Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, Global estimates and solvability of the regularized problem of the three-dimensional unsteady motion of a viscous compressible heat-conductive multifluid, *Sib. Élektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 547–590

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.036>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 107.22.136.117

April 26, 2023, 17:22:34

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 547–590 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.036

УДК 517.95

MSC 35A05

ГЛОБАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ И РАЗРЕШИМОСТЬ
РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ О ТРЕХМЕРНОМ
НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ
ТЕПЛОПРОВОДНОЙ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ

А.Е. МАМОНТОВ, Д.А. ПРОКУДИН

ABSTRACT. We consider the initial-boundary value problem which describes unsteady motions of a viscous compressible heat-conducting multifluid in a bounded three-dimensional domain. Viscosity matrices which characterize viscous friction inside and between the multifluid constituents are supposed to have a general form (except the requirement of positive definiteness). The regularized boundary value problem is formulated and its global solvability is proved.

Keywords: global existence theorem, unsteady boundary value problem, three-dimensional flow, viscous compressible fluid, homogeneous mixture with multiple velocities and one temperature, heat-conductive fluid

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе проводится анализ разрешимости регуляризации начально-краевой задачи, моделирующей течения многокомпонентной вязкой сжимаемой жидкости (гомогенной смеси жидкостей) в рамках многоскоростного подхода. Теоретические основы моделирования таких сред заложены в [32], [39] (см. также [17], [25]). Известные на сегодняшний день результаты о разрешимости

MAMONTOV, A.E., PROKUDIN, D.A., GLOBAL ESTIMATES AND SOLVABILITY OF THE REGULARIZED PROBLEM OF THE THREE-DIMENSIONAL UNSTEADY MOTION OF A VISCOUS COMPRESSIBLE HEAT-CONDUCTIVE MULTIFLUID.

© 2019 Мамонтов А.Е., Прокудин Д.А.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-00024).

Поступила 13 марта 2019 г., опубликована 23 апреля 2019 г.

начально-краевых задач для многомерной многоскоростной модели динамики смесей затрагивают либо баротропный случай [11], [12], [13], [19], [20], [21], [23], [27], [38], либо стационарный теплопроводный случай [18].

Отдельного упоминания заслуживают одномерные модели динамики смесей, для которых возможно построение сильных решений и доказательство единственности. В рамках многоскоростного подхода такие результаты получены в работах [15], [26], [28], [29], [35], [36], [37]. Более подробные обзоры результатов по многоскоростным многокомпонентным вязким сжимаемым жидкостям (газам) можно найти в [22], [24]. Следует также отметить результаты, полученные для смежных односкоростных моделей смесей [3], [4], [7], [8], [14], [30], [31], [41].

Таким образом, к настоящему времени для нестационарных многомерных движений многокомпонентной вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости нет каких-либо результатов в многоскоростном случае. Представленная работа начинает деятельность в этом направлении.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Формулировка уравнений динамики смесей. Дана ограниченная липшицева¹ область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и число $T > 0$. Движение в Ω теплопроводной смеси из двух вязких сжимаемых жидкостей с течением времени $t \in [0, T]$ описывается следующей системой уравнений в частных производных [32], [39] (см. также [17]):

$$(2.1) \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}_i) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial(\rho_i \mathbf{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) + \nabla p_i = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \mathbf{J}_i + \rho_i \mathbf{f}_i, \quad i = 1, 2,$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^2 \mathcal{E}_i \mathbf{u}_i \right) + \operatorname{div} \left(\mathbf{q} - \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^2 p_i \mathbf{u}_i \right) = \sum_{i=1}^2 \rho_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{u}_i + \rho g.$$

Данные уравнения представляют собой соответственно математические формулировки законов сохранения массы для каждой компоненты, законов сохранения импульса для каждой компоненты и закона сохранения полной энергии для смеси. Здесь $\rho_i \geq 0$ — плотность i -й компоненты; $\rho = \rho_1 + \rho_2$ — суммарная плотность; $\mathbf{u}_i$ — скорость i -й компоненты; $\mathcal{E}_i = \frac{\rho_i |\mathbf{u}_i|^2}{2} + \rho_i e_i(\rho_i, \theta)$ — полная энергия i -й компоненты, где $e_i(\rho_i, \theta)$ — внутренняя удельная энергия i -й компоненты, $\theta > 0$ — температура смеси; $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ — суммарная полная энергия; $p_i = p_i(\rho_i, \theta)$ — давление в i -й компоненте;

$$(2.4) \quad \mathbb{S}_i = \sum_{j=1}^2 ((\lambda_{ij} \operatorname{div} \mathbf{u}_j) \mathbb{I} + 2\mu_{ij} \mathbb{D}(\mathbf{u}_j)) \\ = \sum_{j=1}^2 \left((\eta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{u}_j) \mathbb{I} + 2\mu_{ij} \left(\mathbb{D}(\mathbf{u}_j) - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \mathbf{u}_j) \mathbb{I} \right) \right)$$

¹Требования на $\partial\Omega$ будут уточняться — см. начало разделов 5 и 6.2.

— вязкая часть тензора напряжений в i -й компоненте, где $\mathbb{I}$ — единичный тензор, $\mathbb{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}((\nabla \otimes \mathbf{v}) + (\nabla \otimes \mathbf{v})^*)$ — тензор скоростей деформаций векторного поля $\mathbf{v}$ (верхний индекс $*$ означает транспонирование), а числовые коэффициенты вязкостей λ_{ij} , μ_{ij} и η_{ij} образуют следующие матрицы:

$$(2.5) \quad \mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^2 > 0, \quad \mathbf{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^2, \quad \mathbf{H} = \{\eta_{ij}\}_{i,j=1}^2 = \mathbf{\Lambda} + \frac{2}{3}\mathbf{M} \geq 0,$$

откуда в частности следует, что

$$(2.6) \quad \mathbf{N} = \{\nu_{ij}\}_{i,j=1}^2 = \mathbf{\Lambda} + 2\mathbf{M} > 0;$$

далее,

$$(2.7) \quad \mathbf{J}_i = (-1)^i a(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)$$

— приток импульса в i -ю компоненту из другой компоненты; $\mathbf{f}_i$ — плотность внешних массовых сил, действующих из внешней среды на i -ю компоненту;

$$(2.8) \quad \mathbf{q} = -k(\theta)\nabla\theta$$

— суммарный тепловой поток, k — теплопроводность; наконец, g — плотность тепловых источников внешней среды.

2.2. Определяющие уравнения. Определяющие уравнения, связывающие термодинамические параметры между собой, обязаны удовлетворять определенным ограничениям, в частности, соотношениям Гиббса

$$(2.9) \quad \theta ds_i = de_i + p_i d\left(\frac{1}{\rho_i}\right) \quad \forall \rho_i, \theta > 0, \quad i = 1, 2,$$

где $s_i = s_i(\rho_i, \theta)$ — удельная энтропия i -й компоненты, что эквивалентно соотношениям Максвелла

$$(2.10) \quad \rho_i^2 \frac{\partial e_i}{\partial \rho_i} = p_i - \theta \frac{\partial p_i}{\partial \theta}, \quad i = 1, 2,$$

а также условиям термодинамической устойчивости

$$(2.11) \quad \frac{\partial p_i}{\partial \rho_i} > 0, \quad \frac{\partial e_i}{\partial \theta} > 0, \quad i = 1, 2.$$

Замечание 1. Для гладких решений системы (2.1), (2.2), (2.3) уравнения (2.3) (ввиду (2.1), (2.2), (2.10)) можно записать в одной из следующих эквивалентных форм:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^2 \rho_i e_i + \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i e_i \mathbf{u}_i \right) + \sum_{i=1}^2 p_i \operatorname{div} \mathbf{u}_i + \operatorname{div} \mathbf{q} \\ = \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) + a|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 + \rho g, \end{aligned}$$

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^2 \rho_i s_i + \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i s_i \mathbf{u}_i \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) \\ = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta^2} + \frac{a|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2}{\theta} + \frac{\rho g}{\theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.14) \quad & \sum_{i=1}^2 \frac{\partial e_i}{\partial \theta} \left(\frac{\partial(\rho_i \theta)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \theta \mathbf{u}_i) \right) + \operatorname{div} \mathbf{q} \\
&= \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) - \theta \sum_{i=1}^2 \frac{\partial p_i}{\partial \theta} \operatorname{div} \mathbf{u}_i + a |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 + \rho g.
\end{aligned}$$

Следуя подходу, предложенному в [9], будем предполагать, что

$$(2.15) \quad p_i(\rho_i, \theta) = p_{ei}(\rho_i) + \theta p_{\theta i}(\rho_i), \quad i = 1, 2$$

с некоторыми функциями p_{ei} , $p_{\theta i}$. Тогда из (2.10) получаем

$$(2.16) \quad e_i(\rho_i, \theta) = P_{ei}(\rho_i) + Q_i(\theta), \quad i = 1, 2,$$

где

$$(2.17) \quad P_{ei}(\rho_i) = \int_1^{\rho_i} \frac{p_{ei}(z)}{z^2} dz, \quad i = 1, 2,$$

и с точностью до несущественных аддитивных констант верно представление

$$(2.18) \quad Q_i(\theta) = \int_0^\theta c_{\theta i}(z) dz, \quad i = 1, 2$$

с некоторыми функциями $c_{\theta i}$.

Условия (2.11) будут заведомо выполнены, если p'_{ei} , $p'_{\theta i}$ неотрицательны, причем p'_{ei} или $p'_{\theta i}$ положительны, а $c_{\theta i}(z) \geq c_1 = \text{const} > 0 \quad \forall z \geq 0$. Теперь из (2.9) находим

$$(2.19) \quad s_i(\rho_i, \theta) = C_{\theta i}(\theta) - P_{\theta i}(\rho_i) + s_{0i}, \quad i = 1, 2,$$

где

$$(2.20) \quad C_{\theta i}(\theta) = \int_1^\theta \frac{c_{\theta i}(z)}{z} dz, \quad P_{\theta i}(\rho_i) = \int_1^{\rho_i} \frac{p_{\theta i}(z)}{z^2} dz, \quad i = 1, 2,$$

а s_{0i} — произвольные постоянные. Уравнение (2.14) в этом случае примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
(2.21) \quad & \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) + \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) \mathbf{u}_i \right) + \operatorname{div} \mathbf{q} + \theta \sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i \\
&= \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) + a |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 + \rho g.
\end{aligned}$$

2.3. Формулировка Задачи Н. Строгая математическая формулировка задачи о движении смесей в рамках вышеописанной модели выглядит следующим образом.

Задача Н. В замыкании $\overline{Q}_T$ области $Q_T = (0, T) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — область течения, $T > 0$ — произвольное действительное число, требуется найти скалярные поля $\rho_i \geq 0$, $i = 1, 2$, $\theta > 0$ и векторные поля $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$,

удовлетворяющие системе уравнений (2.1), (2.2), (2.21) и следующим начальным и краевым условиям:

$$(2.22) \quad \rho_i|_{t=0} = \rho_{0i}, \quad \mathbf{u}_i|_{t=0} = \mathbf{u}_{0i}, \quad i = 1, 2, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0,$$

$$(2.23) \quad \mathbf{u}_i|_{(0,T) \times \partial\Omega} = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$(2.24) \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = L(t, \mathbf{x}, \theta) \quad \text{на} \quad (0, T) \times \partial\Omega.$$

Здесь ρ_{0i} (начальные плотности), $\mathbf{u}_{0i}$ (начальные скорости), θ_0 (начальная температура) — заданные функции; величина граничного теплообмена (внешней теплопроводности) L задана как функция от времени, пространственной переменной и неизвестной температуры; $\mathbf{n}$ — внешняя единичная нормаль к границе $\partial\Omega$ области Ω .

Замечание 2. Строго говоря, начальные условия должны быть заданы в терминах $\rho_i(0, \cdot)$, $(\rho_i \mathbf{u}_i)(0, \cdot)$ и $\rho_i Q_i(\theta)(0, \cdot)$, однако математически более удобно работать с начальными условиями, записанными в форме (2.22).

Замечание 3. И с физической точки зрения, и с математических позиций необходимо обеспечить неотрицательность производства энтропии. Общая энтропия системы

$$(2.25) \quad S = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \rho_i s_i d\mathbf{x}$$

должна не убывать со временем в случае, когда система термодинамически замкнута, т. е. когда $g = 0$ и $L = 0$. В общем (термодинамически незамкнутом) случае из (2.8), (2.13), (2.23) и (2.24) получаем

$$(2.26) \quad \frac{dS}{dt} = \int_{\Omega} \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \frac{a|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2}{\theta} d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} \frac{k(\theta)|\nabla\theta|^2}{\theta^2} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \frac{\rho g}{\theta} d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \frac{L(t, \mathbf{x}, \theta)}{\theta} d\sigma.$$

Таким образом, достаточно потребовать выполнения условий на коэффициенты

$$(2.27) \quad k \geq 0, \quad a \geq 0,$$

а также следующего условия для тензоров вязких напряжений:

$$(2.28) \quad \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) \geq 0.$$

Однако в рамках условий на матрицы вязкостей, перечисленных в (2.5), выполнение (2.28) очевидно, ввиду равенства

$$(2.29) \quad \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) = \\ = \sum_{i,j=1}^2 \left(\eta_{ij} (\operatorname{div} \mathbf{u}_i) (\operatorname{div} \mathbf{u}_j) + 2\mu_{ij} \left(\mathbb{D}(\mathbf{u}_i) - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \mathbf{u}_i) \mathbb{I} \right) : \left(\mathbb{D}(\mathbf{u}_j) - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \mathbf{u}_j) \mathbb{I} \right) \right).$$

Кроме того, из условий (2.5) (см. (2.6)), в силу (2.23), следует весьма важное с математических позиций неравенство

$$(2.30) \quad \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \mathbf{u}_i) d\mathbf{x} \geq B_0 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla \otimes \mathbf{u}_i|^2 d\mathbf{x}$$

с некоторой положительной постоянной $B_0 = B_0(\mathbf{A}, \mathbf{M})$.

2.4. Условия на определяющие функции. На функции $p_{ei}, p_{\theta i}$ будем налагать следующие условия:

$$(2.31) \quad \begin{cases} p_{ei}, p_{\theta i} \in C^1[0, \infty), & p_{ei}(0) = p_{\theta i}(0) = 0, & i = 1, 2, \\ \frac{1}{c_2} z^{\gamma-1} \leq p'_{ei}(z) \leq c_2 z^{\gamma-1} + c_3 & \forall z \geq 0, & i = 1, 2, \\ p_{\theta i}(z) \leq c_4(1 + z^{\frac{\gamma}{3}}) & \forall z \geq 0, & i = 1, 2, \\ p'_{\theta i}(z) > 0 & \forall z \geq 0, & i = 1, 2, \end{cases}$$

где $c_2 = \text{const} \geq 1$, $c_3, c_4 = \text{const} > 0$, $\gamma = \text{const} > 3$. О функции k будем предполагать следующее:

$$(2.32) \quad \begin{cases} k \in C^2[0, \infty), \\ \frac{1}{c_5}(1 + z^m) \leq k(z) \leq c_5(1 + z^m) & \forall z \geq 0, \\ c_5 = \text{const} \geq 1, & m = \text{const} \geq 2. \end{cases}$$

Относительно функций $c_{\theta i}$ (см. (2.18)) примем следующие гипотезы:

$$(2.33) \quad \begin{cases} c_{\theta i} \in C^1[0, \infty), & i = 1, 2, \\ \frac{1}{c_6}(1 + z^{\frac{m}{2}-1}) \leq c_{\theta i}(z) \leq c_6(1 + z^{\frac{m}{2}-1}) & \forall z \geq 0, & i = 1, 2, \\ c_6 = \text{const} \geq 1. \end{cases}$$

Наконец, на функцию L будем налагать следующие требования:

$$(2.34) \quad \begin{cases} L \in C([0, T] \times \partial\Omega \times \mathbb{R}), & L \geq 0 & \text{в } [0, T] \times \partial\Omega \times \mathbb{R}, \\ \forall \theta_1, \theta_2, & \theta_1 \leq \theta_2 & \implies L(\cdot, \cdot, \theta_1) \leq L(\cdot, \cdot, \theta_2). \end{cases}$$

Замечание 4. Для удобства будем считать L продолженной по $(t, \mathbf{x})$, и в результате

$$(2.35) \quad L \in C(\mathbb{R}^5).$$

Замечание 5. Из (2.17) и (2.31) следует, что при всех $i = 1, 2$ и $z \geq 0$

$$(2.36) \quad \frac{1}{c_2\gamma} z^\gamma \leq p_{ei}(z) \leq \frac{c_2}{\gamma} z^\gamma + c_3 z,$$

$$(2.37) \quad B_1 z^\gamma - B_2 \leq z p_{ei}(z) \leq B_3 z^\gamma + B_4,$$

где $B_1 = B_1(c_2, c_3, \gamma)$, $B_2 = B_2(c_2, c_3, \gamma)$, $B_3 = B_3(c_2, c_3, \gamma)$, $B_4 = B_4(c_2, c_3, \gamma)$. Из (2.20) и (2.31) нетрудно получить, что при всех $i = 1, 2$ и $z \geq 0$

$$(2.38) \quad -B_5 \leq z p_{\theta i}(z) \leq B_6 z^{\frac{\gamma}{3}} + B_7,$$

где $B_5 = B_5(c_4, \gamma)$, $B_6 = B_6(c_4, \gamma)$, $B_7 = B_7(c_4, \gamma)$. Наконец, из (2.18), (2.20) и (2.33) следует, что при всех $i = 1, 2$ и $z > 0$

$$(2.39) \quad C_{\theta i}(z) \leq Q_i(z) - Q_i(1),$$

$$(2.40) \quad B_8(c_6, m) \left(z + z^{\frac{m}{2}} \right) \leq Q_i(z) \leq B_9(c_6, m) z^{\frac{m}{2}} + B_{10}(c_6, m).$$

Кроме того, заметим что $\forall z > 0$ верно, ввиду (2.20), (2.33) и (2.40), что

$$(2.41) \quad C_{\theta i}(z) + \frac{1}{c_6} |\ln z| \leq B_{11}(B_8, c_6, m) Q_i(z), \quad i = 1, 2.$$

Замечание 6. Приведем простейший пример ситуации, когда предположения на давления и энергии выполнены:

$$(2.42) \quad p_{ei}(\rho_i) = \rho_i^\gamma, \quad p_{\theta i}(\rho_i) = \rho_i, \quad c_{\theta i}(\theta) = 1 + \theta^{\frac{m}{2}-1}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда из (2.15)–(2.20) следует, что

$$p_i(\rho_i, \theta) = \rho_i^\gamma + \rho_i \theta, \quad e_i(\rho_i, \theta) = \frac{\rho_i^{\gamma-1}}{\gamma-1} + \theta + \frac{2}{m} \theta^{\frac{m}{2}} - \frac{1}{\gamma-1}, \quad i = 1, 2,$$

$$s_i(\rho_i, \theta) = \ln \left(\frac{\theta}{\rho_i} \right) + \frac{2}{m-2} \theta^{\frac{m}{2}-1} + s_{0i} - \frac{2}{m-2}, \quad m > 2, \quad i = 1, 2,$$

$$s_i(\rho_i, \theta) = \ln \left(\frac{\theta^2}{\rho_i} \right) + s_{0i}, \quad m = 2, \quad i = 1, 2.$$

Условия (2.31), (2.33) очевидно выполнены, а уравнение (2.14) в этом случае примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & (1 + \theta^{\frac{m}{2}-1}) \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial(\rho_i \theta)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \theta \mathbf{u}_i) \right) + \operatorname{div} \mathbf{q} + \theta \sum_{i=1}^2 \rho_i \operatorname{div} \mathbf{u}_i = \\ & = \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) + a |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 + \rho g. \end{aligned}$$

При предположениях (2.42) с $m = 2$ в стационарном случае существование слабых решений соответствующей краевой задачи доказано в [18].

