6 \neq 0, \quad 8\alpha_6^2 + \varepsilon_1 \neq 0, \\
\delta_1 &= \pm 1, \\
\langle e_1, e_2 \rangle &= \varepsilon_1, \langle e_3, e_4 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \pm 1.
\end{aligned}$$

(a.2)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= \alpha_5 e_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha_5 \delta_2 \right) \delta_1 e_3, \\
[e_2, e_3] &= -\delta_1 \alpha_5 \delta_2 e_1 + (\alpha_5 - \delta_2 \sqrt{2}) e_3, \\
[e_1, e_4] &= \left(\alpha_5 \delta_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \delta_1 e_1 + \left(\frac{\delta_2 \sqrt{2}}{2} - \alpha_5 \right) e_3, \\
[e_2, e_4] &= \alpha_3 e_1, \quad [e_3, e_4] = \alpha_5 e_1 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \alpha_5 \delta_2 \right) \delta_1 e_3, \\
\alpha_3 &\neq 0, \\
\delta_i &= \pm 1, \\
\langle e_1, e_2 \rangle &= -1, \langle e_3, e_4 \rangle = 1.
\end{aligned}$$

(c.1)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= \frac{\delta_1(2\alpha_1^2 + \varepsilon_1)}{2\alpha_1} e_1 + \alpha_1 e_3, \\
[e_2, e_3] &= -2\alpha_1 \delta_1 e_3, \quad [e_1, e_4] = \alpha_1 \delta_1 e_3 + \alpha_1 e_1, \\
[e_2, e_4] &= \alpha_3 e_1, \quad [e_3, e_4] = \frac{(4\alpha_1^2 - \varepsilon_1)}{2\alpha_1} e_3, \\
\alpha_1 &\neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0, \quad 2\alpha_1^2 - \varepsilon_1 \neq 0, \\
\delta_1 &= \pm 1, \\
\langle e_1, e_2 \rangle &= \varepsilon_1, \langle e_3, e_4 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \pm 1.
\end{aligned}$$

(c.2)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= \sqrt{2} \delta_1 e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \delta_2 e_3, \quad [e_2, e_3] = -\sqrt{2} \delta_1 e_3, \\
[e_1, e_4] &= \frac{\sqrt{2}}{2} \delta_2 e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \delta_1 e_3, \\
[e_2, e_4] &= \alpha_4 e_3, \quad [e_3, e_4] = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta_2 e_3, \\
\alpha_4 &\neq 0, \\
\delta_i &= \pm 1, \\
\langle e_1, e_2 \rangle &= 1, \langle e_3, e_4 \rangle = -1.
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= \alpha_1 e_1 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (2\alpha_2^2 - \varepsilon_2)}{2\alpha_2} e_3, \\
[e_2, e_3] &= \alpha_2 e_1, \quad [e_1, e_4] = -\frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_2}{2\alpha_2} e_1, \\
[e_2, e_4] &= \alpha_3 e_1, \quad [e_3, e_4] = -\frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_2}{2\alpha_2} e_3, \\
\alpha_1 &\geq 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_3 \neq 0, \\
\langle e_1, e_2 \rangle &= \varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}$$

(f.1)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= \frac{2\alpha_1^2 + \varepsilon_1}{2\alpha_1} e_1, \quad [e_2, e_3] = -\frac{2\alpha_1^2 + 3\varepsilon_1}{4\alpha_1} e_3, \\
[e_1, e_4] &= \alpha_1 e_3, \quad [e_2, e_4] = \alpha_3 e_3 + \frac{2\alpha_1^2 - \varepsilon_1}{4\alpha_1} e_4, \\
\alpha_1 &\neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0, \\
6\alpha_1^2 + \varepsilon_1 &\neq 0, \quad 2\alpha_1^2 - \varepsilon_1 \neq 0, \quad 2\alpha_1^2 + \varepsilon_1 \neq 0, \\
\langle e_1, e_2 \rangle &= \varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{aligned}$$

(f.2)

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= -\frac{\sqrt{6}}{3} e_1, \quad [e_2, e_3] = \frac{2\sqrt{6}}{3} e_3, \\
[e_1, e_4] &= \frac{\sqrt{6}}{6} e_3, \quad [e_2, e_4] = \alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_3 + \frac{\sqrt{6}}{3} e_4, \\
\alpha_2 &> 0, \quad \alpha_3 \neq 0, \\
\langle e_1, e_2 \rangle &= -1, \quad \langle e_3, e_4 \rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = \pm 1.
\end{aligned}$$

