Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

L. L. Maksimova, V. F. Yun, Recognizability in pre-Heyting and well-composed logics, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 427–434

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.024>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.237.206.68

April 26, 2023, 07:16:35

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 427–434 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.024

УДК 510.6

MSC 03B45

УЗНАВАЕМОСТЬ В ПРЕДГЕЙТИНГОВЫХ И СТРОЙНЫХ
ЛОГИКАХ

Л.Л. МАКСИМОВА, В.Ф. ЮН

ABSTRACT. In this paper the problems of recognizability and strong recognizability, perceptibility and strong perceptibility in extensions of the minimal Johansson logic J [1] are studied. These concepts were introduced in [2, 3, 4]. Although the intuitionistic logic Int is recognizable over J [2], the problem of its strong recognizability over J is not solved. Here we prove that Int is strong recognizable and strong perceptible over the minimal pre-Heyting logic Od and the minimal well-composed logic JX . In addition, we prove the perceptibility of the formula F over JX . It is unknown whether the logic $J+F$ is recognizable over J .

Keywords: Recognizability, strong recognizability, minimal logic, pre-Heyting logic, Johansson algebra, Heyting algebra, superintuitionistic logic, calculus.

В работе исследуются проблемы узнаваемости и сильной узнаваемости, различимости и сильной различимости в расширениях минимальной логики J Йохансона [1].

Указанные понятия были введены в [2, 3, 4].

Например, формула A различима над логикой J , если существует алгоритм, проверяющий по любой конечной системе схем аксиом Ax , выводима ли A в $J+Ax$; формула A сильно различима над логикой J , если существует алгоритм, проверяющий по любой конечной системе Rul аксиом и правил вывода, выводима ли A в исчислении $J+Rul$.

В параграфах 1, 2 мы дадим необходимые определения и известные факты.

МАКСИМОВА, L.L., YUN, V.F., RECOGNIZABILITY IN PRE-HEYTING AND WELL-COMPOSED LOGICS.

© 2019 Максимова Л.Л., Юн В.Ф.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.1, проект № 0314-2019-0002.

Поступила 26 июня 2018 г., опубликована 29 марта 2019 г.

В параграфе 3 докажем различимость над наименьшей стройной логикой JX известной формулы F . Логика JF исследовалась в ряде работ [5, 6], она разрешима и обладает дизъюнктивным и интерполяционным свойствами. Неизвестно, узнаваема ли логика JF над J.

Хотя интуиционистская логика Int узнаваема над J [2], проблема сильной узнаваемости Int над J не решена. Понятие сильной узнаваемости было введено в [4]. Там была сформулирована проблема: является ли логика Int сильно узнаваемой над J? В этой статье мы докажем сильную узнаваемость и сильную различимость Int над минимальной предгейтинговой логикой Od и минимальной стройной логикой JX, приведем алгоритмы сильной различимости. Для доказательства используем найденную в [7] характеристику гейтинговых алгебр посредством невлости. Также установим сильную различимость некоторых формул.

1. Логика и многообразия

Язык минимальной логики J Йохансона содержит связки $\&, \vee, \rightarrow$ и пропозициональную константу $\perp$; $\top = \perp \rightarrow \perp$, $\neg A = A \rightarrow \perp$.

Минимальная логика J имеет те же аксиомы, что и позитивное интуиционистское исчисление и единственное правило вывода $R1$: $A, A \rightarrow B / B$.

J-логика — это любое множество формул, содержащее все аксиомы исчисления J и замкнутое относительно $R1$ и подстановки. Для J-логики L пишем $\Gamma \vdash_L A$, если A выводима из множества $L \cup \Gamma$ с помощью правила $R1$.