2.5. Условия на входные данные. Начальные данные в Задаче $\mathcal{H}$ будем брать из класса

$$(2.43) \quad \rho_{0i} \in L_\gamma(\Omega), \quad \rho_{0i} \geq 0, \quad \theta_0 \in L_\infty(\Omega), \quad \inf_\Omega \theta_0 > 0, \quad \mathbf{u}_{0i} \in L_\infty(\Omega), \quad i = 1, 2,$$

а на внешние силы и источники наложим следующие требования:

$$(2.44) \quad \mathbf{f}_i \in L_\infty(Q_T), \quad i = 1, 2, \quad g \in L_\infty(Q_T), \quad g \geq 0.$$

3. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Сформулируем априорные оценки классических решений Задачи $\mathcal{H}$ в случае, когда система термодинамически замкнута, т. е. $g = 0$ и $L = 0$, причем плотности неотрицательны, а температура положительна. В дальнейшем на эти оценки нет прямых ссылок, но их формулировка и доказательство существенно облегчают понимание процесса доказательства существования слабого решения посредством построения решений приближенных задач.

3.1. Энергетические неравенства и предварительные оценки плотностей. Интегрируя уравнения (2.1) по области Ω и учитывая начальные и граничные условия (2.22), (2.23), приходим к равенствам

$$(3.1) \quad \|\rho_i\|_{L_1(\Omega)} = M_i \quad \forall t \in [0, T] \\ \implies \|\rho_i\|_{L_\infty(0, T; L_1(\Omega))} = M_i, \quad \text{где } M_i = \|\rho_{0i}\|_{L_1(\Omega)}, \quad i = 1, 2.$$

Интегрируя равенство (2.3) сначала по Ω , а затем по времени от 0 до t , получим с учетом (2.22)–(2.24) соотношение баланса полной энергии всей смеси

$$(3.2) \quad \int_{\Omega} \mathcal{E} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathcal{E}_0 d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \int_{\Omega} \rho_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{f}_i d\mathbf{x} d\tau,$$

где $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}|_{t=0}$. Из (3.2), используя неравенство Коши и (2.16), (2.37), (2.44), (3.1), приходим к

$$(3.3) \quad \int_{\Omega} \mathcal{E} d\mathbf{x} \leq \|\mathcal{E}_0\|_{L_1(\Omega)} + 2B_2 T |\Omega| \max_{1 \leq i \leq 2} \left\{ \|\mathbf{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}^2 \right\} + \frac{T}{2} (M_1 + M_2) \\ + \max_{1 \leq i \leq 2} \left\{ \|\mathbf{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}^2 \right\} \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{E} d\mathbf{x} d\tau,$$

откуда, используя неравенство Гронуолла, получаем оценку²

$$(3.4) \quad \int_{\Omega} \mathcal{E} d\mathbf{x} \leq B_{12} (B_2, T, \|\mathcal{E}_0\|_{L_1(\Omega)}, \{M_i\}, \{\|\mathbf{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\}, |\Omega|).$$

Из (3.4), в свою очередь, ввиду (2.37), вытекают следующие априорные оценки:

$$(3.5) \quad \sum_{i=1}^2 \|\rho_i\|_{L_\infty(0, T; L_\gamma(\Omega))} \leq B_{13} (B_1, B_2, B_{12}, \gamma),$$

$$(3.6) \quad \sum_{i=1}^2 \left(\|\sqrt{\rho_i} \mathbf{u}_i\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))} + \|\rho_i Q_i(\theta)\|_{L_\infty(0, T; L_1(\Omega))} \right) \leq B_{14} (B_2, B_{12}).$$

Из последних двух неравенств и (2.31), (2.40) следует, что

$$(3.7) \quad \sum_{i=1}^2 \|\rho_i \mathbf{u}_i\|_{L_\infty(0, T; L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))} + \|\rho \theta^{\frac{m}{2}}\|_{L_\infty(0, T; L_1(\Omega))} \\ + \sum_{i=1}^2 \|p_{\theta i}(\rho_i)\|_{L_\infty(0, T; L_3(\Omega))} \leq B_{15},$$

где $B_{15} = B_{15} (B_8, B_{13}, B_{14}, c_4, \gamma, |\Omega|)$.

²Здесь и далее $|E|$ означает лебегову меру множества E .

3.2. Предварительные оценки температуры. Проинтегрируем (2.26) по времени от 0 до t , получим

$$(3.8) \quad \int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) d\mathbf{x} d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} \frac{a|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2}{\theta} d\mathbf{x} d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} \frac{k(\theta)|\nabla\theta|^2}{\theta^2} d\mathbf{x} d\tau = S - S_0,$$

где $S_0 = S|_{t=0}$ (см. (2.19) и (2.25)). Ввиду (2.27) (см. также (2.32)) и (2.28) все слагаемые в левой части (3.8) неотрицательны. Для правой части (3.8), учитывая (2.19), (2.25), (2.38), (2.41), (3.1), (3.6), получаем оценку

$$(3.9) \quad S - S_0 \leq -\frac{1}{c_6} \int_{\Omega} \rho |\ln \theta| d\mathbf{x} + B_{16} (B_5, B_{11}, B_{14}, S_0, \{M_i\}, \{s_{0i}\}, |\Omega|).$$

Таким образом, из (3.8) и (3.9), в силу (2.32), следует априорная оценка

$$(3.10) \quad \|\nabla \ln \theta\|_{L_2(Q_T)} + \|\nabla \theta^{\frac{m}{2}}\|_{L_2(Q_T)} + \|\rho \ln \theta\|_{L_{\infty}(0,T;L_1(\Omega))} \leq B_{17}(B_{16}, c_5, c_6, m).$$

Согласно Лемме 3.2 в [9], стр. 47 и (3.1), (3.5), (3.7), (3.10) имеют место неравенства

$$(3.11) \quad \|\ln \theta\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq B_{18}(B_{13}, B_{17}, \{M_i\}, \gamma) \left(\|\nabla \ln \theta\|_{L_2(\Omega)}^2 + 1 \right),$$

$$(3.12) \quad \|\theta^{\frac{m}{2}}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq B_{19}(B_{13}, B_{15}, \{M_i\}, \gamma) \left(\|\nabla \theta^{\frac{m}{2}}\|_{L_2(\Omega)}^2 + 1 \right),$$

интегрируя которые по t от 0 до T , приходим с учетом (3.10) к оценке

$$(3.13) \quad \|\ln \theta\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|\theta^{\frac{m}{2}}\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \leq B_{20}(B_{17}, B_{18}, B_{19}, T),$$

а значит, в силу ограниченности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_6(\Omega)$, к оценке

$$(3.14) \quad \|\ln \theta\|_{L_2(0,T;L_6(\Omega))} + \|\theta\|_{L_m(0,T;L_{3m}(\Omega))} \leq B_{21}(B_{20}, m, \Omega),$$

из которой в частности следует ограниченность $\theta p_{\theta i}(\rho_i)$, $i = 1, 2$ в пространстве $L_m(0, T; L_{\frac{3m}{m+1}}(\Omega))$. Действительно, т. к.

$$\|\theta p_{\theta i}(\rho_i)\|_{L_{\frac{3m}{m+1}}(\Omega)} \leq \|\theta\|_{L_{3m}(\Omega)} \|p_{\theta i}(\rho_i)\|_{L_3(\Omega)}, \quad i = 1, 2,$$

то из (3.7) и (3.14) получаем требуемое:

$$(3.15) \quad \|\theta p_{\theta i}(\rho_i)\|_{L_m(0,T;L_{\frac{3m}{m+1}}(\Omega))} \leq B_{22}(B_{15}, B_{21}), \quad i = 1, 2.$$

3.3. Оценки скоростей. Теперь проинтегрируем (2.21) сначала по Ω , а затем по времени от 0 до t , получим

$$(3.16) \quad \sum_{i=1}^2 \int_0^t \int_{\Omega} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) d\mathbf{x} d\tau + a \int_0^t \int_{\Omega} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 d\mathbf{x} d\tau \\ = \sum_{i=1}^2 \int_0^t \int_{\Omega} \theta p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i d\mathbf{x} d\tau + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \rho_i Q_i(\theta) d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \rho_{0i} Q_i(\theta_0) d\mathbf{x},$$

откуда, в силу (2.30), (3.6) и (3.15), следует, что

$$(3.17) \quad \sum_{i=1}^2 \int_{Q_T} |\nabla \otimes \mathbf{u}_i|^2 d\mathbf{x} dt \leq B_{23} (B_0, B_{14}, B_{22}, m, T, |\Omega|).$$

Используя неравенство Пуанкаре и (2.23), из (3.17) получаем следующую априорную оценку:

$$(3.18) \quad \sum_{i=1}^2 \|\mathbf{u}_i\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \leq B_{24} (B_{23}, \Omega)$$

и, в силу ограниченности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_6(\Omega)$,

$$(3.19) \quad \sum_{i=1}^2 \|\mathbf{u}_i\|_{L_2(0,T;L_6(\Omega))} \leq B_{25} (B_{24}, \Omega).$$

Тогда из (3.5), (3.7) и (3.19) вытекает, что

$$(3.20) \quad \sum_{i=1}^2 \left(\|\rho_i \mathbf{u}_i\|_{L_2(0,T;L_{\frac{6\gamma}{\gamma+6}}(\Omega))} + \|\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i\|_{L_2(0,T;L_{\frac{6\gamma}{4\gamma+3}}(\Omega))} \right) \leq B_{26} (B_{13}, B_{15}, B_{25}).$$

3.4. Улучшенная оценка температуры. Обоснуем слабую ограниченность третьего слагаемого в левой части (2.21) (см. (2.8)):

$$(3.21) \quad \operatorname{div} \mathbf{q} = -\Delta \mathcal{K}(\theta), \quad \text{где} \quad \mathcal{K}(\theta) = \int_0^{\theta} k(z) dz,$$

т. е. покажем ограниченность температуры θ в пространстве $L_{m+1}(Q_T)$ (см. (2.32)).

Для этого сначала умножим уравнение (2.21) на $\theta^{-\sigma_1}$ с некоторым $0 < \sigma_1 < 1$ и проинтегрируем результат по Q_T , получим с учетом (2.1), (2.8), (2.18), (2.23), (2.24), равенство

$$\begin{aligned}
(3.22) \quad & \sigma_1 \int_{Q_T} \frac{k(\theta)|\nabla\theta|^2}{\theta^{\sigma_1+1}} d\mathbf{x}dt \\
&= \sum_{i=1}^2 \int_{Q_T} \theta^{1-\sigma_1} p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i d\mathbf{x}dt + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left[\rho_i \left(\int_1^{\theta} \frac{c_{\theta i}(z)}{z^{\sigma_1}} dz \right) \right]_{t=0}^{t=T} d\mathbf{x} \\
&\quad - \int_{Q_T} \frac{1}{\theta^{\sigma_1}} \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) d\mathbf{x}dt - a \int_{Q_T} \frac{|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2}{\theta^{\sigma_1}} d\mathbf{x}dt.
\end{aligned}$$

Последние два слагаемых в правой части (3.22) неположительны. Первое слагаемое в правой части (3.22), используя неравенство Гёльдера и (2.31), (3.5), (3.14), (3.17), оценим следующим образом:

$$\begin{aligned}
(3.23) \quad & \sum_{i=1}^2 \int_{Q_T} \theta^{1-\sigma_1} p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i d\mathbf{x}dt \leq \\
&\leq B_{27}(c_4, |\Omega|) \left(1 + \sum_{i=1}^2 \|\rho_i\|_{L_{\infty}(0,T;L_{\gamma}(\Omega))}^{\frac{2}{3}} \right) \times \\
&\times \|\theta\|_{L_{2(1-\sigma_1)}(0,T;L_{6(1-\sigma_1)}(\Omega))}^{1-\sigma_1} \sum_{i=1}^2 \|\nabla \otimes \mathbf{u}_i\|_{L_2(Q_T)} \leq \\
&\leq B_{28}(B_{13}, B_{21}, B_{23}, B_{27}, T, m, \gamma, \sigma_1, |\Omega|).
\end{aligned}$$

Поскольку при всех $i = 1, 2$ и $z > 0$ (см. (2.18))

$$\int_1^z \frac{c_{\theta i}(s)}{s^{\sigma_1}} ds \leq Q_i(z),$$

то для второго слагаемого в правой части (3.22) получаем, в силу (2.33), (3.6), оценку

$$(3.24) \quad \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left[\rho_i \left(\int_1^{\theta} \frac{c_{\theta i}(z)}{z^{\sigma_1}} dz \right) \right]_{t=0}^{t=T} d\mathbf{x} \leq B_{29}(B_{14}, \{M_i\}, c_6, m, \sigma_1).$$

Таким образом, из (3.22), ввиду (2.32), (3.23), (3.24), следует, что

$$(3.25) \quad \int_{Q_T} |\nabla \theta^{\frac{m+1-\sigma_1}{2}}|^2 d\mathbf{x}dt \leq B_{30}(B_{28}, B_{29}, c_5, m, \sigma_1).$$

Далее, заметим, что из (2.1), (2.22), (2.23), (3.5) и неравенства Гёльдера при всех $t \in [0, T]$ вытекают неравенства

$$(3.26) \quad M_1 - \sigma_2 |\Omega| \leq \int_{\{\Omega: \rho_1 \geq \sigma_2\}} \rho_1 d\mathbf{x} \leq B_{13} |\{\Omega: \rho_1 \geq \sigma_2\}|^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

откуда получаем, что

$$(3.27) \quad |\{\Omega : \rho_1 \geq \sigma_2\}| \geq B_{31}(B_{13}, M_1, \sigma_2, \gamma, |\Omega|) > 0, \quad \sigma_2 \in \left(0, \frac{M_1}{|\Omega|}\right).$$

Теперь заметим, что из неравенства Гёльдера, (3.7) и (3.14) следует оценка³

$$(3.28) \quad \int_0^T \left(\int_{\{\Omega: \rho_1 \geq \sigma_2\}} \theta^{\frac{m+1-\sigma_1}{2}} d\mathbf{x} \right)^2 dt \leq B_{32}(B_{15}, B_{21}, T, m, \sigma_1, \sigma_2),$$

которая позволяет с помощью обобщенного неравенства Пуанкаре (см. [10], Теорема 10.14, стр. 327) и (3.25), (3.27), (3.28) заключить, что

$$(3.29) \quad \left\| \theta^{\frac{m+1-\sigma_1}{2}} \right\|_{L_2(0, T; W_2^1(\Omega))} \leq B_{33}(B_{30}, B_{31}, B_{32})$$

и, в силу ограниченности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_6(\Omega)$,

$$(3.30) \quad \|\theta\|_{L_{m+1-\sigma_1}(0, T; L_{3(m+1-\sigma_1)}(\Omega))} \leq B_{34}(B_{33}, m, \sigma_1, \Omega).$$

Выбирая $\sigma_1 = \frac{1}{3}$ и используя неравенство Гёльдера, (3.7) и (3.30), приходим к оценке

$$(3.31) \quad \int_0^T \int_{\{\Omega: \rho_1 \geq \sigma_2\}} \theta^{m+1} d\mathbf{x} dt \leq B_{35}(B_{15}, B_{34}, T, m, \sigma_2).$$

Далее, рассмотрим следующую задачу Неймана для уравнения Пуассона:

$$(3.32) \quad \Delta \eta = G(\rho_1) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} G(\rho_1) d\mathbf{x} \quad \text{в } \Omega,$$

$$\nabla \eta \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad \int_{\Omega} \eta d\mathbf{x} = 0,$$

в которой $G \in C^\infty(\mathbb{R})$, $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(3.33) \quad G(z) = \begin{cases} 0, & z \leq \sigma_2, \\ \text{невозр.}, & \sigma_2 < z < 2\sigma_2, \\ -1, & z \geq 2\sigma_2, \end{cases}$$

а σ_2 — фикс. число из интервала $\left(0, \frac{M_1}{2|\Omega|}\right)$, например, $\sigma_2 = \frac{M_1}{4|\Omega|}$. Отметим, что при фиксации σ_2 можно иметь $|G'(s)| + |G'(s)s - G(s)| \leq B_{36}$, и тогда из (3.5), (3.19) имеем оценку

$$\|\rho_1 \mathbf{u}_1\|_{L_2(Q_T)} \leq B_{37}(B_{13}, B_{25}, \gamma, |\Omega|),$$

а значит из уравнения (2.1) для ρ_1 следует, что

$$\left\| \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right\|_{L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))} \leq B_{37},$$

³Оптимальным (максимальным) показателем степени интеграла в оценке (3.28) является $\frac{5m}{3(1-\sigma_1)} > 2$, но для применения далее неравенства Пуанкаре в силу (3.25) нам нужен (достаточен) именно показатель 2.