Далее, замена базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix}
-\frac{\delta_1 \sqrt{2}(8\alpha_6^2 - \varepsilon_1)}{8\alpha_6} & \frac{\delta_1 \varepsilon_1 \sqrt{2}\alpha_4(64\alpha_6^4 - 1)}{64\alpha_6^2} & \frac{\sqrt{2}(8\alpha_6^2 + \varepsilon_1)}{8\alpha_6} & -\frac{\varepsilon_1 \sqrt{2}\alpha_4(8\alpha_6^2 - \varepsilon_1)^2}{64\alpha_6^2} \\
0 & -\frac{\delta_1 \sqrt{2}(8\alpha_6^2 - \varepsilon_1)}{8\alpha_6} & 0 & \frac{\sqrt{2}(8\alpha_6^2 + \varepsilon_1)}{8\alpha_6} \\
\frac{\sqrt{2}(8\alpha_6^2 + \varepsilon_1)}{8\alpha_6} & -\frac{\varepsilon_1 \sqrt{2}\alpha_4(8\alpha_6^2 - \varepsilon_1)^2}{64\alpha_6^2} & -\frac{\delta_1 \sqrt{2}(8\alpha_6^2 - \varepsilon_1)}{8\alpha_6} & \frac{\delta_1 \varepsilon_1 \sqrt{2}\alpha_4(64\alpha_6^4 - 1)}{64\alpha_6^2} \\
0 & \frac{\sqrt{2}(8\alpha_6^2 + \varepsilon_1)}{8\alpha_6} & 0 & -\frac{\delta_1 \sqrt{2}(8\alpha_6^2 - \varepsilon_1)}{8\alpha_6}
\end{pmatrix}$$

переводит решение (a.1) в решение (a.2).

Замена базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix}
\frac{(2\alpha_1^2 - \varepsilon_1)\sqrt{2}}{4\alpha_1} & -\frac{\varepsilon_1 \sqrt{2}\alpha_3(2\alpha_1^2 + \varepsilon_1)^2}{16\alpha_1^2} & \frac{\sqrt{2}\delta_1(2\alpha_1^2 + \varepsilon_1)}{4\alpha_1} & -\frac{(4\alpha_1^4 - 1)\alpha_3 \sqrt{2}\varepsilon_1 \delta_1}{16\alpha_1^2} \\
0 & \frac{(2\alpha_1^2 - \varepsilon_1)\sqrt{2}}{4\alpha_1} & 0 & \frac{\sqrt{2}\delta_1(2\alpha_1^2 + \varepsilon_1)}{4\alpha_1} \\
\frac{\sqrt{2}\delta_1(2\alpha_1^2 + \varepsilon_1)}{4\alpha_1} & -\frac{(4\alpha_1^4 - 1)\alpha_3 \sqrt{2}\varepsilon_1 \delta_1}{16\alpha_1^2} & \frac{(2\alpha_1^2 - \varepsilon_1)\sqrt{2}}{4\alpha_1} & -\frac{\varepsilon_1 \sqrt{2}\alpha_3(2\alpha_1^2 + \varepsilon_1)^2}{16\alpha_1^2} \\
0 & \frac{\sqrt{2}\delta_1(2\alpha_1^2 + \varepsilon_1)}{4\alpha_1} & 0 & \frac{(2\alpha_1^2 - \varepsilon_1)\sqrt{2}}{4\alpha_1}
\end{pmatrix}$$

переводит решение (c.1) в решение (a.2).

Замена базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

переводит решение (с.2) в решение (а.2).

Для решения (а.2) выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

что делает параметры δ_1 и δ_2 равными единице.

Для решения (f.1) выполним замену базиса с g -ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \text{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что делает параметр α_1 положительным. □

Все метрические алгебры Ли, полученные в теоремах 2–6 приведены в таблице 2. В ней используются обозначения $\varepsilon_i = \pm 1$, $\delta_1 = \pm 1$. Отдельным списком приведем метрических тензор для каждой алгебры Ли. Для метрических алгебр Ли (A), (B), (E) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Для метрических алгебр Ли (C), (D) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Для метрических алгебр Ли (F), (G), (H) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Для метрической алгебры Ли (I) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}$$

ТАБЛИЦА 2. Метрические алгебры Ли четырехмерных групп Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, метрика которых не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной

№	Таблица умножения
Тип Серге $\{1(12)\}$	
(A)	$[e_2, e_3] = 3\alpha_1 e_3, [e_2, e_4] = -\frac{\varepsilon_2}{2\alpha_1} e_3 + \alpha_1 e_4, \alpha_1 > 0$
Тип Серге $\{(11)2\}$	
(B)	$[e_1, e_2] = \frac{\delta_1 \sqrt{5} + \varepsilon_1}{2\alpha_1} e_2, [e_1, e_3] = \frac{3\varepsilon_1 + \delta_1 \sqrt{5}}{4\alpha_1} e_3, [e_1, e_4] = \alpha_1 e_3 - \frac{\delta_1 \sqrt{5} + 3\varepsilon_1}{4\alpha_1} e_4, \alpha_1 > 0$
Тип Серге $\{(112)\}$	
(C)	$[e_1, e_2] = -e_1 + e_2, [e_1, e_3] = e_3, [e_2, e_3] = e_3, [e_2, e_4] = -\alpha_1 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3, [e_3, e_4] = \varepsilon_1 \varepsilon_3 e_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_3 e_2 + \frac{\alpha_1^2 - 4\alpha_2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + 2\varepsilon_3}{2\alpha_1} e_3, \alpha_1 > 0, \alpha_1^2 - 4\alpha_2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + 2\varepsilon_3 \neq 0,$
(D)	$[e_1, e_2] = \alpha_1 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3, [e_1, e_4] = -\frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2 \varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_1} e_3, [e_3, e_4] = \frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2 \varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_2} e_3, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_2^2 + 2\varepsilon_3 \neq 0$
(E)	$[e_1, e_4] = (\alpha_1 + \alpha_2)e_1 + \alpha_3 e_2, [e_2, e_4] = -\alpha_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2, [e_3, e_4] = \frac{2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_1} e_3, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 \geq 0, 2\alpha_1^2 \varepsilon_3 + 2\alpha_2^2 \varepsilon_3 + 1 \neq 0, \alpha_3^2 + (2\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 - \varepsilon_3)^2 \neq 0$
(F)	$[e_1, e_4] = \alpha_1 e_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)e_2, [e_2, e_4] = (\alpha_2 - \alpha_3)e_1 + \alpha_1 e_2, [e_3, e_4] = \frac{2\alpha_1^2 - 2\alpha_3^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_1} e_3, \alpha_1 > 0, \alpha_3 > 0, 2\alpha_1^2 \varepsilon_3 - 2\alpha_3^2 \varepsilon_3 + 1 \neq 0, \alpha_2^2 + (2\alpha_1^2 + 2\alpha_3^2 - \varepsilon_3)^2 \neq 0$
(G)	$[e_1, e_4] = (\alpha_1 + 1)e_1 + (\alpha_2 - 1)e_2, [e_2, e_4] = (\alpha_2 + 1)e_1 + (\alpha_1 - 1)e_2, [e_3, e_4] = \frac{2\alpha_1^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_1} e_3, \alpha_1 \neq 0, 2\alpha_1^2 \varepsilon_3 + 1 \neq 0, 2\alpha_1^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 - \varepsilon_3 \neq 0,$
(H)	$[e_1, e_4] = (\alpha_1 + \alpha_2)e_1 - \frac{2\alpha_1 \alpha_2 - \varepsilon_3}{2\alpha_1} e_2 + e_3, [e_2, e_4] = \frac{2\alpha_1 \alpha_2 + \varepsilon_3}{2\alpha_1} e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + e_3, [e_3, e_4] = \frac{2\alpha_1^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_1} e_3, \alpha_1 > 0, \alpha_2 \neq 0, 2\alpha_1^2 + \varepsilon_3 \neq 0$
(I)	$[e_1, e_4] = -\frac{\sqrt{2}}{2} e_1 + \alpha_1 e_2, [e_2, e_4] = -\alpha_1 e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} e_2, [e_3, e_4] = \alpha_2 e_3, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 > 0$
(J)	$[e_1, e_4] = -\frac{\sqrt{6}}{2} e_1 + (\alpha_1 + 1)e_2, [e_2, e_4] = (\alpha_1 - 1)e_1 + \frac{\sqrt{6}}{2} e_2, [e_3, e_4] = \alpha_2 e_3, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \neq 0$
(K)	$[e_1, e_4] = -\frac{\sqrt{2}}{2} e_1 + (\alpha_1 + 1)e_2, [e_2, e_4] = (\alpha_1 - 1)e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} e_2, [e_3, e_4] = \alpha_2 e_3, \alpha_2 > 0$
Тип Серге $\{1111\}$	
(L)	$[e_1, e_3] = -\sqrt{3}\alpha_1 e_3 + \alpha_1 e_4, [e_1, e_4] = \alpha_1 e_3 + \sqrt{3}\alpha_1 e_4, [e_3, e_4] = 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 \alpha_1 e_1, \alpha_1 > 0$
Тип Серге $\{(22)\}$	
(M)	$[e_1, e_2] = \alpha_1 e_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha_1\right) e_3, [e_2, e_3] = -\alpha_1 e_1 + \left(\alpha_1 - \sqrt{2}\right) e_3, [e_1, e_4] = \left(\alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) e_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha_1\right) e_3, [e_2, e_4] = \alpha_2 e_1, [e_3, e_4] = \alpha_1 e_1 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \alpha_1\right) e_3, \alpha_2 \neq 0$
(N)	$[e_1, e_2] = \alpha_1 e_1 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (2\alpha_2^2 - \varepsilon_2)}{2\alpha_2} e_3, [e_2, e_3] = \alpha_2 e_1, [e_1, e_4] = -\frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_2}{2\alpha_2} e_1, [e_2, e_4] = \alpha_3 e_1, [e_3, e_4] = -\frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_2}{2\alpha_2} e_3, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 \neq 0$
(O)	$[e_1, e_2] = \frac{2\alpha_1^2 + \varepsilon_1}{2\alpha_1} e_1, [e_2, e_3] = -\frac{2\alpha_1^2 + 3\varepsilon_1}{4\alpha_1} e_3, [e_1, e_4] = \alpha_1 e_3, [e_2, e_4] = \alpha_2 e_3 + \frac{2\alpha_1^2 - \varepsilon_1}{4\alpha_1} e_4, \alpha_1 \neq 0, \alpha_1 \neq \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha_2 \neq 0, 6\alpha_1^2 + \varepsilon_1 \neq 0$
(P)	$[e_1, e_2] = -\frac{\sqrt{6}}{3} e_1, [e_2, e_3] = \frac{2\sqrt{6}}{3} e_3, [e_1, e_4] = \frac{\sqrt{6}}{6} e_3, [e_2, e_4] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_3 + \frac{\sqrt{6}}{3} e_4, \alpha_1 > 0, \alpha_2 \neq 0$