Рассмотрим формулы:

$$\begin{aligned} Int &= \perp \rightarrow p, \\ Hyb &= \perp \vee (\perp \rightarrow p), \\ Od &= \neg\neg(\perp \rightarrow p), \\ X &= (\perp \rightarrow p) \vee (p \rightarrow \perp), \\ F &= (\perp \rightarrow p \vee q) \rightarrow (\perp \rightarrow p) \vee (\perp \rightarrow q). \end{aligned}$$

Введем обозначения для некоторых J-логик:

$$\begin{aligned} Int &= J + Int, \\ Neg &= J + \perp, \\ Hyb &= J + Hyb, \\ Od &= J + Od, \\ JX &= J + X, \\ JF &= J + F, \\ For &= J + p. \end{aligned}$$

J-логика называется *нетривиальной*, если не совпадает с For.

Логика называется *суперинтуиционистской, негативной, гибридной, предгейтинговой, стройной*, если содержит соответственно Int, Neg, Hyb, Od, JX.

Пусть L — логика, Rul — множество аксиом и правил вывода. Пишем $J + Rul \geq L$, если все формулы из L выводимы в $(J + Rul)$; пишем $J + Rul = L$, если L совпадает с множеством формул, выводимых в $(J + Rul)$.

Алгебраическая семантика логики J строится с помощью алгебр Йохансона (J-алгебр) $\mathbf{A} = \langle A; \&, \vee, \rightarrow, \perp, \top \rangle$, где

$\langle A; \&, \vee, \rightarrow, \perp, \top \rangle$ — решетка относительно $\&, \vee$ с наибольшим элементом $\top$, $\perp$ — произвольный элемент в A ,
 $z \leq x \rightarrow y \iff z \& x \leq y$.

J-алгебра называется *гейтинговой*, если $\perp$ — наименьший элемент множества A , и *негативной алгеброй*, если $\perp$ — наибольший элемент множества A . Алгебра Йохансона $\mathbf{A}$ называется *гибридной*, если $\mathbf{A} \models \perp \vee (\perp \rightarrow p)$, *предгейтинговой*, если $\mathbf{A} \models \neg\neg(\perp \rightarrow p)$, и *стройной*, если $\mathbf{A} \models (\perp \rightarrow p) \vee (p \rightarrow \perp)$.

Пишем $\mathbf{A} \models B$, если тождество $B = \top$ выполнено в $\mathbf{A}$. Вместо $(\forall A \in L)(\mathbf{A} \models A)$ будем писать $\mathbf{A} \models L$.

Существует взаимно однозначное соответствие между решеткой J-логик и решеткой многообразий J-алгебр. Обозначаем

$$V(L) = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} \models L\}.$$

В частности, $V(\text{Int})$ — многообразие гейтинговых алгебр, $V(\text{Neg})$ — многообразие негативных алгебр, $V(\text{JX})$ — многообразие стройных алгебр.

Для правила вывода $(r) : A_1, \dots, A_k / B$ пишем $\mathbf{A} \models (r)$, если квазитожество $(A_1 = \top \wedge \dots \wedge A_k = \top \Rightarrow B = \top)$ истинно в $\mathbf{A}$.

Каждому исчислению $L = J + \text{Rul}$, где Rul — множество аксиом и правил вывода, соответствует квазимногообразие $Q(L) = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} \models \text{Rul}\}$. При этом имеет место **теорема о полноте** [8]:

$$L \vdash A \iff Q(L) \models A.$$

2. Различимость и узнаваемость

Пусть L_0 — конечно аксиоматизируемая J-логика. Формула A *различима над L_0* , если существует алгоритм, определяющий по произвольной конечной системе аксиом Ax , верно ли соотношение $L_0 + Ax \vdash A$; формула A *сильно различима над L_0* , если существует алгоритм, определяющий по произвольной конечной системе Rul аксиом и правил вывода, верно ли соотношение $L_0 + \text{Rul} \vdash A$.

Пусть L, L_0 — конечно аксиоматизируемые J-логики, $L \supseteq L_0$.

Логика L *различима над L_0* , если разрешима проблема $L_0 + Ax \geq L$; логика L *сильно различима над L_0* , если разрешима проблема включения $L_0 + \text{Rul} \geq L$.

Логика L *узнаваема над L_0* , если существует алгоритм, который по любой конечной системе Ax схем аксиом узнает, верно ли равенство $L_0 + Ax = L$; логика L *сильно узнаваема над L_0* , если существует алгоритм, который по любой конечной системе Rul схем аксиом и правил вывода узнает, верно ли соотношение $L_0 + \text{Rul} = L$.