и, поэтому, в силу (2.1), (2.23), (3.17), (3.32), приходим к оценке

$$(3.34) \quad \left\| \Delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \leq B_{38}(B_{23}, B_{36}, B_{37}).$$

Для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ имеем неравенство

$$(3.35) \quad \left| \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} \right| \leq \left\| \Delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Т. к. произвольную функцию $\mathbf{h} \in L_2(\Omega)$ можно представить в виде (см., например, [5]) $\mathbf{h} = \nabla \varphi + \mathbf{w}$, $\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \nabla \xi \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \xi \in W_2^1(\Omega),$$

и при этом $\|\nabla \varphi\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\mathbf{h}\|_{L_2(\Omega)}$, то из (3.35) следует, что при всех $\mathbf{h} \in L_2(\Omega)$

$$(3.36) \quad \left| \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{h} \, d\mathbf{x} \right| \leq B_{39}(\Omega) \left\| \Delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \|\mathbf{h}\|_{L_2(\Omega)},$$

что вместе с неравенством Пуанкаре и (3.32), (3.34) влечет оценку⁴

$$(3.37) \quad \left\| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \leq B_{40}(B_{38}, \Omega).$$

Возьмем в качестве пробной функции для слабой (интегральной) записи уравнения (2.21) функцию $\varphi = \psi \eta$, где $\psi \in C_0^\infty(0, T)$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\|\psi'\|_{L_1(0,T)} \leq 4$, а η — решение задачи (3.32), получим с учетом (3.21) равенство

$$(3.38) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \int_{\{\Omega: \rho_1 < \sigma_2\}} \psi \mathcal{K}(\theta) \left(G(\rho_1) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} G(\rho_1) \, d\mathbf{x} \right) d\mathbf{x} dt \\ &= - \int_0^T \int_{\{\Omega: \rho_1 \geq \sigma_2\}} \psi \mathcal{K}(\theta) \left(G(\rho_1) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} G(\rho_1) \, d\mathbf{x} \right) d\mathbf{x} dt \\ & - \int_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) \right) \psi \eta \, d\mathbf{x} dt - a \int_{Q_T} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 \psi \eta \, d\mathbf{x} dt + \\ & + \int_{Q_T} \left(\theta \sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i \right) \psi \eta \, d\mathbf{x} dt - \int_{Q_T} \psi \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) \mathbf{u}_i \right) \cdot \nabla \eta \, d\mathbf{x} dt \\ & - \int_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) \right) \frac{d\psi}{dt} \eta \, d\mathbf{x} dt - \int_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) \right) \psi \frac{\partial \eta}{\partial t} \, d\mathbf{x} dt. \end{aligned}$$

⁴Ср. раздел 6.1.

Левую часть равенства (3.38), благодаря (3.33), оценим снизу следующим образом:

$$(3.39) \quad \int_0^T \int_{\{\Omega: \rho_1 < \sigma_2\}} \psi \mathcal{K}(\theta) \left(G(\rho_1) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} G(\rho_1) d\mathbf{x} \right) d\mathbf{x} dt \\ \geq \frac{\left| \left\{ \Omega : \rho_1 \geq \frac{M_1}{2|\Omega|} \right\} \right|}{|\Omega|} \int_0^T \int_{\{\Omega: \rho_1 < \sigma_2\}} \psi \mathcal{K}(\theta) d\mathbf{x} dt.$$

Теперь оценим сверху каждое слагаемое в правой части (3.38):

$$(3.40) \quad - \int_0^T \int_{\{\Omega: \rho_1 \geq \sigma_2\}} \psi \mathcal{K}(\theta) \left(G(\rho_1) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} G(\rho_1) d\mathbf{x} \right) d\mathbf{x} dt \\ \leq B_{41} (B_{35}, c_5, T, m, |\Omega|)$$

(здесь использовались неравенство Юнга и формулы (2.32), (3.21), (3.31), (3.33));

$$(3.41) \quad - \int_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) \right) \psi \eta d\mathbf{x} dt - a \int_{Q_T} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 \psi \eta d\mathbf{x} dt \\ \leq B_{42} (B_{23}, B_{25}, \mathbf{A}, \mathbf{M}, a, \Omega)$$

(здесь применялись неравенство Коши, стандартные оценки для эллиптических уравнений⁵, ограниченность вложения $W_{\sigma_3}^2(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$, где $\sigma_3 > \frac{3}{2}$, а также (2.4), (3.17), (3.18), (3.32), (3.33));

$$(3.42) \quad \int_{Q_T} \left(\theta \sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i \right) \psi \eta d\mathbf{x} dt \leq B_{43} (B_{22}, B_{23}, T, m, \Omega)$$

(здесь мы прибегали к неравенству Коши, стандартным оценкам для эллиптических уравнений, ограниченности вложения $W_{\sigma_3}^2(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ и (3.15), (3.17));

$$(3.43) \quad - \int_{Q_T} \psi \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) \mathbf{u}_i \right) \cdot \nabla \eta d\mathbf{x} dt - \int_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) \right) \frac{d\psi}{dt} \eta d\mathbf{x} dt \leq B_{44},$$

где $B_{44} = B_{44}(B_9, B_{10}, B_{13}, B_{14}, B_{21}, B_{25}, T, \gamma, \Omega)$ (в этом месте применялись стандартные оценки для эллиптических уравнений, неравенство Гёльдера, ограниченность вложений $W_{\sigma_3}^2(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ и $W_{\sigma_4}^2(\Omega)$ в $C^1(\overline{\Omega})$, где $\sigma_4 > 3$, а также (2.40), (3.5), (3.6), (3.14), (3.19));

$$(3.44) \quad - \int_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) \right) \psi \frac{\partial \eta}{\partial t} d\mathbf{x} dt \leq B_{45} (B_9, B_{10}, B_{13}, B_{21}, B_{40}, T, \gamma, \Omega)$$

⁵См., например, [10], стр. 308.

(здесь применялись неравенство Гёльдера, ограниченность вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_6(\Omega)$, а также (2.40), (3.5), (3.14), (3.37)). Таким образом, из (3.38), благодаря (2.32), (3.21), (3.39)–(3.44), следует неравенство

$$(3.45) \quad \int_0^T \int_{\{\Omega: \rho_1 < \sigma_2\}} \psi \theta^{m+1} d\mathbf{x} dt \leqslant B_{46} \left(B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44}, B_{45}, c_5, m, |\Omega|, \left| \left\{ \Omega : \rho_1 \geqslant \frac{M_1}{2|\Omega|} \right\} \right| \right),$$

выбирая в котором в качестве тестовых функций ψ функции ψ_q , такие, что $\psi_q \in C_0^\infty(0, T)$, $0 \leqslant \psi_q \leqslant 1$, $\psi_q = 1$ при $t \in \left[\frac{1}{q}, T - \frac{1}{q} \right]$, $|\psi_q'| \leqslant 2q$, $q \in \mathbb{N}$, после чего переходя к пределу по $q \rightarrow +\infty$, приходим, ввиду (3.31), к требуемой априорной оценке

$$(3.46) \quad \|\theta\|_{L_{m+1}(Q_T)} \leqslant B_{47}(B_{35}, B_{46}, m).$$

Замечание 7. Оценку (3.46) можно получить из (3.31) и (3.45) с ρ_1 и σ_2 замененными на ρ_2 и $\sigma_5 = \frac{M_2}{4|\Omega|}$ соответственно, однако, в силу специфики уравнений неразрывности (2.1), невозможно вместо ρ_1 использовать суммарную плотность ρ .

3.5. Улучшенные оценки плотностей и давлений. В заключение данного раздела получим дополнительные оценки для давлений p_i и плотностей ρ_i . Ренормализация уравнений (2.1) приводит к равенствам

$$\frac{\partial \rho_i^{\sigma_6}}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho_i^{\sigma_6} \mathbf{u}_i) - (\sigma_6 - 1) \rho_i^{\sigma_6} \operatorname{div} \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2,$$

из которых следует

$$(3.47) \quad \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial t} = -(\mathcal{B} \circ \operatorname{div})(\rho_i^{\sigma_6} \mathbf{u}_i) - (\sigma_6 - 1) \mathcal{B}(\rho_i^{\sigma_6} \operatorname{div} \mathbf{u}_i), \quad i = 1, 2,$$

где $\mathbf{w}_i = \mathcal{B}(\rho_i^{\sigma_6})$, $\sigma_6 > 0$, а $\mathcal{B}$ — это оператор Боговского, определяемый следующим образом. Значение $\mathbf{v} = \mathcal{B}y$ оператора $\mathcal{B}$ на скалярной функции y , заданной в Ω , есть решение задачи

$$(3.48) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = y - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} y d\mathbf{x} \quad \text{в } \Omega, \quad \mathbf{v} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Ясно, что решение (3.48) не единственно, но существуют способы выбора единственного решения ([10], стр. 315–316) таким образом, чтобы оператор $\mathcal{B}$ обладал следующими свойствами:

- $\|\mathcal{B}y\|_{W_{\sigma_8}^{\sigma_7+1}(\Omega)} \leqslant B_{48}(\sigma_7, \sigma_8, \Omega) \|y\|_{W_{\sigma_8}^{\sigma_7}(\Omega)}$ для всех $\sigma_8 \in (1, +\infty)$ и $\sigma_7 = -1, 0, 1, 2, \dots$;
- $(\mathcal{B}y)_t = \mathcal{B}y_t$;
- оператор $\mathcal{B} \circ \operatorname{div}$ ограничен⁶ в $L_{\sigma_9}(\Omega)$ для всех $\sigma_9 \in (1, +\infty)$.

⁶Это свойство, впрочем, вытекает из первого.

Из (3.5), (3.17), (3.19) и неравенства Гёльдера при $\sigma_6 < \frac{\gamma}{2}$ получаем

$$(3.49) \quad \|\rho_i^{\sigma_6}\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{\gamma}{\sigma_6}}(\Omega))} + \|\rho_i^{\sigma_6} \operatorname{div} \mathbf{u}_i\|_{L_2(0,T;L_{\frac{2\gamma}{\gamma+2\sigma_6}}(\Omega))} \\ + \|\rho_i^{\sigma_6} \mathbf{u}_i\|_{L_2(0,T;L_{\frac{6\gamma}{\gamma+6\sigma_6}}(\Omega))} \leq B_{49}, \quad i = 1, 2,$$

где $B_{49} = B_{49}(B_{13}, B_{23}, B_{25}, \sigma_6)$. Тогда из свойств оператора $\mathcal{B}$, ограниченности вложения $W_{\frac{\gamma}{\sigma_6}}^1(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$, $W_{\frac{2\gamma}{\gamma+2\sigma_6}}^1(\Omega)$ в $L_{\frac{6\gamma}{\gamma+6\sigma_6}}(\Omega)$ и (3.47), (3.49) следуют при $\sigma_6 < \frac{\gamma}{3}$ оценки

$$(3.50) \quad \|\mathbf{w}_i\|_{L_\infty(Q_T)} + \left\| \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;L_{\frac{6\gamma}{\gamma+6\sigma_6}}(\Omega))} + \|\nabla \otimes \mathbf{w}_i\|_{L_\infty(0,T;L_{\frac{\gamma}{\sigma_6}}(\Omega))} \\ \leq B_{50}, \quad i = 1, 2,$$

где $B_{50} = B_{50}(B_{48}, B_{49}, \sigma_6, \gamma, \Omega)$. Умножая уравнения (2.2) на $\mathbf{w}_i$ и интегрируя по Q_T , получим тождества

$$(3.51) \quad \int_{Q_T} p_i \rho_i^{\sigma_6} d\mathbf{x} dt = \frac{1}{|\Omega|} \int_{Q_T} p_i \left(\int_{\Omega} \rho_i^{\sigma_6} d\mathbf{x} \right) d\mathbf{x} dt \\ + \int_{\Omega} \rho_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{w}_i d\mathbf{x} \Big|_{t=0}^{t=T} - \int_{Q_T} \rho_i \mathbf{u}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial t} d\mathbf{x} dt \\ - \int_{Q_T} \mathbf{w}_i \cdot (\mathbf{J}_i + \rho_i \mathbf{f}_i) d\mathbf{x} dt + \int_{Q_T} (\mathbb{S}_i - \rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) : (\nabla \otimes \mathbf{w}_i) d\mathbf{x} dt, \quad i = 1, 2.$$

Оценим сверху все слагаемые в правой части (3.51): из (2.15), (2.36), (3.1), (3.5), (3.15) получаем

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{Q_T} p_i \left(\int_{\Omega} \rho_i^{\sigma_6} d\mathbf{x} \right) d\mathbf{x} dt$$

$$\leq B_{51}(B_{13}, B_{22}, \{M_i\}, T, c_2, c_3, m, \gamma, \sigma_6, |\Omega|), \quad i = 1, 2;$$

из (3.7), (3.50) следует, что

$$\int_{\Omega} \rho_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{w}_i d\mathbf{x} \Big|_{t=0}^{t=T} \leq B_{52}(B_{15}, B_{50}, \|\rho_{0i} \mathbf{u}_{0i}\|_{L_1(\Omega)}, \gamma, |\Omega|), \quad i = 1, 2;$$

далее из (3.20), (3.50) при $\sigma_6 < \frac{2\gamma}{3} - 1$ получаем, что

$$- \int_{Q_T} \rho_i \mathbf{u}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial t} d\mathbf{x} dt \leq B_{53}(B_{26}, B_{50}, \sigma_6, \gamma, |\Omega|), \quad i = 1, 2;$$

также из (2.7), (2.44), (3.1), (3.19), (3.50) приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} \mathbf{w}_i \cdot (\mathbf{J}_i + \rho_i \mathbf{f}_i) d\mathbf{x} dt \\ & \leq B_{54} (B_{25}, B_{50}, \{\|\mathbf{f}_i\|_{L^\infty(Q_T)}\}, \{M_i\}, T, a, |\Omega|), \quad i = 1, 2; \end{aligned}$$

наконец, из (2.4), (3.17), (3.20), (3.50) при $\sigma_6 < \frac{2\gamma-3}{6}$ следуют оценки

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} (\mathbb{S}_i - \rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) : (\nabla \otimes \mathbf{w}_i) d\mathbf{x} dt \\ & \leq B_{55} (B_{23}, B_{26}, B_{50}, \mathbf{A}, \mathbf{M}, T, \sigma_6, \gamma, |\Omega|), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Из полученных оценок следует ограниченность слагаемых в правых частях (3.51), что позволяет заключить

$$(3.52) \quad \int_{Q_T} p_i \rho_i^{\sigma_6} d\mathbf{x} dt \leq B_{56} (B_{51}, B_{52}, B_{53}, B_{54}, B_{55}).$$

В итоге, используя (2.15), (2.36), получаем неравенства

$$(3.53) \quad \int_{Q_T} \rho_i^{\sigma_{10}} d\mathbf{x} dt + \int_{Q_T} \theta \rho_i^{\sigma_6} p_{\theta i}(\rho_i) d\mathbf{x} dt \leq B_{57} (B_{56}, c_2, \gamma) \\ \forall \sigma_6 < \frac{2\gamma-3}{6}, \quad \sigma_{10} < \frac{8\gamma-3}{6}, \quad i = 1, 2.$$

4. ФОРМУЛИРОВКА ПРИБЛИЖЕННОЙ ЗАДАЧИ $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,v}$

Зададим произвольно числа $q \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon \leq 1$, $0 < \delta \leq 1$, $0 < v \leq 1$ и рассмотрим приближенную **Задачу** $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,v}$ для функций ρ_i , $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$, θ (все эти функции зависят от параметров q , ε , δ и v , но пока для краткости опустим соответствующие индексы).

4.1. Уравнения неразрывности. Вместо (2.1) будем рассматривать уравнения

$$(4.1) \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}_i) = \varepsilon \Delta \rho_i, \quad i = 1, 2$$

с краевыми условиями

$$(4.2) \quad \nabla \rho_i \cdot \mathbf{n}|_{(0,T) \times \partial\Omega} = 0, \quad i = 1, 2,$$

а вместо (2.22) для плотностей поставим условия

$$(4.3) \quad \rho_i|_{t=0} = \rho_{0i}^\delta, \quad i = 1, 2$$

с некоторыми функциями $\rho_{0i}^\delta \in C^{2+\sigma_{11}}(\bar{\Omega})$, $0 < \sigma_{11} < 1$ такими, что⁷

$$(4.4) \quad \nabla \rho_{0i}^\delta \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \inf_{\Omega} \rho_{0i}^\delta > 0, \quad \rho_{0i}^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \rho_{0i} \quad \text{в } L_\gamma(\Omega), \quad i = 1, 2.$$

⁷Например, можно положить $\rho_{0i}^\delta = (\varphi_\delta \rho_{0i}) * \tilde{\zeta}_\delta + \delta$, где $\tilde{\zeta}_\delta$ — усредняющее ядро класса $C^3(\mathbb{R}^3)$, а φ_δ — срезающая функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, равная нулю в δ -окрестности $\partial\Omega$ и равная единице за пределами 2δ -окрестности $\partial\Omega$.