Для метрической алгебры Ли (J) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для метрической алгебры Ли (K) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для метрической алгебры Ли (L) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Для метрической алгебры Ли (M) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для метрических алгебр Ли (N), (O) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Для метрической алгебры Ли (P) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 7. Все метрические алгебры Ли, приведенные в таблице 2, попарно не изоморфны.

Доказательство. Метрические алгебры Ли с различными типами Сегре оператора Риччи не изоморфны, поскольку тип Сегре оператора Риччи инвариантен относительно изоморфизма. Таким образом, достаточно проверить изоморфность метрических алгебр Ли с одинаковым типом Сегре.

Рассмотрим метрические алгебры Ли, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{(112)\}$. Все девять метрических алгебр Ли имеют одинаковый оператор Риччи

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим образ $\text{Im}(\rho) = \text{span}\{e_3\}$ оператора Риччи. Для метрической алгебры Ли (C) $\text{Im}(\rho)$ не является идеалом, а для (D)–(K) — является. Следовательно, данные метрические алгебры Ли не изоморфны.

Далее, для каждой метрической алгебры Ли рассмотрим коммутатор $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Для метрической алгебры Ли (D):

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \text{span}\{e_1 + e_2, e_3\} \Rightarrow \dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 2.$$

Для метрических алгебр Ли (E)–(K):

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\} \Rightarrow \dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 3.$$

Следовательно, данные метрические алгебры Ли не изоморфны.

Затем, для метрических алгебр Ли (E)–(K) рассмотрим факторизацию $\mathfrak{g}$ по идеалу $\text{Im}(\rho)$. Для метрической алгебры Ли (E):

$$[x_1, x_3] = (\alpha_6 + \alpha_7)x_1 + \alpha_8x_2, \quad [x_2, x_3] = -\alpha_8\varepsilon_1\varepsilon_2x_1 + (\alpha_6 - \alpha_7)x_2.$$

Для метрической алгебры Ли (F):

$$[x_1, x_3] = \alpha_6x_1 + (\alpha_8 + \alpha_9)x_2, \quad [x_2, x_3] = (\alpha_8 - \alpha_9)x_1 + \alpha_6x_2.$$

Для метрической алгебры Ли (G):

$$[x_1, x_3] = (\alpha_6 + 1)x_1 + (\alpha_8 - 1)x_2, \quad [x_2, x_3] = (\alpha_8 + 1)x_1 + (\alpha_6 - 1)x_2.$$

Для метрической алгебры Ли (H):

$$[x_1, x_3] = (\alpha_6 + \alpha_7)x_1 - \frac{2\alpha_6\alpha_7 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}, \quad [x_2, x_3] = \frac{2\alpha_6\alpha_7 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}x_1 + (\alpha_6 - \alpha_7)x_2.$$

Для метрической алгебры Ли (I):

$$[x_1, x_3] = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \alpha_6x_2, \quad [x_2, x_3] = -\alpha_6x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2.$$