Правило вывода *допустимо в L* , если оно сохраняет выводимость в L . Логика L *разрешима по допустимости*, если существует алгоритм для проверки допустимости правил в L .

Следующий критерий доказан в [2, 4] для $L_0 = J$, в общем случае доказательство аналогично.

Лемма 2.1. Пусть L, L_0 — конечно аксиоматизируемые J-логики, $L \supseteq L_0$.

1. L узнаваема над $L_0 \iff L$ различима над L_0 и разрешима.
2. L сильно различима над L_0 и разрешима по допустимости $\Rightarrow L$ сильно узнаваема над $L_0 \Rightarrow L$ различима над L_0 и разрешима по допустимости.

Наиболее важные J-логики узнаваемы над J , таковы логики Int , Neg , For , Od , JX [2] и многие другие. Сильно узнаваемые логики встречаются много реже, так как сильная узнаваемость влечет разрешимость по допустимости, а проблема допустимости очень сложна [9, 10].

Неизвестно, является ли логика Int сильно узнаваемой и сильно различимой над J . Ниже мы докажем, что Int сильно различима и сильно узнаваема над Od и JX .

3. РАЗЛИЧИМОСТЬ F НАД JX

Большинство наиболее важных форму различимы над J и, следовательно, над любой J -логикой. В [2] оставлен открытым вопрос о различимости над J формулы F и об узнаваемости над J логики JF . Разрешимость этой логики доказана в [5]. В этом параграфе мы докажем различимость формулы F над логикой JX .

Для доказательства мы используем алгебраическую семантику. Любое многообразие порождается своими подпрямо неразложимыми алгебрами. Напомним [11], что J -алгебра подпрямо неразложима, если и только если она имеет *опремум*, т.е. наибольший среди элементов, отличных от $\top$. Опремум алгебры $\mathbf{A}$ обозначаем $\Omega_{\mathbf{A}}$.

Лемма 3.1. [11]

Если $a \not\leq b$ в алгебре $\mathbf{A}$, то существует гомоморфизм h из $\mathbf{A}$ на подпрямо неразложимую алгебру $\mathbf{B}$ такой, что $h(a) = \top$, $h(b) = \Omega_{\mathbf{B}}$.

Обозначим через G_2 пятиэлементную J -алгебру с носителем $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, где $0 \leq x \leq 4$, 3 — опремум, 1 и 2 несравнимы, $\perp = 3$.

Теорема 3.2. *Формула F различима над JX . Более точно, для любой конечной системы аксиом Ax*

$$(JX + Ax) \vdash F \iff G_2 \not\models Ax.$$

Доказательство. Пусть $(JX + Ax) \not\models F$. Тогда существует J -алгебра $\mathbf{A}$, в которой общезначимы все формулы из $(JX + Ax)$ и опровержима F . По лемме 3.1 существует подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{B}$, удовлетворяющая $(JX + Ax)$, и в ней элементы a_1, b_1 , такие что $\perp \leq a_1 \vee b_1$, $(\perp \rightarrow a_1) \vee (\perp \rightarrow b_1) = \Omega_{\mathbf{B}}$.

Положим $a = \perp \rightarrow a_1$, $b = \perp \rightarrow b_1$. Получаем $\perp \rightarrow a = a$, $\perp \rightarrow b = b$, $a \vee b = \Omega_{\mathbf{B}}$. В частности, $\perp \not\leq a$, $\perp \not\leq b$ и кроме того, верно $a \not\leq b$, $b \not\leq a$.

Далее используем тождество $x \rightarrow y = (x \vee y) \rightarrow y$. Отсюда $a \rightarrow b = (a \vee b) \rightarrow b = \Omega_{\mathbf{B}} \rightarrow b = b$.

Аналогично, $b \rightarrow a = a$. В частности, a и b несравнимы. Получаем, что элементы множества $S = \{a \& b, a, b, a \vee b, \top\}$ различны и упорядочены так же как в алгебре G_2 .