4.2. Уравнение энергии. Вместо (2.21) будем рассматривать уравнение

$$(4.5) \quad \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^2 (\rho_i + v) Q_i(\theta) + \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i Q_i(\theta) \mathbf{u}_i \right) + \operatorname{div} \mathbf{q} + \theta \sum_{i=1}^2 p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i \\ + \delta \theta^{m+1} = (1 - \delta) \sum_{i=1}^2 \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i) + a |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 + \rho g^\delta,$$

а вместо (2.22) для температуры и (2.24) поставим соответственно условия

$$(4.6) \quad \theta|_{t=0} = \theta_0^\delta$$

и

$$(4.7) \quad k(\theta) \nabla \theta \cdot \mathbf{n} + L^\delta(t, \mathbf{x}, \theta) = 0 \quad \text{на} \quad (0, T) \times \partial\Omega,$$

с некоторой функцией $\theta_0^\delta \in C^{2+\sigma_{12}}(\overline{\Omega})$, $0 < \sigma_{12} < 1$ такой, что⁸

$$(4.8) \quad k(\theta_0^\delta) \nabla \theta_0^\delta \cdot \mathbf{n} + L^\delta(0, \mathbf{x}, \theta_0^\delta) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \\ \inf_{\Omega} \theta_0^\delta > 0, \quad \theta_0^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \theta_0 \quad \text{в} \quad L_1(\Omega)$$

и функциями g^δ , L^δ определенными следующим образом⁹:

$$(4.9) \quad g^\delta \in C^1(\overline{Q_T}), \quad g^\delta \geq 0, \quad g^\delta \rightarrow g \quad \text{в} \quad L_{\sigma_{13}}(Q_T) \quad \forall \sigma_{13} < +\infty,$$

$$(4.10) \quad L^\delta \in C^2(\mathbb{R}^5), \quad L^\delta \geq 0, \quad L^\delta \rightarrow L \quad \text{в} \quad C(K) \quad \forall K \subset \mathbb{R}^5 \quad (K - \text{компакт}), \\ L^\delta(\cdot, \cdot, \theta) \text{ не убывает по } \theta.$$

4.3. Уравнения импульсов. Обозначим $X_q = \operatorname{Lin} \{ \psi_i \}_{i=1}^q \subset L_2(\Omega)$, где $\{ \psi_i \}_{i=1}^\infty$ — базис в $W_2^1(\Omega)$, ортонормированный в $L_2(\Omega)$, состоящий из гладких функций, имеющих компактный носитель в области Ω , для определенности норму в X_q положим равной норме в $L_2(\Omega)$. Обозначим через P_q ортогональный проектор из $L_2(\Omega)$ в X_q , и положим

$$\mathcal{M}_\xi = P_q(\xi(\cdot)) : X_q \rightarrow X_q, \quad \text{где} \quad \xi \in L_\infty(\Omega).$$

Легко видеть, что

$$(\mathcal{M}_\xi(\mathbf{u}), \mathbf{v})_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \xi \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X_q,$$

⁸Например, можно положить $\theta_0^\delta = (\varphi_\delta \theta_0) * \tilde{\zeta}_\delta + \delta$, где $\tilde{\zeta}_\delta$ — усредняющее ядро класса $C^3(\mathbb{R}^3)$, а φ_δ — срезающая функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, равная нулю в δ -окрестности $\partial\Omega$ и равная единице за пределами 2δ -окрестности $\partial\Omega$.

⁹Например, g^δ , L^δ — это усреднения от g , $L\psi_\delta$ с ядрами классов $C^1(\mathbb{R}^4)$, $C^2(\mathbb{R}^5)$ соответственно, где ψ_δ — это срезающая функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^4)$, равная нулю в δ -окрестности $\{t=0\} \times \partial\Omega$ и равная единице за пределами 2δ -окрестности $\{t=0\} \times \partial\Omega$. На данном этапе нет необходимости обеспечивать условие согласования в (4.8), а это нужно только для задачи (5.3)–(5.5), что и сделано в условии (5.6). Однако для ясности оказалось удобнее заранее обеспечить условие согласования в (4.8) за счет конструкции описанной после (4.10).

и для всех $\xi > 0$ оператор $\mathcal{M}_\xi$ обратим. Вместо (2.2) будем рассматривать уравнения для $\mathbf{u}_i \in C([0, T], X_q)$

$$(4.11) \quad \frac{\partial(\rho_i \mathbf{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) + \nabla p_i + \varepsilon(\nabla \otimes \mathbf{u}_i)^* \nabla \rho_i \\ = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \mathbf{J}_i + \rho_i \mathbf{f}_i + \mathbf{h}_i, \quad i = 1, 2,$$

где $\mathbf{h}_i \perp C_0^1([0, T], X_q)$ в $L_2(Q_T)$. Условия (2.22) для скоростей и (2.23) остаются прежними с точностью до проектирования на X_q . А именно, вместо прежних начальных условий положим

$$(4.12) \quad \mathbf{u}_i|_{t=0} = \mathcal{M}_{\rho_{0i}^\delta}^{-1} P_q(\rho_{0i}^\delta \mathbf{u}_{0i}) \in X_q.$$

Тогда легко проверить, что

$$(4.13) \quad \rho_i \mathbf{u}_i|_{t=0} - \rho_{0i}^\delta \mathbf{u}_{0i} \in X_q^\perp.$$

В интегральной записи описанные факты означают, что для любых пробных функций $\varphi_i \in C_0^1([0, T], X_q)$ справедливы равенства

$$(4.14) \quad \int_{Q_T} \left(\rho_i \mathbf{u}_i \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + (\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) : (\nabla \otimes \varphi_i) + p_i \operatorname{div} \varphi_i + (\mathbf{J}_i + \rho_i \mathbf{f}_i) \cdot \varphi_i \right) dx dt \\ = \int_{Q_T} (\varepsilon[(\nabla \otimes \mathbf{u}_i) \varphi_i] \cdot \nabla \rho_i + \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \varphi_i)) dx dt - \int_{\Omega} \rho_{0i}^\delta \mathbf{u}_{0i} \cdot \varphi_i|_{t=0} dx, \quad i = 1, 2.$$

Сформулированную задачу (4.1)–(4.14) будем называть *Задачей* $\mathcal{H}^{q, \varepsilon, \delta, v}$.

4.4. План предельного перехода по параметрам q , ε , δ и v . Доказательство разрешимости Задачи $\mathcal{H}$ проводится по следующей схеме:

- Доказать разрешимость поставленной приближенной задачи при фиксированных q , ε , δ и v ;
- Перейти к пределу при $q \rightarrow +\infty$, получив, в частности, в пределе уравнения (4.11) без слагаемых $\mathbf{h}_i$;
- Перейти к пределу по малым параметрам: сначала $\varepsilon \rightarrow 0$, потом $\delta \rightarrow 0$, и наконец $v \rightarrow 0$ (возможно, однако, при этом будет $\delta = \varepsilon$ или даже $v = \delta = \varepsilon$);
- На каждом этапе получать оценки решений, не зависящие от того параметра, по которому предполагается предельный переход.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАЗРЕШИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННОЙ ЗАДАЧИ $\mathcal{H}^{q, \varepsilon, \delta, v}$

5.1. Выражение плотностей через скорости. Из теории параболических уравнений известно (см. [10], Лемма 3.1, стр. 54 и [34], Предложение 7.39, стр. 345), что если Ω — ограниченная область класса $C^{2+\sigma_{14}}$, $\sigma_{14} \in (0, 1)$ и $\mathbf{u}_i \in C([0, T]; X_q)$, $i = 1, 2$ заданы, то:

- существуют единственные классические решения (4.1)–(4.3), т. е. $\rho_i \in V_{[0,T]}$, $i = 1, 2$, где

$$V_{[0,T]} = \left\{ \rho \mid \rho \in C([0,T]; C^{2+\sigma_{15}}(\bar{\Omega})), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \in C([0,T]; C^{\sigma_{15}}(\bar{\Omega})) \right\};$$

- отображения $\mathcal{S}_i : \mathbf{u}_i \mapsto \rho_i$, $i = 1, 2$, ограничены из $C([0,T]; X_q)$ в $V_{[0,T]}$ с нормой B_{58} и непрерывны со значениями в $C^1([0,T] \times \bar{\Omega})$;
- для всех $t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $i = 1, 2$ верна оценка

$$(5.1) \quad \left(\inf_{\Omega} \rho_{0i}^{\delta} \right) \exp \left(- \|\operatorname{div} \mathbf{u}_i\|_{L_1(0,t;L_{\infty}(\Omega))} \right)$$

$$\leq \rho_i(t, \mathbf{x})$$

$$\leq \left(\sup_{\Omega} \rho_{0i}^{\delta} \right) \exp \left(\|\operatorname{div} \mathbf{u}_i\|_{L_1(0,t;L_{\infty}(\Omega))} \right);$$

- если $\|\mathbf{u}_i^k\|_{L_{\infty}(0,T;W_{\infty}^1(\Omega))} \leq B_{59}$, $i, k = 1, 2$, то при всех $t \in [0, T]$

$$\|(\mathcal{S}_i(\mathbf{u}_i^1) - \mathcal{S}_i(\mathbf{u}_i^2))(t)\|_{L_2(\Omega)}$$

(5.2)

$$\leq B_{60}(B_{59}, T, \varepsilon) t \|\rho_{0i}^{\delta}\|_{W_2^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_i^1 - \mathbf{u}_i^2\|_{L_{\infty}(0,T;W_{\infty}^1(\Omega))}, \quad i = 1, 2.$$

5.2. Постановка приближенной задачи о выражении температуры через плотности и скорости с дополнительным параметром ω и ее разрешимость. Нам предстоит доказать, что при известных $\mathbf{u}_i \in C([0, T]; X_q)$, $\rho_i = \mathcal{S}_i(\mathbf{u}_i)$, $i = 1, 2$ существует единственное сильное положительное решение θ задачи (4.5)–(4.7).

Для этого введем еще один малый параметр¹⁰ $\omega \in (0, \min\{1, T\})$ и рассмотрим следующую задачу¹¹:

$$(5.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^2 ([\rho_i]^{\omega} + v) [Q_i(\theta)]^{\omega} + \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^2 [\rho_i \mathbf{u}_i]^{\omega} [Q_i(\theta)]^{\omega} \right) - \operatorname{div}([k(\theta)]^{\omega} \nabla \theta)$$

$$+ \theta \sum_{i=1}^2 [p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i]^{\omega} + \delta [\theta^{m+1}]^{\omega}$$

$$= (1 - \delta) \sum_{i=1}^2 [\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i)]^{\omega} + a[|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2]^{\omega} + [\rho g^{\delta}]^{\omega},$$

¹⁰Решение θ соответствующей приближенной задачи зависит от ω и потому будет обозначаться θ^{ω} , однако для краткости индекс ω будет опускаться до формулы (5.37).

¹¹Наша цель — построить сильное решение задачи (4.5)–(4.7). В связи с отсутствием в литературе общих теорем для того рода ситуаций мы вынуждены проводить дополнительную регуляризацию и пользоваться теоремой о классической разрешимости из [16]. Для этого в частности приходится временно обеспечивать дополнительные условия (например, гладкость входных данных, условие согласования начальных и краевых условий), которые по отношению к исходной задаче являются искусственными и лишними. Некоторые из этих действий мы начали проводить заранее, еще при введении параметра δ — см. (4.8)₁, (4.9)₁, (4.10)₁.

$$(5.4) \quad \theta|_{t=0} = \theta_0^{\delta, \omega},$$

$$(5.5) \quad [k(\theta)]^\omega \nabla \theta \cdot \mathbf{n} + [L^\delta(t, \mathbf{x}, \theta)]^\omega = 0 \quad \text{на} \quad (0, T) \times \partial\Omega,$$

где смысл операции $[\cdot]^\omega$ будет объяснен позже¹². При этом начальная функция $\theta_0^{\delta, \omega}$ предполагается удовлетворяющей краевому условию (5.5), т. е. (ср. (4.7))

$$(5.6) \quad [k(\theta_0^{\delta, \omega})]^\omega \nabla \theta_0^{\delta, \omega} \cdot \mathbf{n} + [L^\delta(0, \mathbf{x}, \theta_0^{\delta, \omega})]^\omega = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Задача (5.3)–(5.5) представляет собой смешанную начально–краевую задачу для квазилинейного уравнения параболического типа и, как мы обоснуем ниже, имеет единственное классическое решение при определенных ограничениях на данные задачи и скобки $[\cdot]^\omega$.

Для конкретизации скобок $[\cdot]^\omega$ введем функцию¹³ π_ω и операцию¹⁴ $(\cdot)_\omega$ по формулам:

$$(5.7) \quad \pi_\omega(z) = \frac{\sqrt{z^2 + \omega^2}}{1 + \omega\sqrt{z^2 + \omega^2}}, \quad h_\omega(z) = (h * \zeta_\omega)(z) := \int_{\mathbb{R}} \zeta_\omega(z-s)h(s)ds,$$

где $\zeta_\omega(z) = \frac{1}{\omega}\zeta\left(\frac{z}{\omega}\right)$, а функция $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такова, что $\text{supp } \zeta \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\zeta(-x) = \zeta(x) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \zeta(z)dz = 1$, $\zeta(z)$ — неубывающая при $z \geq 0$. Заметим, что

$$(5.8) \quad 0 \leq z\pi'_\omega(z) \leq \frac{|z|}{(1 + \omega|z|)^2} \leq \min \left\{ \frac{1}{4\omega}, |z| \right\}.$$

Теперь в (5.3)–(5.5) примем, что

$$(5.9) \quad [k(\theta)]^\omega := (k)_\omega(\pi_\omega(\theta)), \quad [\theta^{m+1}]^\omega := (\pi_\omega(\theta) - \pi_\omega(0))^{m+1}, \quad \theta_0^{\delta, \omega} := \theta_0^\delta,$$

$$(5.10) \quad [c_{\theta i}(\theta)]^\omega := (c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(\theta)), \quad [Q_i(\theta)]^\omega := \int_0^\theta [c_{\theta i}(z)]^\omega dz, \\ [L^\delta(t, \mathbf{x}, \theta)]^\omega := L^\delta(t, \mathbf{x}, \pi_\omega(\theta)),$$

¹²Точнее, это не операция, т. к. имеет разный смысл для разных величин, входящих в (5.3)–(5.5).

¹³Заметим, что $\pi_\omega(z) \in \left[\frac{\omega}{1+\omega^2}, \frac{1}{\omega}\right)$, причем $\pi_\omega(z) < |z| + 1$ всегда, и $\pi_\omega(z) > \frac{|z|}{2}$ при $|z| < \frac{1}{\omega}$.

¹⁴В [9], стр. 60 также используется операция продолжения типа $\phi[h](z) = \begin{cases} h(z), & z > 0, \\ h(0), & z \leq 0, \end{cases}$ но она, по всей видимости, нужна только для того, чтобы при усреднении $(\cdot)_\omega$ придать смысл ситуации малых $\pi_\omega(z)$, мы же решаем эту проблему за счет согласования радиуса усреднения $\frac{\omega}{2}$ с тем фактом, что $\pi_\omega(z) > \frac{\omega}{2}$ всегда.

(5.11)

$$\begin{aligned}
[\rho_i]^\omega(\cdot, \mathbf{x}) &:= (\Pi \rho_i)_\omega(\cdot, \mathbf{x}), \quad [\rho_i \mathbf{u}_i]^\omega(\cdot, \mathbf{x}) := (\Pi \rho_i)_\omega(\cdot, \mathbf{x})(\Pi \mathbf{u}_i)_\omega(\cdot, \mathbf{x}), \\
[p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i]^\omega(\cdot, \mathbf{x}) &:= (\Pi(p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i))_\omega(\cdot, \mathbf{x}), \\
&\left((1 - \delta) \sum_{i=1}^2 [\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i)]^\omega + a[|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2]^\omega + [\rho g^\delta]^\omega \right)(\cdot, \mathbf{x}) \\
&:= \left((1 - \delta) \sum_{i=1}^2 \Pi(\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i)) + a \Pi(|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2) \right)_\omega(\cdot, \mathbf{x}) + (\Pi \rho)_\omega(\cdot, \mathbf{x}) g^\delta(\cdot, \mathbf{x}),
\end{aligned}$$

где Π — это любое непрерывное продолжение скалярной или вектор-функции от $t \in [0, T]$ на отрезок $\left[-\frac{T}{2}, \frac{3T}{2}\right]$, такое, чтобы свойство положительности функций сохранялось после продолжения и усреднения, например¹⁵,

$$\Pi f(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} f(t, \mathbf{x}), & t \in [0, T], \\ f(-t, \mathbf{x}), & t \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right), \\ f(2T - t, \mathbf{x}), & t \in \left(T, \frac{3T}{2}\right]. \end{cases}$$

Предложенная конструкция скобок $[\cdot]^\omega$ и перечисленные выше требования (см. формулы (4.8), (4.9), (4.10) и сноски к ним) обеспечивают выполнение (5.6).

По Теореме 8 Раздела 6.2 задача (5.3)–(5.5) при допущениях (5.9)–(5.11) имеет единственное решение (см. Разделы 6.2 и 6.3)

$$(5.12) \quad \theta \in C^{1+\frac{\sigma_{23}}{2}, 2+\sigma_{23}}([0, T] \times \overline{\Omega})$$

(здесь $\sigma_{23} = \sigma_{12}$ — см. раздел 6.3, проверка условия (III), и свойства θ_0^δ перед (4.8)).

Наша дальнейшая цель — получить равномерные по ω оценки и на их основе совершить предельный переход в (5.3)–(5.5) при $\omega \rightarrow 0$. Сначала получим оценки снизу и сверху для температуры $\theta = \theta^\omega$.

5.3. Оценки приближенной температуры θ^ω сверху и снизу.