Для метрической алгебры Ли (J):

$$[x_1, x_3] = -\frac{\sqrt{6}}{2}x_1 + (1 + \alpha_6)x_2, \quad [x_2, x_3] = (\alpha_6 - 1)x_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}x_2.$$

Для метрической алгебры Ли (K):

$$[x_1, x_3] = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + (1 + \alpha_6)x_2, \quad [x_2, x_3] = (\alpha_6 - 1)x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2.$$

Для метрических алгебр Ли (E)–(H) факторалгебра $\mathfrak{g}/\text{Im}(\rho)$ неунимодулярна, а для (I)–(K) — унимодулярна (т.е. след всех внутренних дифференцирований равен нулю). Следовательно, данные метрические алгебры Ли не изоморфны.

Далее заметим, что метрическая алгебра Ли (I) имеет скалярное произведение с сигнатурой $(1, 1, 1, -1)$ или $(1, -1, -1, -1)$, а метрические алгебры Ли (J), (K) — с сигнатурой $(1, 1, -1, -1)$. Кроме того, метрическая алгебра Ли (J) имеет отрицательно полуопределенный тензор Риччи, а (K) — положительно полуопределенный. Следовательно, данные метрические алгебры Ли не изоморфны.

Предположим, что метрические алгебры Ли (E)–(H) изоморфны. Тогда изоморфизм должен сохранять оператор Риччи и переводить скалярное произведение одной метрической алгебры Ли в скалярное произведение другой, а значит, задаваться матрицей

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{14} \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2\delta_5A_{12} & \delta_5A_{11} & 0 & A_{24} \\ \frac{A_{12}A_{24}\delta_5 - A_{11}A_{14}}{\delta_4\varepsilon_1\varepsilon_3} & -\frac{A_{11}A_{24}\delta_5\varepsilon_2 + A_{12}A_{14}\varepsilon_1}{\delta_4\varepsilon_3} & \delta_4 & -\frac{\delta_4\varepsilon_3(A_{14}^2\varepsilon_1 + A_{24}^2\varepsilon_2)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \delta_4 \end{pmatrix}$$

где $\delta_i = \pm 1$, $\varepsilon_i = \pm 1$ и $A_{11}^2 - A_{12}^2 \neq 0$.

Далее параметры первой метрической алгебры Ли будем обозначать α_i, ε_i , а второй — β_i, ω_i . Структурные константы первой алгебры Ли после изоморфизма будем обозначать $(C_{ij}^k)'$, второй — Z_{ij}^k .

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (Е) в (Н). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$(C_{14}^1)' = Z_{14}^1, \quad (C_{24}^2)' = Z_{24}^2, \quad (C_{34}^3)' = Z_{34}^3,$$

которое имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 \delta_4 - \alpha_2 \delta_4 + 2A_{11}^2 \alpha_2 \delta_4 \varepsilon_1 &= \beta_1 + \beta_2, \\ \alpha_1 \delta_4 + \alpha_2 \delta_4 - 2A_{11}^2 \alpha_2 \delta_4 \varepsilon_1 &= \beta_1 - \beta_2, \\ \frac{\delta_4 (2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + \varepsilon_3)}{\alpha_1} &= \frac{2\beta_1^2 + \varepsilon_3}{\beta_1}. \end{aligned}$$

Но данная система не имеет решения, поскольку $\alpha_2 > 0$.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (F) в (Н). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$(C_{14}^1)' = Z_{14}^1, \quad (C_{24}^2)' = Z_{24}^2, \quad (C_{34}^3)' = Z_{34}^3,$$

которое имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 \delta_4 + 2A_{11} A_{12} \alpha_3 \delta_4 &= \beta_1 + \beta_2, \\ \alpha_1 \delta_4 - 2A_{11} A_{12} \alpha_3 \delta_4 &= \beta_1 - \beta_2, \\ \frac{\delta_4 (2\alpha_1^2 - 2\alpha_3^2 + \varepsilon_3)}{\alpha_1} &= \frac{2\beta_1^2 + \varepsilon_3}{\beta_1}. \end{aligned}$$

Но данная система не имеет решения, так как $\alpha_3 > 0$.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (G) в (Н). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$\begin{aligned} (C_{14}^1)' &= Z_{14}^1, \quad (C_{14}^2)' = Z_{14}^2, \quad (C_{14}^3)' = Z_{14}^3, \\ (C_{24}^1)' &= Z_{24}^1, \quad (C_{24}^2)' = Z_{24}^2, \quad (C_{24}^3)' = Z_{24}^3, \end{aligned}$$