Вспомним теперь, что $\mathbf{B}$ подпрямо неразложима и удовлетворяет формуле X . Получаем $a \leq \perp$, $b \leq \perp$, а значит,

$a \vee b = \perp$. Таким образом, множество S составляет подалгебру алгебры $\mathbf{B}$, изоморфную G_2 . Следовательно, в G_2 общезначимы все формулы из $JX + Ax$.

Обратное очевидно, так как F опровержима в G_2 .

□

4. СИЛЬНАЯ УЗНАВАЕМОСТЬ

Проблема сильной узнаваемости над логикой J рассматривалась в [4, 3]. Например, логики Neg и For сильно узнаваемы над J . В то же время проблема сильной узнаваемости логики Int над J осталась нерешенной. Поскольку Int

разрешима по допустимости [9], сильная узнаваемость вытекает из сильной различимости.

В этом параграфе мы докажем сильную различимость и сильную узнаваемость логики Int над JX и Od. Также покажем некоторые другие соотношения.

Имеет место следующая теорема о полноте.

Теорема 4.1. [4] $L_0 + Rul \vdash B \iff \mathbf{A} \models B$ для каждой алгебры $\mathbf{A}$ из $Q(L_0 + Rul)$.

Формула A различима (сильно различима) над логикой L_0 , если существует алгоритм, проверяющий для любой конечной системы Ax аксиом, выводимость A в $L_0 + Ax$ (соответственно, для любой конечной системы Rul аксиом и правил вывода, выводима ли A в $L_0 + Rul$).

Логика $L_0 + A$ различима (сильно различима) над логикой L_0 , если формула A различима (сильно различима) над L_0 .

Логика $L_0 + A$ узнаваема (сильно узнаваема) над логикой L_0 , если существует алгоритм, проверяющий для любой конечной системы Ax аксиом (соответственно, для любой конечной системы Rul аксиом и правил вывода) совпадает ли с $L_0 + A$ множество теорем исчисления $L_0 + Ax$ (соответственно, $L_0 + Rul$).

Мы установим соотношения сильной узнаваемости и сильной различимости между логиками Int, Hyb, Od и JX. Для доказательства используем найденную в [7] характеристику указанных логик посредством невложимости.

Напомним определения алгебр из [7].

Пусть $\mathbf{A}$ — J-алгебра, $a \in \mathbf{A}$. Интервал $\mathbf{A}_a$ определяется как J-алгебра с носителем $\{x \in \mathbf{A} \mid x \leq a\}$, где $\perp_{\mathbf{A}_a} = a \& \perp_{\mathbf{A}}$.

Обозначим через $M_{0,\omega}$ алгебру с носителем $\{b_n \mid 0 \leq n \leq \omega\}$, где b_0 — наименьший элемент, $b_\omega = \top$, $\perp = b_2 < b_4$, b_{2n+1} и b_{2n+2} несравнимы, $b_{2n+1} \vee b_{2n+2} = b_{2n+3}$, $b_{2n+6} = b_{2n+5} \rightarrow b_{2n+3}$.

Нетрудно видеть, что $M_{0,\omega}$ — алгебра Йохансона. Диаграмма алгебры $M_{0,\omega}$ изображена на рисунке.

Для $n \geq 0$ обозначим через $M_{0,n}$ интервал алгебры $M_{0,\omega}$ с носителем $\{b_k \mid b_k \leq b_n\}$; при этом в $M_{0,0}$ и $M_{0,1}$ определяем $\perp = b_0$, в остальных алгебрах $\perp = b_2$.

Указанные интервалы составляют, с точностью до изоморфизма, множество всех гомоморфных образов алгебры $M_{0,\omega}$.