5.3.1. *Эквивалентный вид приближенного уравнения энергии с дополнительным параметром ω .* Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
E_{\omega i}(t, \mathbf{x}, \theta) &= (\Pi \rho_i)_\omega \left(\int_0^\theta (c_{\theta i})_\omega(\pi_\omega(z)) dz \right), \\
\mathcal{K}_\omega(\theta) &= \int_0^\theta (k)_\omega(\pi_\omega(z)) dz, \\
F_\omega(t, \mathbf{x}, \theta) &= \left((1 - \delta) \sum_{i=1}^2 \Pi(\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i)) + a \Pi(|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2) \right)_\omega + (\Pi \rho)_\omega g^\delta
\end{aligned}$$

¹⁵При указанных выше свойствах ядра ζ и описанной конструкции оператора Π очевидно, что если $f > c_7$ в Q_T , то и $(\Pi f)_\omega > c_7$ в Q_T .

$$\begin{aligned}
& -\theta \sum_{i=1}^2 (\Pi(p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i))_{\omega} - \delta(\pi_{\omega}(\theta) - \pi_{\omega}(0))^{m+1} \\
& - \sum_{i=1}^2 (\Pi \rho_i)_{\omega} \left(\int_0^{\theta} (c_{\theta i})_{\omega}(\pi_{\omega}(z)) dz \right) \operatorname{div}((\Pi \mathbf{u}_i)_{\omega})
\end{aligned}$$

и перепишем уравнение (5.3) в виде

$$\begin{aligned}
(5.13) \quad & v \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{\theta} (c_{\theta i})_{\omega}(\pi_{\omega}(z)) dz \right) \\
& + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial E_{\omega i}}{\partial t} + \nabla E_{\omega i} \cdot (\Pi \mathbf{u}_i)_{\omega} \right) - \Delta \mathcal{K}_{\omega} = F_{\omega}.
\end{aligned}$$

5.3.2. Постоянные суб-решения и супер-решения. Заметим, что ввиду соотношений $E_{\omega i}(t, \mathbf{x}, 0) = 0$, $\mathcal{K}_{\omega}(0) = 0$, $F_{\omega}(t, \mathbf{x}, 0) \geq 0$ функция $\underline{\theta} = 0$ является суб-решением¹⁶ уравнения (5.13). С другой стороны, $\bar{\theta} = \text{const} > 0$ будет супер-решением уравнения (5.13) если и только если

$$\begin{aligned}
(5.14) \quad & (\pi_{\omega}(\bar{\theta}) - \pi_{\omega}(0))^{m+1} \geq \frac{1}{\delta} \left((1 - \delta) \sum_{i=1}^2 \Pi(\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i)) + a \Pi(|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2) \right)_{\omega} \\
& + \frac{1}{\delta} (\Pi \rho)_{\omega} g^{\delta} - \frac{\bar{\theta}}{\delta} \sum_{i=1}^2 (\Pi(p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i))_{\omega} \\
& - \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^{\bar{\theta}} (c_{\theta i})_{\omega}(\pi_{\omega}(z)) dz \right) \left(\frac{\partial (\Pi \rho_i)_{\omega}}{\partial t} + \operatorname{div}((\Pi \rho_i)_{\omega} (\Pi \mathbf{u}_i)_{\omega}) \right),
\end{aligned}$$

а поскольку¹⁷

$$\begin{aligned}
(5.15) \quad & [\text{левая часть (5.14)}] > \left(\frac{\bar{\theta}}{12} \right)^{m+1} \quad \text{при} \quad 1 < \bar{\theta} < \frac{1}{\omega}, \\
& [\text{правая часть (5.14)}] \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\theta}}{12} \right)^{m+1} + B_{61},
\end{aligned}$$

где $B_{61} = B_{61} \left(\left\{ \|\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i)\|_{L_{\infty}(Q_T)} \right\}, \left\{ \|\mathbf{u}_i\|_{L_{\infty}(Q_T)} \right\}, \left\{ \|\rho_i\|_{W_{\infty}^1(Q_T)} \right\}, \right. \\ \left. \|g^{\delta}\|_{L_{\infty}(Q_T)}, a, m, c_6, \delta, \left\{ \|p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i\|_{L_{\infty}(Q_T)} \right\}, \left\{ \|\operatorname{div} \mathbf{u}_i\|_{L_{\infty}(Q_T)} \right\} \right),$
то для (5.14) достаточно потребовать

$$(5.16) \quad \bar{\theta} \in \left(\max \left\{ 1, 12(2B_{61})^{\frac{1}{m+1}} \right\}, \frac{1}{\omega} \right),$$

¹⁶Как обычно, под суб-решением (или супер-решением) уравнения (5.13) понимается функция, которая после подстановки в (5.13) вместо знака «=» дает знак «≤» (или «≥»).

¹⁷См. Лемму 16 в разделе 6.4.

что возможно при следующем дополнительном ограничении¹⁸ на ω :

$$(5.17) \quad \omega < \omega_0, \quad \text{где} \quad \omega_0 = \text{const} \in \left(0, \frac{1}{\max \left\{ 1, 12(2B_{61})^{\frac{1}{m+1}} \right\}} \right).$$

5.3.3. *Переменные суб-решения и супер-решения, единственность и оценка решения приближенной задачи с дополнительным параметром ω .* Покажем, что если $\underline{\theta}$ и $\bar{\theta}$ являются сильными неотрицательными (вообще говоря, переменными) суб- и супер-решениями задачи¹⁹ (5.3)–(5.5) такими, что

$$(5.18) \quad \underline{\theta}|_{t=0} \leq \bar{\theta}|_{t=0},$$

то тогда

$$(5.19) \quad \underline{\theta} \leq \bar{\theta} \quad \text{в} \quad \bar{Q}_T.$$

Действительно, т. к. $\underline{\theta}$ и $\bar{\theta}$ являются суб- и супер-решениями уравнения (5.13), то имеет место неравенство

$$(5.20) \quad \begin{aligned} & v \int_{\Omega} h(\underline{\theta} - \bar{\theta}) \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^2 \left(\int_{\bar{\theta}}^{\underline{\theta}} (c_{\theta i})_{\omega}(\pi_{\omega}(z)) dz \right) d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} h(\underline{\theta} - \bar{\theta}) \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^2 (E_{\omega i}(t, \mathbf{x}, \underline{\theta}) - E_{\omega i}(t, \mathbf{x}, \bar{\theta})) d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} h(\underline{\theta} - \bar{\theta}) \sum_{i=1}^2 \nabla (E_{\omega i}(t, \mathbf{x}, \underline{\theta}) - E_{\omega i}(t, \mathbf{x}, \bar{\theta})) \cdot (\Pi \mathbf{u}_i)_{\omega} d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} h(\underline{\theta} - \bar{\theta}) \Delta (\mathcal{K}_{\omega}(\bar{\theta}) - \mathcal{K}_{\omega}(\underline{\theta})) d\mathbf{x} \\ & \leq \int_{\Omega} h(\underline{\theta} - \bar{\theta}) |F_{\omega}(t, \mathbf{x}, \underline{\theta}) - F_{\omega}(t, \mathbf{x}, \bar{\theta})| d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

где h — функция Хевисайда, т. е.

$$(5.21) \quad h(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

Заметим, что

$$(5.22) \quad h(\varphi(t, \mathbf{x}, \underline{\theta}) - \varphi(t, \mathbf{x}, \bar{\theta})) = h(\underline{\theta} - \bar{\theta}) \quad \text{для всех возрастающих } \varphi(t, \mathbf{x}, \cdot),$$

$$(5.23) \quad \partial [h(\underline{\theta} - \bar{\theta}) (\psi(t, \mathbf{x}, \underline{\theta}) - \psi(t, \mathbf{x}, \bar{\theta}))] = h(\underline{\theta} - \bar{\theta}) (\partial \psi(t, \mathbf{x}, \underline{\theta}) - \partial \psi(t, \mathbf{x}, \bar{\theta}))$$

для всех $\psi \in C^1$,

¹⁸Тем самым $\omega \in (0, \min\{1, T, \omega_0\})$.

¹⁹Т. е. это суб- и супер-решения уравнения (5.3)=(5.13), удовлетворяющие (5.5), а также (5.4) — каждое со своим начальным условием.

$$(5.24) \quad h(\underline{\theta} - \bar{\theta}) |F_{\omega}(t, \mathbf{x}, \underline{\theta}) - F_{\omega}(t, \mathbf{x}, \bar{\theta})| \leq \\ \leq B_{62} h(\underline{\theta} - \bar{\theta}) \sum_{i=1}^2 (E_{\omega i}(t, \mathbf{x}, \underline{\theta}) - E_{\omega i}(t, \mathbf{x}, \bar{\theta})),$$

$$\text{где } B_{62} = B_{62} \left(\left\{ \|\Pi(p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i)\|_{L_{\infty}(Q_T)} \right\}, \left\{ \|\Pi \rho_i\|_{L_{\infty}(Q_T)} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \|\operatorname{div}(\Pi \mathbf{u}_i)\|_{L_{\infty}(Q_T)} \right\}, \|\underline{\theta}\|_{L_{\infty}(Q_T)}, \|\bar{\theta}\|_{L_{\infty}(Q_T)}, \left\{ \inf_{Q_T} (\Pi \rho_i)_{\omega} \right\}, m, c_6 \right),$$

а также, что²⁰

$$(5.25) \quad \int_{\Omega} h(\underline{\theta} - \bar{\theta}) \Delta (\mathcal{K}_{\omega}(\underline{\theta}) - \mathcal{K}_{\omega}(\bar{\theta})) d\mathbf{x} \leq \\ \leq \int_{\partial\Omega} h(\underline{\theta} - \bar{\theta}) \nabla (\mathcal{K}_{\omega}(\underline{\theta}) - \mathcal{K}_{\omega}(\bar{\theta})) \cdot \mathbf{n} d\sigma \leq 0.$$

Поэтому из (5.20) после интегрирования от 0 до t с учетом (5.22) и (5.23) получаем неравенство

$$(5.26) \quad v \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} h(\underline{\theta} - \bar{\theta}) \left(\int_{\frac{\underline{\theta}}{\bar{\theta}}}^{\frac{\theta}{\bar{\theta}}} (c_{\theta i})_{\omega}(\pi_{\omega}(z)) dz \right) d\mathbf{x} + \\ + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} h(\underline{\theta} - \bar{\theta}) (E_{\omega i}(t, \mathbf{x}, \underline{\theta}) - E_{\omega i}(t, \mathbf{x}, \bar{\theta})) d\mathbf{x} \leq \\ \leq B_{63} \left(B_{62}, \left\{ \|\operatorname{div}(\Pi \mathbf{u}_i)\|_{L_{\infty}(Q_T)} \right\} \right) \times \\ \times \sum_{i=1}^2 \int_0^t \int_{\Omega} h(\underline{\theta} - \bar{\theta}) (E_{\omega i}(\tau, \mathbf{x}, \underline{\theta}) - E_{\omega i}(\tau, \mathbf{x}, \bar{\theta})) d\mathbf{x} d\tau,$$

откуда непосредственно следует (5.19).

Из (5.19) следует единственность решения задачи (5.3)–(5.5) и оценка (см. (5.16))

$$(5.27) \quad 0 \leq \theta(t, \mathbf{x}) \leq \bar{\theta}, \quad \forall \bar{\theta} \in \left(\max \left\{ 1, 12(2B_{61})^{\frac{1}{m+1}}, \sup_{\Omega} \theta_0^{\delta} \right\}, \frac{1}{\omega} \right).$$

5.4. Дальнейшие оценки приближенной температуры θ^{ω} . Умножим уравнение (5.3)–(5.13) на θ и проинтегрируем результат по Q_t , получим равенство

²⁰Первое неравенство здесь выводится применением (5.22) к $\varphi(t, \mathbf{x}, \theta) = \mathcal{K}_{\omega}(\theta)$ и Леммы 17 из раздела 6.4 к функции $v = \mathcal{K}_{\omega}(\underline{\theta}) - \mathcal{K}_{\omega}(\bar{\theta})$, второе неравенство следует из (5.5) и монотонности $[L^{\delta}(t, \mathbf{x}, \cdot)]^{\omega}$ (см. (4.10) и (5.10)).

$$\begin{aligned}
(5.28) \quad & \sum_{i=1}^2 \int_0^t \int_{\Omega} \theta \frac{\partial \theta}{\partial \tau} ((\Pi \rho_i)_{\omega} + v)(c_{\theta i})_{\omega}(\pi_{\omega}(\theta)) d\mathbf{x} d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Omega} (k)_{\omega}(\pi_{\omega}(\theta)) |\nabla \theta|^2 d\mathbf{x} d\tau - \\
& - \sum_{i=1}^2 \int_0^t \int_{\Omega} (\Pi \rho_i)_{\omega} \left(\int_0^{\theta} (c_{\theta i})_{\omega}(\pi_{\omega}(z)) dz \right) (\Pi \mathbf{u}_i)_{\omega} \cdot \nabla \theta d\mathbf{x} d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\partial \Omega} \theta L^{\delta}(t, \mathbf{x}, \pi_{\omega}(\theta)) d\sigma d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} \theta F_{(1)} d\mathbf{x} d\tau,
\end{aligned}$$

в котором обозначено

$$\begin{aligned}
(5.29) \quad F_{(1)} = & - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial (\Pi \rho_i)_{\omega}}{\partial \tau} \left(\int_0^{\theta} (c_{\theta i})_{\omega}(\pi_{\omega}(z)) dz \right) \\
& + \left((1 - \delta) \sum_{i=1}^2 \Pi(\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i)) + a \Pi(|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2) \right)_{\omega} \\
& + (\Pi \rho)_{\omega} g^{\delta} - \theta \sum_{i=1}^2 (\Pi(p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i))_{\omega} - \delta(\pi_{\omega}(\theta) - \pi_{\omega}(0))^{m+1},
\end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned}
(5.30) \quad & \|F_{(1)}\|_{L_{\infty}(Q_T)} \\
& \leq B_{64} \left(\left\{ \|\rho_i\|_{L_{\infty}(Q_T)} \right\}, \left\{ \|\mathbf{u}_i\|_{L_{\infty}(Q_T)} \right\}, \left\{ \|\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i)\|_{L_{\infty}(Q_T)} \right\}, \right. \\
& \left. \|g^{\delta}\|_{L_{\infty}(Q_T)}, \left\{ \|p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i\|_{L_{\infty}(Q_T)} \right\}, \left\{ \left\| \frac{\partial \rho_i}{\partial t} \right\|_{L_{\infty}(Q_T)} \right\}, c_6, m, a, \bar{\theta} \right).
\end{aligned}$$

После умножения уравнения (5.13) на $\frac{\partial \mathcal{K}_{\omega}(\theta)}{\partial t}$ и интегрирования по Q_t получаем

$$\begin{aligned}
(5.31) \quad & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{K}_{\omega}(\theta)|^2 d\mathbf{x} + \int_{\partial \Omega} \left(\int_0^{\theta} (k)_{\omega}(\pi_{\omega}(z)) L^{\delta}(t, \mathbf{x}, \pi_{\omega}(z)) dz \right) d\sigma + \\
& + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \int_{\Omega} ((\Pi \rho_i)_{\omega} + v)(c_{\theta i})_{\omega}(\pi_{\omega}(\theta))(k)_{\omega}(\pi_{\omega}(\theta)) \left| \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right|^2 d\mathbf{x} d\tau +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \int_{\Omega} (\Pi \rho_i)_{\omega} (c_{\theta i})_{\omega} (\pi_{\omega}(\theta)) (\Pi \mathbf{u}_i)_{\omega} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \cdot \nabla \mathcal{K}_{\omega}(\theta) d\mathbf{x} d\tau = \\
& = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{K}_{\omega}(\theta_0^{\delta})|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int_{\partial \Omega} \left(\int_0^{\theta} (k)_{\omega} (\pi_{\omega}(z)) \frac{\partial}{\partial \tau} L^{\delta}(\tau, \mathbf{x}, \pi_{\omega}(z)) dz \right) d\sigma d\tau + \\
& \quad + \int_0^t \int_{\Omega} F_{(2)} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} d\mathbf{x} d\tau,
\end{aligned}$$

где

(5.32)

$$F_{(2)} = (k)_{\omega} (\pi_{\omega}(\theta)) \left(F_{(1)} - \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^{\theta} (c_{\theta i})_{\omega} (\pi_{\omega}(z)) dz \right) \operatorname{div} ((\Pi \rho_i)_{\omega} (\Pi \mathbf{u}_i)_{\omega}) \right),$$

$$\begin{aligned}
(5.33) \quad \|F_{(2)}\|_{L_{\infty}(Q_T)} & \leq B_{65} \left(B_{64}, \{ \|\rho_i\|_{L_{\infty}(Q_T)} \}, \{ \|\nabla \rho_i\|_{L_{\infty}(Q_T)} \}, \right. \\
& \quad \left. \{ \|\mathbf{u}_i\|_{L_{\infty}(Q_T)} \}, \{ \|\operatorname{div} \mathbf{u}_i\|_{L_{\infty}(Q_T)} \}, c_5, c_6, m, \bar{\theta} \right).
\end{aligned}$$

Наконец, складывая (5.28) и (5.31), приходим к равенству

$$\begin{aligned}
(5.34) \quad & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{K}_{\omega}(\theta)|^2 d\mathbf{x} + \int_{\partial \Omega} \left(\int_0^{\theta} (k)_{\omega} (\pi_{\omega}(z)) L^{\delta}(t, \mathbf{x}, \pi_{\omega}(z)) dz \right) d\sigma + \\
& + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \int_{\Omega} ((\Pi \rho_i)_{\omega} + v) (c_{\theta i})_{\omega} (\pi_{\omega}(\theta)) (k)_{\omega} (\pi_{\omega}(\theta)) \left| \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right|^2 d\mathbf{x} d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Omega} (k)_{\omega} (\pi_{\omega}(\theta)) |\nabla \theta|^2 d\mathbf{x} d\tau + \int_0^t \int_{\partial \Omega} \theta L^{\delta}(\tau, \mathbf{x}, \pi_{\omega}(\theta)) d\sigma d\tau = \\
& = - \sum_{i=1}^2 \int_0^t \int_{\Omega} (\Pi \rho_i)_{\omega} (c_{\theta i})_{\omega} (\pi_{\omega}(\theta)) (\Pi \mathbf{u}_i)_{\omega} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \cdot \nabla \mathcal{K}_{\omega}(\theta) d\mathbf{x} d\tau + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{K}_{\omega}(\theta_0^{\delta})|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int_{\partial \Omega} \left(\int_0^{\theta} (k)_{\omega} (\pi_{\omega}(z)) \frac{\partial}{\partial \tau} L^{\delta}(\tau, \mathbf{x}, \pi_{\omega}(z)) dz \right) d\sigma d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Omega} F_2 \frac{\partial \theta}{\partial \tau} d\mathbf{x} d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} \theta F_1 d\mathbf{x} d\tau - \sum_{i=1}^2 \int_0^t \int_{\Omega} ((\Pi \rho_i)_{\omega} + v) (c_{\theta i})_{\omega} (\pi_{\omega}(\theta)) \theta \frac{\partial \theta}{\partial \tau} d\mathbf{x} d\tau + \\
& \quad + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \int_{\Omega} (\Pi \rho_i)_{\omega} \left(\int_0^{\theta} (c_{\theta i})_{\omega} (\pi_{\omega}(z)) dz \right) (\Pi \mathbf{u}_i)_{\omega} \cdot \nabla \theta d\mathbf{x} d\tau,
\end{aligned}$$

откуда, используя элементарные неравенства и лемму Гронуолла, приходим к равномерной по ω оценке

$$(5.35) \quad \|\theta\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))} + \left\| \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_T)} \leq B_{66},$$