которое имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta_4 ((\alpha_1 + 1) A_{11} + (\alpha_1 - 1) A_{12})}{A_{11} + A_{12}} &= \beta_1 + \beta_2, \\ \frac{\delta_5 \delta_4 ((\alpha_2 - 1) A_{11} + (\alpha_2 + 1) A_{12})}{A_{11} + A_{12}} &= \frac{\varepsilon_3 - 2\beta_1 \beta_2}{2\beta_1}, \\ \frac{2(A_{12}(A_{24}(\alpha_2 + 1)\delta_5 + A_{14}) - (A_{14} - A_{24}(\alpha_2 - 1)\delta_5)A_{11})\varepsilon_3}{A_{11} + A_{12}} + \frac{A_{14}}{\alpha_1} &= 2, \\ \frac{\delta_5 \delta_4 ((\alpha_2 + 1) A_{11} + (\alpha_2 - 1) A_{12})}{A_{11} + A_{12}} &= \frac{2\beta_1 \beta_2 + \varepsilon_3}{2\beta_1}, \\ \frac{\delta_4 ((\alpha_1 - 1) A_{11} + (\alpha_1 + 1) A_{12})}{(A_{11} + A_{12})} &= \beta_1 - \beta_2, \\ \frac{2\varepsilon_3 (A_{12}(A_{24} - A_{14}(\alpha_2 - 1)\delta_5) - (A_{14}(\alpha_2 + 1)\delta_5 + A_{24})A_{11})}{A_{11} + A_{12}} - \frac{A_{24}}{\alpha_1} &= 2. \end{aligned}$$

Но данная система не имеет решения, поскольку изоморфизм обязан иметь невырожденную матрицу.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (E) в (G). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$\begin{aligned}(C_{14}^1)' &= Z_{14}^1, & (C_{14}^2)' &= Z_{14}^2, & (C_{14}^3)' &= Z_{14}^3, \\ (C_{24}^1)' &= Z_{24}^1, & (C_{24}^2)' &= Z_{24}^2, & (C_{24}^3)' &= Z_{24}^3, & (C_{34}^3)' &= Z_{34}^3,\end{aligned}$$

которое имеет вид

$$\begin{aligned}\delta_4 (2A_{11}^2 \alpha_2 \varepsilon_1 + \alpha_1 - \alpha_2) &= \beta_1 + 1, \\ \delta_5 (\alpha_3 - 2A_{11} A_{12} \alpha_2 \varepsilon_2) \delta_4 &= \beta_2 - 1, \\ (((2\varepsilon_1 - 4A_{11}^2) A_{14} + 4A_{11} A_{12} A_{24} \delta_5) \alpha_2 - 2\varepsilon_2 A_{24} \alpha_3 \delta_5) \alpha_1 + 2A_{14} \alpha_2^2 \varepsilon_1) \varepsilon_3 + \\ &+ A_{14} \varepsilon_1 = 0, \\ -\delta_5 (2A_{11} A_{12} \alpha_2 + \alpha_3 \varepsilon_2) \varepsilon_1 \delta_4 &= \beta_2 + 1, \\ -\delta_4 (2A_{11}^2 \alpha_2 \varepsilon_1 - \alpha_1 - \alpha_2) &= \beta_1 - 1, \\ (((4A_{11}^2 \varepsilon_1 - 2) A_{24} \alpha_2 + 2A_{14} \alpha_3 \delta_5) \alpha_1 + 2A_{24} \alpha_2^2) \varepsilon_3 + A_{24}) \varepsilon_2 + \\ &+ 4\varepsilon_3 A_{11} A_{12} A_{14} \alpha_2 \delta_5 \alpha_1 = 0, \\ \frac{\delta_4 (2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + \varepsilon_3)}{\alpha_1} &= \frac{2\beta_1^2 + \varepsilon_3}{\beta_1}.\end{aligned}$$

Но данная система не имеет решения, так как изоморфизм обязан иметь невырожденную матрицу.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (F) в (G). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$\begin{aligned}(C_{14}^1)' &= Z_{14}^1, & (C_{14}^2)' &= Z_{14}^2, & (C_{14}^3)' &= Z_{14}^3, \\ (C_{24}^1)' &= Z_{24}^1, & (C_{24}^2)' &= Z_{24}^2, & (C_{24}^3)' &= Z_{24}^3, & (C_{34}^3)' &= Z_{34}^3,\end{aligned}$$