Имеет место

Теорема 4.2. [7] Пусть $\mathbf{A}$ — J -алгебра. Тогда

1. $\mathbf{A}$ — гейтингова алгебра $\iff$ ни одна из алгебр $M_{0,2} - M_{0,\omega}$ не вложима в $\mathbf{A}$.
2. $\mathbf{A}$ — предгейтингова алгебра $\iff$ ни одна из алгебр $M_{0,4}, M_{0,5}, M_{0,7} - M_{0,\omega}$ не вложима в $\mathbf{A}$.
3. $\mathbf{A}$ — стройная алгебра $\iff$ ни одна из алгебр $M_{0,6} - M_{0,\omega}$ не вложима в $\mathbf{A}$.
4. $\mathbf{A}$ — гибридная алгебра $\iff$ ни одна из алгебр $M_{0,4} - M_{0,\omega}$ не вложима в $\mathbf{A}$.

Заметим, что $\text{Int} \supseteq \text{Hyb} \supseteq \text{Od} + \text{JX}$, Od и JX несравнимы.

- Теорема 4.3.** 1. Формула Int сильно различима над логиками Od , JX , Hyb .
 2. Формула Hyb сильно различима над логиками Od , JX .
 3. Формула JX сильно различима над логикой Od .
 4. Формула Od сильно различима над логикой JX .

Доказательство. Сразу по леммам 4.4–4.6. □

В следующих леммах выпишем алгоритмы для сильной различимости.

Лемма 4.4. 1. Формула Int сильно различима над логикой Od :

$(\text{Od} + \text{Rul}) \vdash \text{Int} \iff \text{Rul}$ опровержимо в каждой из алгебр $M_{0,2}, M_{0,3}, M_{0,6}$.

2. Формула Int сильно различима над логикой JX :

$(\text{JX} + \text{Rul}) \vdash \text{Int} \iff \text{Rul}$ опровержимо в каждой из алгебр $M_{0,2}, M_{0,3}, M_{0,4}, M_{0,5}$.

3. Формула Int сильно различима над логикой Hyb :

$(\text{Hyb} + \text{Rul}) \vdash \text{Int} \iff \text{Rul}$ опровержимо в каждой из алгебр $M_{0,2}, M_{0,3}$.

Доказательство. 1. Пусть $\text{Od} + \text{Rul} \not\geq \text{Int}$. Тогда по теореме 4.1 существует предгейтингова алгебра $\mathbf{A}$, в которой верно Rul , но опровергается Int .

По теореме 4.2 получаем, что одна из алгебр $M_{0,2}, M_{0,3}, M_{0,6}$ вложима в $\mathbf{A}$, а значит, в этой алгебре верно Rul .

Обратно. Пусть Rul верно в одной из трех алгебр. Поскольку во всех трех алгебрах верно Od и нарушается Int , получаем $\text{Od} + \text{Rul} \not\geq \text{Int}$.

2. Аналогично пункту 1.

3. Следует из 1. □

Лемма 4.5. Формула Hyb сильно различима над логиками Od , JX :

$(\text{Od} + \text{Rul}) \vdash \text{Hyb} \iff \text{Rul}$ опровержимо в алгебре $M_{0,6}$.

$(\text{JX} + \text{Rul}) \vdash \text{Hyb} \iff \text{Rul}$ опровержимо в каждой из алгебр $M_{0,4}, M_{0,5}$.

Доказательство. Аналогично лемме 4.4. □

Лемма 4.6. 1. Формула JX сильно различима над логикой Od :

$$(Od + Rul) \vdash JX \iff Rul \text{ опровержимо в алгебре } M_{0,6}.$$

2. Формула Od сильно различима над логикой JX :

$$(JX + Rul) \vdash Od \iff Rul \text{ опровержимо в каждой из алгебр } M_{0,4}, M_{0,5}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 4.4.

1. Пусть $Od + Rul \not\vdash JX$. Тогда по теореме 4.1 существует предгейтингова алгебра $\mathbf{A}$, в которой верно Rul , но опровергается JX .

По теореме 4.2 получаем, что ни одна из алгебр $M_{0,4}, M_{0,5}, M_{0,7} - M_{0,\omega}$ не вложима в $\mathbf{A}$, но одна из алгебр $M_{0,6} - M_{0,\omega}$ вложима в $\mathbf{A}$. Таким образом, $M_{0,6}$ вложима в $\mathbf{A}$, а значит, в этой алгебре верно Rul .