где $B_{66} = B_{66} \left(B_{64}, B_{65}, \|\nabla \theta_0^\delta\|_{L_\infty(\Omega)}, \left\{ \inf_{\Omega} \rho_{0i}^\delta \right\}, \left\{ \|\rho_i\|_{L_\infty(Q_T)} \right\}, \left\{ \|\mathbf{u}_i\|_{L_\infty(Q_T)} \right\}, \left\{ \|\operatorname{div} \mathbf{u}_i\|_{L_1(0,T;L_\infty(\Omega))} \right\}, \left\| \frac{\partial L^\delta}{\partial t} \right\|_{C([0,T] \times \partial\Omega \times [0,\bar{\theta}+1])}, c_5, c_6, \bar{\theta}, T, \Omega \right).$

Тогда, благодаря классическим оценкам решений эллиптических уравнений (см. [1], Теорема 15.2, стр. 704, [40], стр. 139), из уравнения (5.13) следует, что²¹

$$(5.36) \quad \|\mathcal{K}_\omega(\theta)\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \leq B_{67},$$

где

$$B_{67} = B_{67} \left(B_{64}, B_{66}, \left\{ \|\rho_i\|_{L_\infty(Q_T)} \right\}, \left\{ \|\nabla \rho_i\|_{L_\infty(Q_T)} \right\}, \left\{ \|\mathbf{u}_i\|_{L_\infty(Q_T)} \right\}, \left\{ \|\operatorname{div} \mathbf{u}_i\|_{L_\infty(Q_T)} \right\}, c_5, c_6, T, m, \bar{\theta}, \Omega, \left\| L^\delta \right\|_{C([0,T] \times \partial\Omega \times [0,\bar{\theta}+1])}, \left\| \nabla_{\mathbf{x}} L^\delta \right\|_{C([0,T] \times \partial\Omega \times [0,\bar{\theta}+1])}, \left\| \partial_3 L^\delta \right\|_{C([0,T] \times \partial\Omega \times [0,\bar{\theta}+1])} \right).$$

5.5. Компактность θ^ω . Ввиду оценок (5.27) и (5.35), из семейства²² θ^ω , $\omega \in (0, \omega_0)$ (см. (5.17)), может быть выделена последовательность (которую мы обозначим так же), для которой при $\omega \rightarrow 0$ имеют место сходимости

$$(5.37) \quad \theta^\omega \rightarrow \theta \quad * \text{—слабо в } L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)) \text{ и в } L_\infty(Q_T),$$

$$(5.38) \quad \frac{\partial \theta^\omega}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \text{слабо в } L_2(Q_T).$$

Далее, из (5.35) получаем, что

$$(5.39) \quad \left\| \frac{\partial \theta^\omega}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} \leq B_{66}.$$

Таким образом, последовательность θ^ω равномерно непрерывна по $t \in [0, T]$ со значениями в $W_2^{-1}(\Omega) = \left(W_2^1(\Omega) \right)^*$ (верхний индекс * означает сопряжение). Тогда благодаря (5.27) приходим (см. [34], Лемма 6.2, стр. 301) к сходимости (выделяя подпоследовательность и переобозначая ее так же)

$$(5.40) \quad \theta^\omega \rightarrow \theta \quad \text{при } \omega \rightarrow 0 \text{ сильно в } C([0, T]; L_{\sigma_{16}, \text{weak}}(\Omega)), \quad \forall \sigma_{16} < \infty.$$

Т. к. имеют место вложения (символы $\hookrightarrow$ и $\hookrightarrow\hookrightarrow$ здесь и далее обозначают соответственно непрерывное и компактное вложения пространств)

$$W_2^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow W_2^{-1}(\Omega),$$

²¹Из (5.36) можно вывести оценку $\Delta \theta$ в $L_1(0, T, L_2(\Omega))$, а значит оценку θ в $L_1(0, T, W_2^2(\Omega))$. Для этого достаточно заметить что $\theta = \mathcal{K}_\omega^{-1}(\mathcal{K}_\omega(\theta))$ и воспользоваться свойствами $\mathcal{K}_\omega$. Однако эти оценки зависят от q и потому мало полезны в будущем.

²²Отныне индекс ω у θ^ω будем писать.

последовательность $\{\theta^\omega\}$ ограничена в $L_\infty(Q_T) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))$, а $\left\{\frac{\partial \theta^\omega}{\partial t}\right\}$ ограничена в $L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$, то, выбрав подходящую подпоследовательность и переобозначив ее так же, получаем²³, что при $\omega \rightarrow 0$

$$(5.41) \quad \theta^\omega \rightarrow \theta \text{ сильно в } L_{\sigma_{17}}(0, T; L_2(\Omega)), \quad \forall \sigma_{17} \in [1, +\infty),$$

а значит

$$(5.42) \quad \mathcal{K}_\omega(\theta^\omega) \rightarrow \mathcal{K}(\theta) \text{ сильно в } L_{\sigma_{17}}(0, T; L_2(\Omega)).$$

В силу вложений $W_2^2(\Omega) \hookrightarrow W_2^1(\Omega) \hookrightarrow W_2^{-1}(\Omega)$, ограниченности $\{\mathcal{K}_\omega(\theta^\omega)\}$ в $L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^2(\Omega))$, а $\left\{\frac{\partial \mathcal{K}_\omega(\theta^\omega)}{\partial t}\right\}$ — в $L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$, можно выбрать подпоследовательность и переобозначив ее так же, получить (по теореме Лионса—Обена), что при $\omega \rightarrow 0$

$$(5.43) \quad \mathcal{K}_\omega(\theta^\omega) \rightarrow \mathcal{K}(\theta) \text{ сильно в } L_{\sigma_{18}}(0, T; W_2^1(\Omega)), \quad \forall \sigma_{18} \in [1, +\infty).$$

Отсюда, в частности, следует, что $\mathcal{K}_\omega(\theta^\omega) \rightarrow \mathcal{K}(\theta)$ при $\omega \rightarrow 0$ сильно в $L_{\sigma_{18}}\left(0, T; W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right)$, а поэтому $\theta^\omega \rightarrow \theta$ при $\omega \rightarrow 0$ сильно в $L_{\sigma_{18}}(0, T; L_4(\partial\Omega))$. Наконец, поскольку имеют место вложения

$$W_2^2(\Omega) \hookrightarrow W_2^{\sigma_{19}}(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega), \quad \forall \sigma_{19} \in [0, 2),$$

последовательность $\{\mathcal{K}_\omega(\theta^\omega)\}$ ограничена в $L_2(0, T; W_2^2(\Omega))$, $\left\{\frac{\partial \mathcal{K}_\omega(\theta^\omega)}{\partial t}\right\}$ — в $L_2(Q_T)$, то (выбрав подходящую подпоследовательность и переобозначив ее так же) получаем (по теореме Лионса—Обена), что при $\omega \rightarrow 0$

$$(5.44) \quad \mathcal{K}_\omega(\theta^\omega) \rightarrow \mathcal{K}(\theta) \text{ сильно в } L_{\sigma_{20}}(0, T; W_2^{\sigma_{19}}(\Omega)), \quad \forall \sigma_{20} \in [0, 2).$$

Из (5.44) следует, что $\nabla \mathcal{K}_\omega(\theta^\omega) \rightarrow \nabla \mathcal{K}(\theta)$ при $\omega \rightarrow 0$ сильно в $L_{\sigma_{20}}\left(0, T; W_2^{\sigma_{19}-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)\right)$ при $\sigma_{19} \geq \frac{3}{2}$, а значит $\nabla \mathcal{K}_\omega(\theta^\omega) \rightarrow \nabla \mathcal{K}(\theta)$ при $\omega \rightarrow 0$ сильно в $L_{\sigma_{20}}(0, T; L_{\sigma_{21}}(\partial\Omega))$, $1 \leq \sigma_{21} \leq \frac{4}{5-2\sigma_{19}}$. В заключение отметим, что из оценки (5.36) следует, что $\Delta \mathcal{K}_\omega(\theta^\omega) \rightarrow \Delta \mathcal{K}(\theta)$ при $\omega \rightarrow 0$ слабо в $L_2(Q_T)$.

5.6. Выражение температуры через скорости и ее оценки. Благодаря полученным выше сходимостям можно заключить, что предельная функция θ вместе с $\mathbf{u}_i \in C([0, T]; X_q)$, $\rho_i = \mathcal{S}_i(\mathbf{u}_i)$, $i = 1, 2$, принадлежащая пространству

$$Y_{[0, T]} = \left\{ \theta \mid \frac{\partial \theta}{\partial t} \in L_2(Q_T), \quad \theta \in L_\infty(Q_T) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), \right. \\ \left. \theta \geq 0, \quad \mathcal{K}(\theta) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)) \right\},$$

является единственным²⁴ сильным решением задачи (4.5)–(4.7). Кроме того, оператор $\Theta : \mathbf{u} \mapsto \theta$, $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, решения задачи (4.5)–(4.7), где $\rho_i = \mathcal{S}_i(\mathbf{u}_i)$, $i = 1, 2$, переводит ограниченное множество из $C([0, T]; X_q^2)$ в ограниченное множество из $Y_{[0, T]}$.

²³См. [34], Теорема 1.71, стр. 59 — Теорема Лионса—Обена.

²⁴Единственность получается по той же схеме что и для (5.3)–(5.5), т. е. проверкой свойства [(5.18) $\implies$ (5.19)] (достаточно убедиться что все выкладки сохраняют силу).

Проводя рассуждения аналогично выводу (5.16) и (5.27), но уже для (4.5) вместо (5.3), выведем оценку

$$(5.45) \quad \theta \leq B_{68} \left(\left\{ \|\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i)\|_{L_\infty(Q_T)} \right\}, \left\{ \|\mathbf{u}_i\|_{L_\infty(Q_T)} \right\}, \left\{ \|\rho_i\|_{L_\infty(Q_T)} \right\}, \right. \\ \left. \|g^\delta\|_{L_\infty(Q_T)}, a, m, c_6, \delta, \left\{ \|p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i\|_{L_\infty(Q_T)} \right\}, \left\{ \|\Delta \rho_i\|_{L_\infty(Q_T)} \right\}, \sup_\Omega \theta_0^\delta \right).$$

5.7. Формулировка оператора решения Задачи $\mathcal{H}^{q,\varepsilon,\delta,v}$ и его свойства.

Нам предстоит доказать, что существуют $\tau_0 \in (0, T)$ и $\mathbf{u}_i \in C([0, \tau_0]; X_q)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие уравнениям (4.14), в которых вместо T стоит τ_0 , а $\rho_i = \mathcal{S}_i(\mathbf{u}_i)$, $i = 1, 2$, $\theta = \Theta(\mathbf{u})$. Для этого рассмотрим при всех $t \in [0, T]$ отображение²⁵

$$\Psi : C([0, t]; X_q^2) \rightarrow C([0, t]; X_q^2), \quad \Psi(\mathbf{u})(t) = (\mathcal{T}_1(\mathbf{u})(t), \mathcal{T}_2(\mathbf{u})(t)),$$

$$(5.46) \quad \mathcal{T}_i(\mathbf{u})(t) = \mathcal{M}_{\rho_i(t)}^{-1} \left(P_q \rho_{0i} \mathbf{u}_{0i} + \int_0^t P_q \mathcal{N}_i(\mathbf{u})(s) ds \right), \quad i = 1, 2,$$

где $\mathcal{N}_i(\mathbf{u}) = \operatorname{div} \mathbb{S}_i - \nabla p_i(\rho_i, \theta) - \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) - \varepsilon(\nabla \otimes \mathbf{u}_i)^* \nabla \rho_i + \mathbf{J}_i + \rho_i \mathbf{f}_i$, $\rho_i = \mathcal{S}_i(\mathbf{u}_i)$, $i = 1, 2$, $\theta = \Theta(\mathbf{u})$.

Отметим сначала, что благодаря эквивалентности норм в конечномерном пространстве X_q справедливы неравенства

$$(5.47) \quad \|P_q \mathcal{N}_i(\mathbf{u})\|_{X_q} \leq B_{69} \left(\sum_{j=1}^2 \|\mathbf{u}_j\|_{X_q} + \|\rho_i\|_{L_\infty(\Omega)} \|\mathbf{u}_i\|_{X_q}^2 + \right. \\ \left. + \varepsilon \|\rho_i\|_{L_\infty(\Omega)} \|\mathbf{u}_i\|_{X_q} + \|\rho_i\|_{L_\infty(\Omega)}^\gamma + \|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} \|\rho_i\|_{L_\infty(\Omega)}^{\frac{\gamma}{3}} + \right. \\ \left. + \|\theta\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\rho_i\|_{L_\infty(\Omega)} \right) \quad \forall t \in [0, T], \quad i = 1, 2,$$

где положительная постоянная B_{69} зависит от $c_2, c_3, c_4, \{\|\mathbf{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\}, \{\|\psi_i\|_{W_2^2(\Omega)}\}, a, q, \gamma, \mathbf{L}, \mathbf{M}$ и Ω . Далее, нетрудно проверить, что при всех $t \in [0, T]$ верно

$$(5.48) \quad \|\mathcal{M}_{\rho_i(t)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_q, X_q)} \leq \left(\inf_\Omega \rho_{0i}^\delta \right)^{-1} \exp \left(\|\operatorname{div} \mathbf{u}_i\|_{L_1(0, t; L_\infty(\Omega))} \right), \quad i = 1, 2.$$

Кроме того, т. к. для любых $\rho_i^k = \mathcal{S}_i(\mathbf{u}_i^k)$, $k = 1, 2$, верно представление

$$\mathcal{M}_{\rho_i^1(t)}^{-1} - \mathcal{M}_{\rho_i^2(t)}^{-1} = \mathcal{M}_{\rho_i^2(t)}^{-1} (\mathcal{M}_{\rho_i^2(t)} - \mathcal{M}_{\rho_i^1(t)}) \mathcal{M}_{\rho_i^1(t)}^{-1},$$

²⁵Уравнение (5.46) получается из (4.11), (4.12) при $T := \tau_0$ после интегрирования от 0 до t , где $t < \tau_0$, и применения P_q .

то при всех $t \in [0, T]$, $i = 1, 2$

$$(5.49) \quad \|\mathcal{M}_{\rho_i^1(t)}^{-1} - \mathcal{M}_{\rho_i^2(t)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_q, X_q)} \leqslant \\ \leqslant B_{70}(q) \left(\inf_{\Omega} \rho_{0i}^{\delta} \right)^{-2} \exp \left(\sum_{k=1}^2 \|\operatorname{div} \mathbf{u}_i^k\|_{L_1(0, t; L_{\infty}(\Omega))} \right) \|(\rho_i^1 - \rho_i^2)(t)\|_{L_1(\Omega)}.$$

5.8. Построение неподвижной точки оператора и локального решения Задачи $\mathcal{H}^{q, \varepsilon, \delta, v}$.

5.8.1. *Отображение шара в себя.* Покажем, что при некотором $\tau_0 \in (0, T]$ оператор Ψ отображает множество

$$B_{R, \tau_0} = \left\{ \mathbf{u} \in C([0, \tau_0]; X_q^2) \mid \|\mathbf{u}\|_{C([0, \tau_0]; X_q^2)} \leqslant R \right\}$$

в себя (при этом $R > R^*$, что не ограничивает общность, а R^* будет выбрано ниже). Благодаря (5.1), (5.47), второму свойству $\mathcal{S}_i$ и ограниченности оператора Θ (см. (5.45)), имеем для всех $\mathbf{u} \in B_{R, \tau_0}$

$$\|\Psi(\mathbf{u})\|_{C([0, \tau_0]; X_q^2)} \leqslant \\ \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant \tau_0} \sum_{i=1}^2 \|\mathcal{M}_{\rho_i(t)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_q, X_q)} \left(\|P_q \rho_{0i} \mathbf{u}_{0i}\|_{X_q} + \int_0^t \|P_q \mathcal{N}_i(\mathbf{u})(s)\|_{X_q} ds \right) \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=1}^2 \left(\inf_{\Omega} \rho_{0i}^{\delta} \right)^{-1} e^{B_{71} \tau_0 R} \left(B_{72} \left(\sup_{\Omega} \rho_{0i}^{\delta} \right) \|\mathbf{u}_{0i}\|_{L_{\infty}(\Omega)} + \right. \\ \left. + \tau_0 B_{69} \{ 2R + 2R^2 \left(\sup_{\Omega} \rho_{0i}^{\delta} \right) e^{B_{71} \tau_0 R} + R \left(\sup_{\Omega} \rho_{0i}^{\delta} \right) e^{B_{71} \tau_0 R} + \left(\sup_{\Omega} \rho_{0i}^{\delta} \right)^{\gamma} e^{B_{71} \tau_0 R \gamma} + \right. \\ \left. + B_{73} \left(\sup_{\Omega} \rho_{0i}^{\delta} \right)^{\frac{\gamma}{3}} e^{\frac{B_{71} \tau_0 R \gamma}{3}} + B_{73} + \left(\sup_{\Omega} \rho_{0i}^{\delta} \right) e^{B_{71} \tau_0 R} \} \right) \leqslant \frac{R}{2},$$

где²⁶ $B_{71} = B_{71}(q, \{\|\psi_i\|_{W_{\infty}^2(\Omega)}\}, \Omega)$, $B_{72} = B_{72}(\Omega)$,

$$B_{73} = B_{73} \left(B_{58}, c_4, c_6, \|g^{\delta}\|_{C(\overline{Q}_T)}, \{\|\psi_i\|_{W_{\infty}^1(\Omega)}\}, a, q, \gamma, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{M}, \delta, \Omega, R, m, \right. \\ \left. \left\{ \sup_{\Omega} \rho_{0i}^{\delta} \right\}, \sup_{\Omega} \theta_0^{\delta}, e^{B_{71} \tau_0 R}, e^{\frac{B_{71} \tau_0 R \gamma}{3}} \right),$$

при подходящем выборе $R^* \left(B_{72}, \{\|\mathbf{u}_{0i}\|_{L_{\infty}(\Omega)}\}, \{\inf_{\Omega} \rho_{0i}^{\delta}\}, \{\sup_{\Omega} \rho_{0i}^{\delta}\} \right)$ и при всех

$\tau_0 < B_{74}(B_{69}, B_{71}, R^*, T, \{\inf_{\Omega} \rho_{0i}^{\delta}\}, \text{аргументы } B_{73} \text{ кроме } R \text{ и двух последних})$,

т. е. отображение Ψ переводит B_{R, τ_0} в себя.