которое имеет вид

$$\begin{aligned}\delta_4 (2A_{11} A_{12} \alpha_3 + \alpha_1) &= \beta_1 + 1, \\ \delta_5 \delta_4 (2A_{11}^2 \alpha_3 + \alpha_2 - \alpha_3) &= \beta_2 - 1, \\ (((4A_{11}^2 - 2) A_{24} \delta_5 - 4A_{11} A_{12} A_{14}) \alpha_3 + 2A_{24} \alpha_2 \delta_5) \alpha_1 - 2A_{14} \alpha_3^2) \varepsilon_3 + A_{14} &= 0, \\ -\delta_5 \delta_4 (2A_{11}^2 \alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_3) &= \beta_2 + 1, \\ -(2A_{11} A_{12} \alpha_3 - \alpha_1) \delta_4 &= \beta_1 - 1, \\ (((4A_{11}^2 - 2) A_{14} \delta_5 - 4A_{11} A_{12} A_{24}) \alpha_3 - 2A_{14} \alpha_2 \delta_5) \alpha_1 + 2A_{24} \alpha_3^2) \varepsilon_3 - A_{24} &= 0, \\ \frac{\delta_4 (2\alpha_1^2 - 2\alpha_3^2 + \varepsilon_3)}{\alpha_1} &= \frac{2\beta_1^2 + \varepsilon_3}{\beta_1}.\end{aligned}$$

Но данная система не имеет решения, поскольку изоморфизм обязан иметь невырожденную матрицу.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (E) в (F). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$\begin{aligned}(C_{14}^1)' &= Z_{14}^1, & (C_{14}^2)' &= Z_{14}^2, & (C_{14}^3)' &= Z_{14}^3, \\ (C_{24}^1)' &= Z_{24}^1, & (C_{24}^2)' &= Z_{24}^2, & (C_{24}^3)' &= Z_{24}^3, & (C_{34}^3)' &= Z_{34}^3,\end{aligned}$$

которое имеет вид

$$\delta_4 (2A_{11}^2 \alpha_2 \varepsilon_1 + \alpha_1 - \alpha_2) = \beta_1,$$

$$\begin{aligned}
& -\delta_4\delta_5(2A_{11}A_{12}\alpha_2\varepsilon_2 - \alpha_3) = \beta_2 + \beta_3, \\
& (((2\varepsilon_1 - 4A_{11}^2)A_{14} + 4A_{11}A_{12}A_{24}\delta_5)\alpha_2 - 2\varepsilon_2A_{24}\alpha_3\delta_5)\alpha_1 + 2A_{14}\alpha_2^2\varepsilon_1)\varepsilon_3 + \\
& \quad + A_{14}\varepsilon_1 = 0, \\
& -\delta_4\varepsilon_1(2A_{11}A_{12}\alpha_2 + \alpha_3\varepsilon_2)\delta_5 = \beta_8 - \beta_9, \\
& -\delta_4(2A_{11}^2\alpha_2\varepsilon_1 - \alpha_1 - \alpha_2) = \beta_1, \\
& (((4A_{11}^2\varepsilon_1 - 2)A_{24}\alpha_2 + 2A_{14}\alpha_3\delta_5)\alpha_1 + 2A_{24}\alpha_2^2)\varepsilon_3 + A_{24})\varepsilon_2 + \\
& \quad + 4A_{11}A_{12}A_{14}\alpha_1\alpha_2\delta_5\varepsilon_3 = 0, \\
& \frac{\delta_4(2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + \varepsilon_3)}{\alpha_1} = \frac{2\beta_1^2 - 2\beta_3^2 + \varepsilon_3}{\beta_1}.
\end{aligned}$$

Но данная система не имеет решения, так как изоморфизм обязан иметь невырожденную матрицу.

Далее, рассмотрим метрические алгебры Ли, оператор Риччи которых имеет тип Сегре {22}. Все четыре метрические алгебры Ли имеют одинаковый оператор Риччи

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для каждой метрической алгебры Ли рассмотрим коммутатор $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Для метрических алгебр Ли (M)–(N):

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \text{span}\{e_1, e_3\} \Rightarrow \dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 2.$$

Для метрических алгебр Ли (O)–(P):

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \text{span}\{e_1, e_3, e_4\} \Rightarrow \dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 3.$$

Следовательно, данные метрические алгебры Ли не изоморфны.