Обратно. Пусть Rul верно в $M_{0,6}$. Поскольку в $M_{0,6}$ верно Od и нарушается JX при $v(p) = b_1$, получаем $Od + Rul \not\vdash JX$.

2. Пусть $JX + Rul \not\vdash Od$. Тогда по теореме 4.1 существует стройная алгебра $\mathbf{A}$, в которой верно Rul , но опровергается Od .

По теореме 4.2 получаем, что ни одна из алгебр $M_{0,6} - M_{0,\omega}$ не вложима в $\mathbf{A}$, но одна из алгебр $M_{0,4}, M_{0,5}, M_{0,7} - M_{0,\omega}$ вложима в $\mathbf{A}$. Таким образом, одна из алгебр $M_{0,4}, M_{0,5}$ вложима в $\mathbf{A}$, а значит, в этой алгебре верно Rul .

Обратно. Пусть Rul верно в одной из $M_{0,4}, M_{0,5}$. Так как в $M_{0,4}, M_{0,5}$ верно JX и опровергается Od , то $JX + Rul \not\vdash Od$. □

Отметим следующее равенство.

Следствие 4.7. $H_{ub} = Od + JX$.

Доказательство. Легко видеть, что H_{ub} содержит Od и JX . Обратное включение сразу следует из леммы 4.5, так как JX опровержима в $M_{0,6}$, а значит, $Od + JX \vdash H_{ub}$. □

Теорема 4.8. Логика Int сильно различима и сильно узнаваема над логиками Od, JX, H_{ub} .

Доказательство. В [9] доказано, что логика Int разрешима по допустимости. Поэтому утверждение следует из теорем 2.1 и 4.3. □

REFERENCES

- [1] I.Johansson, *Der Minimalalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*, Compositio Mathematica, **4** (1937), 119–136.
- [2] L.L.Maksimova, V.F. Yun, *Recognizable Logics*, Algebra and Logic, **54**: 2 (2015), 167–182. Zbl 1347.03055
- [3] L.L.Maksimova, *Recognizable and Perceptible Logics and Varieties*, Algebra and Logic, **56**: 3 (2017), 245–250. MR3743577
- [4] L.L.Maksimova, V.F.Yun, *Strong Decidability and Strong Recognizability*, Algebra and Logic, **56**: 5 (2017), 370–385. MR3760474
- [5] M.V.Stukachyova, *The Disjunction Property in the Class of Paraconsistent Extensions of Minimal Logic*, Algebra and Logic, **43**: 2 (2004), 132–141. MR2072574

- [6] S. Odintsov, *Constructive negations and paraconsistency*, Series: Trends in Logic, Volume 26. Dordrecht: Springer, 2008. MR2680932
- [7] L.L. Maksimova, V.F. Yun, *Calculi over minimal logic and nonembeddability of algebras*, SEMR, **13** (2016), 704–715. MR3540769
- [8] L. Maksimova, *Strongly Decidable Properties of Modal and Intuitionistic Calculi*, Logic Journal of IGPL, **8**: 6 (2000), 797–819. MR1830528
- [9] V.V. Rybakov, *Admissibility of Logical Inference Rules*, Amsterdam, New York: Elsevier, 1997. MR1454360
- [10] S.P. Odintsov, V.V. Rybakov, *Unification and admissible rules for paraconsistent minimal Johansson's logic $\mathbf{J}$ and positive intuitionistic logic $\mathbf{IPC}^+$* , Ann. Pure Appl. Logic, **164** (2013), 771–784. MR3037551
- [11] L.L. Maksimova, *Implicit Definability and Positive Logics*, Algebra and Logic, **42**: 1 (2003), 37–53. MR1988024

LARISA L'VOVNA MAKSIMOVA
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
4, PR. KOPTYUGA AVE.,
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
2, PIROGOVA STR.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: lmaksi@math.nsc.ru

VETA FEDOROVNA YUN
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
4, PR. KOPTYUGA AVE.,
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
2, PIROGOVA STR.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: yun@math.nsc.ru