²⁶ $B_{73} = B_{68}$ с переформулированными аргументами.

5.8.2. *Непрерывность оператора.* Установим непрерывность отображения Ψ . Выберем произвольно $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2 \in B_{R, \tau_0}$ и заметим, что при $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_i(\mathbf{u}^1)(t) - \mathcal{T}_i(\mathbf{u}^2)(t) &= (\mathcal{M}_{\rho_i^1(t)}^{-1} - \mathcal{M}_{\rho_i^2(t)}^{-1}) \left[P_q \rho_{0i} \mathbf{u}_{0i} + \int_0^t P_q \mathcal{N}_i(\mathbf{u}^1)(s) ds \right] + \\ &+ \mathcal{M}_{\rho_i^2(t)}^{-1} \int_0^t P_q (\mathcal{N}_i(\mathbf{u}^1)(s) - \mathcal{N}_i(\mathbf{u}^2)(s)) ds, \end{aligned}$$

где $\rho_i^k = \mathcal{S}_i(\mathbf{u}_i^k)$, $\theta^k = \Theta(\mathbf{u}^k)$, $i, k = 1, 2$, откуда, используя (5.1), (5.47), (5.48), (5.49) и (5.45) (при замене B_{68} на B_{73}), получаем при $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_i(\mathbf{u}^1) - \mathcal{T}_i(\mathbf{u}^2)\|_{C([0, \tau_0]; X_q)} &\leq B_{75} \left(\sum_{i=1}^2 \|\rho_i^1 - \rho_i^2\|_{C([0, \tau_0]; L_2(\Omega))} + \right. \\ (5.50) \quad &\left. + \|\theta^1 - \theta^2\|_{C([0, \tau_0]; L_2(\Omega))} + \|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\|_{C([0, \tau_0]; X_q^2)} \right), \end{aligned}$$

где B_{75} зависит от²⁷ B_{69} , B_{70} , B_{73} , $\{\|\mathbf{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\}$, $\{\|\mathbf{u}_{0i}\|_{L_\infty(\Omega)}\}$, $\{\sup_\Omega \rho_{0i}^\delta\}$, $\{\inf_\Omega \rho_{0i}^\delta\}$, $\{\|p'_{\theta i}\|_{C[0, B_{76}]}\}$, $\{\|\psi_i\|_{W_\infty^2(\Omega)}\}$, R , T , c_2 , c_3 , c_4 , a , q , γ , $\mathbf{A}$, $\mathbf{M}$ и Ω , а $B_{76} = B_{76}(\{\sup_\Omega \rho_{0i}^\delta\}, T, R, q, \{\|\operatorname{div} \psi_i\|_{L_\infty(\Omega)}\})$. Пусть $B_{R, \tau_0} \ni \mathbf{u}^n \rightarrow \mathbf{u}$ (ясно, что $\mathbf{u} \in B_{R, \tau_0}$) при $n \rightarrow +\infty$ сильно в пространстве $C([0, \tau_0]; X_q^2)$. Обозначим $\rho_i^n = \mathcal{S}_i(\mathbf{u}_i^n)$, $\rho_i = \mathcal{S}_i(\mathbf{u}_i)$. По свойству 2 операторов $\mathcal{S}_i$

$$(5.51) \quad \|\rho_i^n - \rho_i\|_{C([0, \tau_0]; L_2(\Omega))} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Обозначим $\theta^n = \Theta(\mathbf{u}^n)$, $\theta = \Theta(\mathbf{u})$. Для θ^n — решения задачи (4.5)–(4.7), где вместо $\mathbf{u}_i$ стоит $\mathbf{u}_i^n$, а вместо $\rho_i = \mathcal{S}_i(\mathbf{u}_i)$ стоит $\rho_i^n = \mathcal{S}_i(\mathbf{u}_i^n)$, $i = 1, 2$ — справедливы равномерные по n оценки в $Y_{[0, \tau_0]}$ (см. (5.35), (5.36), (5.45)). Это позволяет выделить подпоследовательность (обозначим ее так же) $\theta^n \rightarrow \theta^*$, сходящуюся в нормах $Y_{[0, \tau_0]}$, поэтому θ^* является решением той же задачи что и θ , а значит (в силу единственности) $\theta^* = \theta$. Поскольку $\{\theta^n\}$ равномерно по n ограничены в $L_\infty(0, \tau_0; W_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0, \tau_0; L_2(\Omega))$ и имеет место интерполяционное неравенство

$$\|f\|_{W_2^{1-\sigma_{22}}(\Omega)} \leq B_{77} \|f\|_{W_2^1(\Omega)}^{1-\sigma_{22}} \|f\|_{L_2(\Omega)}^{\sigma_{22}} \quad \forall f \in W_2^1(\Omega), \sigma_{22} \in (0, 1)$$

(см., например, [2], Лемма 2.2, стр. 25), то согласно Теореме 1.72 из [34] (стр. 59) можно заключить, что (выделяя подпоследовательность и переобозначая ее так же) $\theta^n \rightarrow \theta$ при $n \rightarrow +\infty$ сильно в $C([0, \tau_0], W_2^{1-\sigma_{22}}(\Omega))$, что позволяет заключить

$$(5.52) \quad \|\theta^n - \theta\|_{C([0, \tau_0]; L_2(\Omega))} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Стандартными рассуждениями показывается что (5.52) имеет место для всей последовательности. Таким образом, учитывая (5.50), (5.51), (5.52) можно сделать вывод о том, что отображение Ψ непрерывно.

²⁷Отметим, что у постоянной B_{73} два последних аргумента исчезают за счет подходящего выбора малости τ_0 .

5.8.3. Компактность оператора и существование неподвижной точки.

Пусть $\mathbf{u}$ пробегает ограниченное множество $U \subset C([0, \tau_0]; X_q^2)$. В силу свойств оператора $\mathcal{M}_\xi$ (см. [34], стр. 352–353) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{T}_i(\mathbf{u})}{\partial t} = & -\mathcal{M}_{\rho_i(t)}^{-1} \mathcal{M}_{\frac{\partial \rho_i}{\partial t}(t)} \mathcal{M}_{\rho_i(t)}^{-1} \left(P_q \rho_{0i} \mathbf{u}_{0i} + \int_0^t P_q \mathcal{N}_i(\mathbf{u})(s) ds \right) + \\ & + \mathcal{M}_{\rho_i(t)}^{-1} P_q \mathcal{N}_i(\mathbf{u})(t), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

и, ввиду ограниченности ρ_i в $V_{[0, \tau_0]}$, $i = 1, 2$, а θ в $Y_{[0, \tau_0]}$, получаем ограниченность $\mathcal{T}_i(\mathbf{u})$, $i = 1, 2$, в пространстве $C^1([0, \tau_0]; X_q)$, что означает предкомпактность $\Psi(U)$ в пространстве $C([0, \tau_0]; X_q^2)$ (по теореме Арцела²⁸).

Тем самым, выполнены все условия теоремы Шаудера²⁹ и поэтому оператор Ψ имеет неподвижную точку в B_{R, τ_0} — пару функций $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, которая вместе с соответствующими $\rho_i = \mathcal{S}_i(\mathbf{u}_i)$, $i = 1, 2$ и $\theta = \Theta(\mathbf{u})$ является искомым решением Задачи $\mathcal{H}^{q, \varepsilon, \delta, v}$ в цилиндре Q_{τ_0} при достаточно малом $\tau_0 > 0$.

5.9. Построение глобального решения Задачи $\mathcal{H}^{q, \varepsilon, \delta, v}$. Чтобы продолжить построенное локальное решение на весь промежуток времени $[0, T]$, достаточно доказать равномерную по $\tau_0 \in (0, T]$ ограниченность в пространстве $C([0, \tau_0]; X_q)$ решений³⁰ $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$, уравнений (4.14).

Для этого возьмем в (4.14) в качестве пробных функций $\varphi_i = \chi_i \mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$, где $\chi_i \in C_0^1[0, T]$, $i = 1, 2$, и получим равенство³¹

$$\begin{aligned} (5.53) \quad & \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_i(t) |\mathbf{u}_i(t)|^2 + \rho_i(t) P_{ei}(\rho_i)(t) \right) d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \mathbf{u}_i) d\mathbf{x} d\tau + \\ & + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \frac{p'_{ei}(\rho_i)}{\rho_i} |\nabla \rho_i|^2 d\mathbf{x} d\tau + a \int_{Q_t} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 d\mathbf{x} d\tau = \\ & = \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \theta p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i d\mathbf{x} d\tau + \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \rho_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{u}_i d\mathbf{x} d\tau + \\ & + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_{0i}^\delta |\mathbf{u}_{0i}|^2 + \rho_{0i}^\delta P_{ei}(\rho_{0i}^\delta) \right) d\mathbf{x} \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Далее, проинтегрируем (4.5) по Q_t , сложим результат с (5.53), и получим, что при всех $t \in [0, T]$

²⁸См., например, [34], Теорема 1.70, стр. 58.

²⁹См., например, [33], стр. 20.

³⁰Т. е. априорную оценку в $C([0, T]; X_q)$. Мы это сделаем с помощью энергетической оценки, которая потребует и далее.

³¹Для этого нужно взять $\chi_i \rightarrow \chi_{[0, t]}$ — здесь и далее через χ_U обозначается характеристическая функция множества U .

$$\begin{aligned}
(5.54) \quad & \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_i(t) |\mathbf{u}_i(t)|^2 + \rho_i(t) P_{ei}(\rho_i)(t) + (\rho_i(t) + v) Q_i(\theta)(t) \right) d\mathbf{x} + \\
& + \delta \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \mathbf{u}_i) d\mathbf{x} d\tau + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \frac{p'_{ei}(\rho_i)}{\rho_i} |\nabla \rho_i|^2 d\mathbf{x} d\tau + \\
& + \delta \int_{Q_t} \theta^{m+1} d\mathbf{x} d\tau + \int_0^t \int_{\partial\Omega} L^\delta(\tau, \mathbf{x}, \theta) d\sigma d\tau = \\
& = \int_{Q_t} \rho g^\delta d\mathbf{x} d\tau + \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \rho_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{u}_i d\mathbf{x} d\tau + \\
& + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_{0i}^\delta |\mathbf{u}_{0i}|^2 + \rho_{0i}^\delta P_{ei}(\rho_{0i}^\delta) + (\rho_{0i}^\delta + v) Q_i(\theta_0^\delta) \right) d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Из (5.54), в свою очередь, благодаря (2.30), (2.37), (2.40), (2.43), (2.44) и (4.1)–(4.3), следует, что

$$(5.55) \quad \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \rho_i |\mathbf{u}_i|^2 d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} |\nabla \otimes \mathbf{u}_i|^2 d\mathbf{x} d\tau \leq B_{78} \left(1 + \sum_{i=1}^2 \int_{Q_t} \rho_i |\mathbf{u}_i|^2 d\mathbf{x} d\tau \right),$$

в котором положительная постоянная B_{78} зависит только от $B_0, B_2, B_3, B_4, B_9, B_{10}, \{\|\mathbf{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\}, \|g^\delta\|_{L_\infty(Q_T)}, \{\|\mathbf{u}_{0i}\|_{L_\infty(\Omega)}\}, \{\|\rho_{0i}^\delta\|_{L_\gamma(\Omega)}\}, \|\theta_0^\delta\|_{L_\infty(\Omega)}, T, m, \gamma, \delta$ и $|\Omega|$. Отсюда, используя лемму Гронуолла получаем, что

$$(5.56) \quad \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \rho_i |\mathbf{u}_i|^2 d\mathbf{x} \leq B_{79}(B_{78}, T),$$

а значит, ввиду неравенства Фридрихса, верна оценка

$$(5.57) \quad \|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;X_q)} \leq B_{80}(B_{78}, B_{79}, T, \Omega).$$

Наконец, благодаря (5.1) и (5.57), из (5.56) выводим

$$(5.58) \quad \|\mathbf{u}\|_{C([0,T];X_q)} \leq B_{81} \left(B_{79}, B_{80}, \{\inf_{\Omega} \rho_{0i}^\delta\}, \{\|\operatorname{div} \psi_i\|_{L_\infty(\Omega)}\}, T, q \right).$$

Эта оценка позволяет³² продолжить за конечное число шагов построенное выше локальное решение на произвольный конечный промежуток $[0, T]$.

³²Т. к. длина τ_0 интервала существования локального решения (см. выше) определяется в конечном счете нормой (5.58).

6. ПРИЛОЖЕНИЕ

6.1. **Альтернативный способ получения оценки (3.37).** Умножим уравнение Пуассона в (3.32) на $\varphi \frac{d\tilde{\psi}}{dt}$, $\varphi \in W_2^1(\Omega)$, $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(0, T)$, и проинтегрируем результат по Q_T , получим, используя процедуру ренормализации уравнения (2.1), что

$$\begin{aligned}
 (6.1) \quad & \int_{Q_T} \tilde{\psi} \nabla \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} dt = \\
 & = - \int_{Q_T} \tilde{\psi} G(\rho_1) \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} dt + \int_{Q_T} \tilde{\psi} \varphi (G'(\rho_1) \rho_1 - G(\rho_1)) \operatorname{div} \mathbf{u}_1 \, d\mathbf{x} dt - \\
 & \quad - \int_{Q_T} \tilde{\psi} \varphi \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (G'(\rho_1) \rho_1 - G(\rho_1)) \operatorname{div} \mathbf{u}_1 \, d\mathbf{x} \right) d\mathbf{x} dt = \\
 & \quad = \int_{Q_T} \tilde{\psi} \varphi \operatorname{div} \mathbf{g} \, d\mathbf{x} dt,
 \end{aligned}$$

где $\mathbf{g} = G(\rho_1) \mathbf{u}_1 + \mathcal{B}((G'(\rho_1) \rho_1 - G(\rho_1)) \operatorname{div} \mathbf{u}_1)$. В силу свойств оператора $\mathcal{B}$ и оценок (3.5), (3.18), (3.19) получаем, что

$$(6.2) \quad \|\mathbf{g}\|_{L_2(Q_T)} \leq B_{82}(B_{13}, B_{24}, B_{25}, B_{36}, B_{48}, T, \gamma, \Omega).$$

Ввиду³³ (3.37) и (6.2), равенство (6.1) имеет место и для $\tilde{\psi} = \chi_{[t_1, t_2]}$, $t_1, t_2 \in (0, T)$ ($t_1 < t_2$), что дает равенство

$$(6.3) \quad \int_{\Omega} (\nabla \eta(t_2, \mathbf{x}) - \nabla \eta(t_1, \mathbf{x})) \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} dt.$$

Далее, т. к. произвольную функцию $\mathbf{h} \in L_2(\Omega)$ можно представить в виде (см., например, [5]) $\mathbf{h} = \nabla \varphi + \mathbf{w}$, $\varphi \in W_2^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \nabla \xi \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \xi \in W_2^1(\Omega),$$

и при этом $\|\nabla \varphi\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\mathbf{h}\|_{L_2(\Omega)}$, $\|\mathbf{w}\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\mathbf{h}\|_{L_2(\Omega)}$, то из (6.3) следует, что

$$(6.4) \quad \left| \int_{\Omega} (\nabla \eta(t_2, \mathbf{x}) - \nabla \eta(t_1, \mathbf{x})) \cdot \mathbf{h} \, d\mathbf{x} \right| \leq \left(\int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{g}\|_{L_2(\Omega)} \, dt \right) \|\mathbf{h}\|_{L_2(\Omega)},$$

³³Но (3.37) пока еще не доказано, и в этом здесь проблема. Для гладких решений (доказательство априорных оценок) рассуждение, однако, верно.

что ввиду произвольности $\mathbf{h}$ означает

$$(6.5) \quad \|\nabla\eta(t_2) - \nabla\eta(t_1)\|_{L_2(\Omega)} \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{g}\|_{L_2(\Omega)} dt.$$

Отсюда, в свою очередь, с помощью неравенства Пуанкаре и (3.32), получаем неравенство

$$(6.6) \quad \|\eta(t_2) - \eta(t_1)\|_{W_2^1(\Omega)} \leq B_{83}(\Omega) \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{g}\|_{L_2(\Omega)} dt.$$

Теперь мы можем воспользоваться Теоремой 1.4.40 на стр. 15 из [6] и, ввиду (6.2), получить (3.37).

6.2. О существовании и единственности решения третьей краевой задачи для квазилинейного уравнения параболического типа.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\partial\Omega \in C^{2+\sigma_{23}}$, $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_{23} \in (0, 1)$. Рассмотрим третью краевую задачу для квазилинейного уравнения параболического типа:

$$(6.7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, \mathbf{x}, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b(t, \mathbf{x}, u, \nabla u) = 0 \quad \text{в } Q_T = (0, T) \times \Omega,$$

$$(6.8) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, \mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i + \psi(t, \mathbf{x}, u) = 0 \quad \text{на } [0, T] \times \partial\Omega,$$

$$(6.9) \quad u|_{t=0} = 0,$$

где $\mathbf{n} = \{n_i\}_{i=1}^n$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Искомой величиной является $u(t, \mathbf{x})$, при этом здесь и далее символ ∇ означает градиент по $\mathbf{x}$. Далее будем обозначать $\nabla u = \mathbf{g} = \{g_i\}_{i=1}^n$. Справедливо следующее утверждение — см. [16], Теорема 7.4, стр. 491.