Предположим, что метрические алгебры Ли (M), (N) и (O), (P) изоморфны. Тогда изоморфизм должен сохранять оператор Риччи и переводить скалярное произведение одной метрической алгебры Ли в скалярное произведение другой, а значит, задаваться матрицей

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{11} & 0 & A_{13} \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2\delta_4A_{13} & A_{32} & \delta_4A_{11} & A_{34} \\ 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2\delta_4A_{13} & 0 & \delta_4A_{11} \end{pmatrix}$$

где $\delta_i = \pm 1$, $\varepsilon_i = \pm 1$ и $A_{11}^2 - A_{13}^2 \neq 0$.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (M) в (N). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$(C_{14}^3)' = Z_{14}^3, \quad (C_{34}^1)' = Z_{34}^1,$$

которое имеет вид

$$\begin{aligned}
& 2(2A_{11}^2\omega_1 - 2A_{11}A_{13}\omega_1 + 1)\alpha_1 - A_{11}\omega_1(A_{11} - 2A_{13})\sqrt{2} = 0, \\
& (A_{11}^2\omega_1 - 2A_{11}A_{13}\omega_1 + 1)\sqrt{2} - 2(2A_{11}^2\omega_1 - 2A_{11}A_{13}\omega_1 + 1)\alpha_1 = 0.
\end{aligned}$$

Но данная система не имеет решения, так как изоморфизм обязан иметь невырожденную матрицу.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (O) в (P). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$(C_{24}^1)' = Z_{24}^1, \quad (C_{24}^2)' = Z_{24}^2,$$

которое имеет вид

$$\begin{aligned} (2A_{14}\delta_4\epsilon_2 + A_{32})\sqrt{6}A_{13}^2 - \left(A_{11}(A_{12}\delta_4 + 2A_{34})\sqrt{6} + 6\omega_1\delta_4\alpha_2\right)A_{13} - \\ - 6\omega_1A_{11}\alpha_2\delta_4 = 0, \\ A_{13}\delta_4\omega_1 = 0. \end{aligned}$$

Но данная система не имеет решения, поскольку изоморфизм обязан иметь невырожденную матрицу. $\square$

В заключении отметим, что полученная классификация содержит 16 метрических алгебр Ли: 1 из них имеет скалярное произведение лоренцевой сигнатуры, 11 — нейтральной сигнатуры, а 4 допускают скалярное произведение как лоренцевой, так и нейтральной сигнатуры.

Краткий анонс результатов данной работы был ранее опубликован в работе [13].

REFERENCES

- [1] A. Besse, *Einstein manifolds*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1987. MR0867684
- [2] A. Gray, *Einstein-like manifolds which are not Einstein*, *Geom. Dedicata*, **7** (1978), 259–280. MR0505561
- [3] O.P. Gladunova, E.D. Rodionov, V.V. Slavskii, *Harmonic Tensors on Three-Dimensional Lie Groups with Left-Invariant Lorentz Metric*, *Journal of mathematical sciences*, **198**:5 (2014), 505–545. MR3205930
- [4] O.P. Gladunova, V.V. Slavskii, *Left-invariant Riemannian metrics on four-dimensional unimodular Lie groups with zero-divergence Weyl tensor*, *Doklady Mathematics*, **81**:2 (2010), 298–300. MR2723566
- [5] D.S. Voronov, E.D. Rodionov, *Left-invariant Riemannian metrics on four-dimensional nonunimodular Lie groups with zero-divergence Weyl tensor*, *Doklady Mathematics*, **81**:3 (2010), 392–394. MR2723594
- [6] O.P. Gladunova, V.V. Slavskii, *Harmonicity of the Weyl tensor of left-invariant Riemannian metrics on four-dimensional unimodular Lie groups*, *Siberian Advances in math.*, **23**:1 (2013), 32–46. MR2858657
- [7] A. Zaeim, A. Haji-Badali, *Einstein-like Pseudo-Riemannian Homogeneous Manifolds of Dimension Four*, *Mediterranean Journal of Mathematics*, **13**:5 (2016), 3455–3468. MR3554319
- [8] G. Calvaruso, A. Zaeim, *Conformally flat homogeneous pseudo-riemannian four-manifolds*, *Tohoku Math. J.*, **66** (2014), 31–54. MR3189478
- [9] G. Calvaruso, A. Zaeim, *Four-dimensional Lorentzian Lie groups*, *Differential Geometry and its Applications*, **31** (2013), 496–509. MR3066029
- [10] G. Calvaruso, A. Zaeim, *Neutral Metrics on Four-Dimensional Lie Groups*, *Journal of Lie Theory*, **25** (2015), 1023–1044. MR3345046
- [11] P.R. Law, *Algebraic classification of the Ricci curvature tensor and spinor for neutral signature in four dimensions*, arXiv:1008.0444, (2010).
- [12] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, Academic Press, 1983. MR0719023
- [13] O.P. Khromova, P.N. Klepikov, E.D. Rodionov *Left-invariant pseudo-Riemannian metrics on four-dimensional Lie groups with zero Schouten-Weyl tensor*, arXiv:1611.00916, (2016).

PAVEL NIKOLAEVICH KLEPIKOV
ALTAI STATE UNIVERSITY,
61, LENINA AVE.,
BARNAUL, 656049, RUSSIA
E-mail address: `klepikov.math@gmail.com`