Теорема 8. Пусть выполнены следующие условия:

(I) величины $a_{ij}(t, \mathbf{x}, u)$, $b(t, \mathbf{x}, u, \mathbf{g})$ и $\psi(t, \mathbf{x}, u)$ удовлетворяют неравенствам

$$(6.10) \quad 0 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \leq c_8 |\boldsymbol{\xi}|^2$$

$$\text{при } (t, \mathbf{x}, u) \in (0, T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\xi} = \{\xi_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n,$$

$$(6.11) \quad -ub \leq c_9 |\mathbf{g}|^2 + c_{10} u^2 + c_{11} \quad \text{при } (t, \mathbf{x}, u, \mathbf{g}) \in (0, T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

$$(6.12) \quad c_{12} |\boldsymbol{\xi}|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j, \quad -u\psi \leq c_{13} u^2 + c_{14}$$

$$\text{при } (t, \mathbf{x}, u) \in [0, T] \times \partial\Omega \times \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n,$$

где $c_8, c_{12} = \text{const} > 0$, $c_9, c_{10}, c_{11}, c_{13}, c_{14} = \text{const} \geq 0$;

(II) при $(t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \overline{\Omega}$, $|u| \leq B_{84}$ и $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ величины $a_{ij}(t, \mathbf{x}, u)$, $b(t, \mathbf{x}, u, \mathbf{g})$ и $\psi(t, \mathbf{x}, u)$ непрерывны по своим аргументам, обладают производными, входящими в условия

$$(6.13) \quad c_{15} |\boldsymbol{\xi}|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \leq c_{16} |\boldsymbol{\xi}|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n,$$

$$(6.14) \quad \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}, \nabla a_{ij}, \frac{\partial a_{ij}}{\partial u}, \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial t \partial u}, \nabla \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right), \nabla \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u} \right), \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial u^2} \right| \leq c_{16},$$

$$(6.15) \quad \left| \psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}, \nabla \psi, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial u}, \nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right), \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right| \leq c_{16},$$

$$(6.16) \quad \left| b, \frac{\partial b}{\partial t}, \frac{\partial b}{\partial u}, (1 + |\mathbf{g}|) \frac{\partial b}{\partial g_i} \right| \leq c_{16} (1 + |\mathbf{g}|^2),$$

где $c_{15}, c_{16} = \text{const} > 0$, и удовлетворяют этим условиям;

- (III) при $(t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \overline{\Omega}$, $|u| \leq B_{84}$, $|\mathbf{g}| \leq B_{85}$
- $\nabla a_{ij}(t, \mathbf{x}, u)$ непрерывны по $\mathbf{x}$ в смысле Гёльдера с показателем σ_{23} ,
  - $\nabla \psi(t, \mathbf{x}, u)$ непрерывна по t и $\mathbf{x}$ в смысле Гёльдера с показателями $\frac{\sigma_{23}}{2}$ и σ_{23} соответственно,
  - $b(t, \mathbf{x}, u, \mathbf{g})$ непрерывна по $\mathbf{x}$ в смысле Гёльдера с показателем σ_{23} ;

(IV) выполнено условие согласования $\psi(0, \mathbf{x}, 0)|_{\partial\Omega} = 0$.

Тогда задача (6.7)–(6.9) имеет единственное решение $u \in C^{1+\frac{\sigma_{23}}{2}, 2+\sigma_{23}}([0, T] \times \overline{\Omega})$.

Замечание 9. Утверждение Теоремы 8 остается в силе, если (см. [16], Теорема 7.4, стр. 491) вместо (6.10)–(6.12) величины $a_{ij}(t, \mathbf{x}, u)$, $b(t, \mathbf{x}, u, \mathbf{g})$ и $\psi(t, \mathbf{x}, u)$ удовлетворяют неравенствам

$$(6.17) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \text{при} \quad (t, \mathbf{x}, u) \in (0, T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\xi} = \{\xi_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n,$$

$$(6.18) \quad -ub|_{\mathbf{g}=0} \leq c_{17}u^2 + c_{18} \quad \text{при} \quad (t, \mathbf{x}, u) \in (0, T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

$$(6.19) \quad -u\psi < 0 \quad \text{при} \quad |u| > 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \partial\Omega,$$

где $c_{17}, c_{18} = \text{const} \geq 0$.

Замечание 10. Постоянные B_{84} и B_{85} берутся из оценок $|u| \leq B_{84}$ и $|\nabla u| \leq B_{85}$, справедливых для всех решений задачи (6.7)–(6.9). Таким образом, если эти оценки не использовать, то достаточно потребовать выполнения соответствующих условий при $B_{84} = B_{85} = +\infty$. Если это слишком обременительно, то нужно обеспечить выполнение этих условий при любых конечных B_{84}, B_{85} . При этом следует учесть следующее:

- (1) B_{84} зависит
  - в случае условий (6.10)–(6.12): от $T, \partial\Omega, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}$ и c_{16} ,
  - или, в случае условий (6.17)–(6.19): от T, c_{17}, c_{18} ;
- (2) B_{85} зависит от: $\partial\Omega, B_{84}, c_{15}, c_{16}$;

- (3) условия (6.13)–(6.16) содержат c_{16} и должны быть выполнены при $|u| \leq B_{84}$, где (в случае условий (6.10)–(6.12)) в свою очередь величина B_{84} зависит от c_{16} .

Таким образом,

- в случае условий (6.10)–(6.12) существование B_{84} и c_{16} для конкретной задачи (6.7)–(6.9) следует проверять из соответствующих функциональных уравнений (см. [16], стр. 488, 489);
- в случае условий (6.17)–(6.19) величина B_{84} не зависит от c_{16} , так что условия (6.13)–(6.16) достаточно проверить для любого конечного B_{84} .

Замечание 11. В условиях (6.10), (6.12) и (6.13) (или (6.17) и (6.13)), на первый взгляд, повторяются (уточняются) одни и те же условия на матрицу $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, но на самом деле там фигурируют разные значения переменных $(t, \mathbf{x}, u)$.

Замечание 12. Общий случай $u|_{t=0} = u_0 \in C^{2+\sigma_{23}}(\bar{\Omega})$ сводится к (6.9) заменой $v(t, \mathbf{x}) = u(t, \mathbf{x}) - u_0(\mathbf{x})$.

6.3. Проверка условий Теоремы 8 для приближенной задачи с дополнительным параметром ω . Рассмотрим задачу (5.3)–(5.5). Заменой $u = \theta - \theta_0^{\delta, \omega}$ с учетом (5.6) приведем ее к форме (6.7)–(6.9), где

$$\begin{aligned}
 a_{ij}(t, \mathbf{x}, u) &= \frac{\left[k \left(u + \theta_0^{\delta, \omega} \right) \right]^\omega}{\sum_{i=1}^2 ([\rho_i]^\omega + v) \left[c_{\theta i} \left(u + \theta_0^{\delta, \omega} \right) \right]^\omega} \delta_{ij}, \\
 b(t, \mathbf{x}, u, \mathbf{g}) &= \frac{1}{\sum_{i=1}^2 ([\rho_i]^\omega + v) \left[c_{\theta i} \left(u + \theta_0^{\delta, \omega} \right) \right]^\omega} \left(- \left[k \left(u + \theta_0^{\delta, \omega} \right) \right]^\omega \Delta \theta_0^{\delta, \omega} + \right. \\
 &+ \sum_{i=1}^2 \left[Q_i \left(u + \theta_0^{\delta, \omega} \right) \right]^\omega \frac{\partial [\rho_i]^\omega}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \left[c_{\theta i} \left(u + \theta_0^{\delta, \omega} \right) \right]^\omega [\rho_i \mathbf{u}_i]^\omega \cdot (\mathbf{g} + \nabla \theta_0^{\delta, \omega}) + \\
 &+ \sum_{i=1}^2 \left[Q_i \left(u + \theta_0^{\delta, \omega} \right) \right]^\omega \operatorname{div}([\rho_i \mathbf{u}_i]^\omega) - \left(\left[k \left(u + \theta_0^{\delta, \omega} \right) \right]^\omega \right)' \left| \mathbf{g} + \nabla \theta_0^{\delta, \omega} \right|^2 + \\
 &+ \left(u + \theta_0^{\delta, \omega} \right) \sum_{i=1}^2 [p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i]^\omega + \delta \left[\left(u + \theta_0^{\delta, \omega} \right)^{m+1} \right]^\omega - \\
 &- (1 - \delta) \sum_{i=1}^2 [\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i)]^\omega - a[|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2]^\omega - [\rho g^\delta]^\omega \Big), \\
 \psi(t, \mathbf{x}, u) &= \frac{\left[k \left(\theta_0^{\delta, \omega} \right) \right]^\omega \left[L^\delta \left(t, \mathbf{x}, u + \theta_0^{\delta, \omega} \right) \right]^\omega - \left[k \left(u + \theta_0^{\delta, \omega} \right) \right]^\omega [L^\delta(0, \mathbf{x}, \theta_0^{\delta, \omega})]^\omega}{\left[k \left(\theta_0^{\delta, \omega} \right) \right]^\omega \sum_{i=1}^2 ([\rho_i]^\omega + v) \left[c_{\theta i} \left(u + \theta_0^{\delta, \omega} \right) \right]^\omega},
 \end{aligned}$$

где $[Q_i(u)]^\omega$ и $[c_{\theta i}(u)]^\omega$ связаны формулой (5.10).

6.3.1. Проверка условия (I) Теоремы 8.

- Для выполнения (6.10) будем предполагать, что величины $[k(u)]^\omega$, $[c_{\theta i}(u)]^\omega$ для всех $u \in \mathbb{R}$ определены и удовлетворяют неравенствам

$$(6.20) \quad 0 < [k(u)]^\omega \leq c_{19}, \quad [c_{\theta i}(u)]^\omega \geq c_{20},$$

а для функции $[\rho_i]^\omega$ верна оценка

$$(6.21) \quad [\rho_i]^\omega \geq c_{21} - v, \quad (t, \mathbf{x}) \in (0, T] \times \bar{\Omega},$$

где постоянные $c_{19}, c_{20}, c_{21} > 0$;

- для выполнения (6.11) достаточно, чтобы, помимо (6.20) и (6.21), величины $[c_{\theta i}(u)]^\omega$, $([k(u)]^\omega)'$, $[u^{m+1}]^\omega$ для всех $u \in \mathbb{R}$ были определены и удовлетворяли неравенствам

$$(6.22) \quad [c_{\theta i}(u)]^\omega \leq c_{22}, \quad u([k(u)]^\omega)' \leq c_{23}, \quad \left| [u^{m+1}]^\omega \right| \leq c_{24},$$

а также чтобы выполнялись оценки

$$(6.23) \quad \left| \theta_0^{\delta, \omega}, \nabla \theta_0^{\delta, \omega}, \Delta \theta_0^{\delta, \omega}, \frac{\partial [\rho_i]^\omega}{\partial t}, [\rho_i \mathbf{u}_i]^\omega, \operatorname{div}([\rho_i \mathbf{u}_i]^\omega), [p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i]^\omega, \right. \\ \left. [\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i)]^\omega, [|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2]^\omega, [\rho g^\delta]^\omega \right| \leq c_{25}, \quad (t, \mathbf{x}) \in (0, T] \times \bar{\Omega},$$

где постоянные $c_{22}, c_{24}, c_{25} > 0$;

- для выполнения (6.12) достаточно, чтобы, помимо (6.20) и (6.21), при $(t, \mathbf{x}, u) \in [0, T] \times \partial\Omega \times \mathbb{R}$ выполнялись оценки

$$(6.24) \quad [\rho_i]^\omega \leq c_{26}, \quad [c_{\theta i}(u)]^\omega \leq c_{27}[k(u)]^\omega,$$

$$(6.25) \quad u \left[k \left(u + \theta_0^{\delta, \omega} \right) \right]^\omega [L^\delta(0, \mathbf{x}, \theta_0^{\delta, \omega})]^\omega - u \left[k \left(\theta_0^{\delta, \omega} \right) \right]^\omega \left[L^\delta \left(t, \mathbf{x}, u + \theta_0^{\delta, \omega} \right) \right]^\omega \leq \\ \leq c_{28} u^2 + c_{29},$$

где постоянные $c_{26}, c_{27} > 0$, а $c_{28}, c_{29} \geq 0$.

6.3.2. Проверка условия (II) Теоремы 8.

- Для выполнения (6.13) достаточно, чтобы, помимо (6.20)–(6.23), выполнялись оценки

$$(6.26) \quad [\rho_i]^\omega|_{t=0} \geq c_{30} - v, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad [\rho_i]^\omega \leq c_{31}, \quad (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Omega,$$

где постоянные $c_{30}, c_{31} > 0$;

- для выполнения (6.14) достаточно, чтобы, помимо приведенных выше условий, величины $([c_{\theta i}(u)]^\omega)'$, $([c_{\theta i}(u)]^\omega)''$, $([k(u)]^\omega)'$, $([k(u)]^\omega)''$ были определены для всех $u \in \mathbb{R}$ и удовлетворяли неравенствам

$$(6.27) \quad |([c_{\theta i}(u)]^\omega)', ([k(u)]^\omega)', ([c_{\theta i}(u)]^\omega)'', ([k(u)]^\omega)'')| \leq c_{32},$$

а также выполнялись оценки

$$(6.28) \quad \left| \frac{\partial [\rho_i]^\omega}{\partial t} \right|_{t=0}, \nabla [\rho_i]^\omega, \nabla \frac{\partial [\rho_i]^\omega}{\partial t} \leq c_{33}, \quad (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \bar{\Omega},$$

где постоянные $c_{32}, c_{33} > 0$;

- для выполнения (6.15) нужно, чтобы, помимо приведенных выше условий, величины

$$[L^\delta(t, \mathbf{x}, u)]^\omega, \quad \frac{\partial}{\partial t} [L^\delta(t, \mathbf{x}, u)]^\omega, \quad \nabla [L^\delta(t, \mathbf{x}, u)]^\omega, \quad \frac{\partial}{\partial u} [L^\delta(t, \mathbf{x}, u)]^\omega, \\ \frac{\partial^2}{\partial t \partial u} [L^\delta(t, \mathbf{x}, u)]^\omega, \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2} [L^\delta(t, \mathbf{x}, u)]^\omega, \quad \nabla \left(\frac{\partial}{\partial u} [L^\delta(t, \mathbf{x}, u)]^\omega \right)$$

для всех $(t, \mathbf{x}, u) \in [0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ были определены и при всех $|u| \leq c_{25} + B_{84}$ и $(t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \bar{\Omega}$ по модулю ограничены положительной постоянной;

- для выполнения (6.16) достаточно, чтобы, помимо приведенных выше условий, величина $([u^{m+1}]^\omega)'$ для всех $u \in \mathbb{R}$ была определена и по модулю ограничена положительной постоянной, оценки (6.23) выполнялись для всех $(t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \bar{\Omega}$ и, кроме того,

$$(6.29) \quad \left| \frac{\partial^2 [\rho_i]^\omega}{\partial t^2}, \frac{\partial}{\partial t} [\rho_i \mathbf{u}_i]^\omega, \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}([\rho_i \mathbf{u}_i]^\omega), \frac{\partial}{\partial t} [p_{\theta_i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i]^\omega, \frac{\partial}{\partial t} [\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i)]^\omega, \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial t} [|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2]^\omega, \frac{\partial}{\partial t} [\rho g^\delta]^\omega \right| \leq c_{25}, \quad (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \bar{\Omega},$$

где постоянная $c_{25} > 0$.

6.3.3. *Проверка условий (III), (IV) Теоремы 8.* Для выполнения условия (III) достаточно, чтобы при $(t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \bar{\Omega}$ выполнялись следующие условия (помимо сформулированных выше):

- $\theta_0^{\delta, \omega}, \nabla \theta_0^{\delta, \omega}, [\rho_i]^\omega, \nabla [\rho_i]^\omega$ непрерывно дифференцируемы по $\mathbf{x}$,
- $[L^\delta(t, \mathbf{x}, u)]^\omega, \nabla [L^\delta(t, \mathbf{x}, u)]^\omega, \frac{\partial}{\partial u} [L^\delta(t, \mathbf{x}, u)]^\omega, [\rho_i]^\omega$ непрерывно дифференцируемы по t и $\mathbf{x}$,
- $[\rho_i \mathbf{u}_i]^\omega, \operatorname{div}([\rho_i \mathbf{u}_i]^\omega), [p_{\theta_i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i]^\omega, [\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i)]^\omega, [|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2]^\omega, [\rho g^\delta]^\omega, \frac{\partial [\rho_i]^\omega}{\partial t}$ непрерывно дифференцируемы по $\mathbf{x}$, а $\Delta \theta_0^{\delta, \omega}$ непрерывна по $\mathbf{x}$ в смысле Гёльдера с показателем³⁴ $\sigma_{23} = \sigma_{12}$.

Условие (IV) Теоремы 8 выполнено в силу (5.6).

6.3.4. *Проверка условий Замечания 9.* Проверим условия³⁵, перечисленные в Замечании 9:

- для выполнения (6.17) достаточно, чтобы величины $[k(u)]^\omega, [c_{\theta_i}(u)]^\omega$ для всех $u \in \mathbb{R}$ были определены и удовлетворяли неравенствам

$$(6.30) \quad [k(u)]^\omega \geq 0, \quad [c_{\theta_i}(u)]^\omega > 0,$$

а для функции $[\rho_i]^\omega$ верна оценка

$$(6.31) \quad [\rho_i]^\omega > -v, \quad (t, \mathbf{x}) \in (0, T] \times \bar{\Omega};$$

³⁴Требуется также, чтобы $\partial \Omega \in C^{2+\sigma_{23}}$ — см. начало раздела 6.2, ср. начало раздела 5.

³⁵Они, напомним, могут служить альтернативой требованиям (6.20)–(6.25), нужным для выполнения условия (I) Теоремы 8. При этом, если выбран этот вариант, следует внимательно отследить, какие из условий перечисленных в (6.20)–(6.25) по-прежнему будут нужны для выполнения оставшихся пунктов Теоремы 8 (поскольку при проверке пп. (II), (III) Теоремы 8 употреблялся прием «помимо сказанного выше требуется...»).

- для выполнения (6.18) достаточно, чтобы при всех $u \in \mathbb{R}$ выполнялись неравенства

$$(6.32) \quad c_{35} \leq [c_{\theta i}(u)]^\omega \leq c_{36},$$

$$(6.33) \quad [k(u)]^\omega \leq c_{36}|u| + c_{37}, \quad u([k(u)]^\omega)' \leq c_{36}u^2 + c_{37},$$

$$\left| [u^{m+1}]^\omega \right| \leq c_{36}|u| + c_{37},$$

а также чтобы имели место оценки

$$(6.34) \quad [\rho_i]^\omega \geq c_{38} - v, \quad (t, \mathbf{x}) \in (0, T] \times \overline{\Omega},$$

$$(6.35) \quad \left| \theta_0^{\delta, \omega}, \nabla \theta_0^{\delta, \omega}, \Delta \theta_0^{\delta, \omega}, \frac{\partial [\rho_i]^\omega}{\partial t}, [\rho_i \mathbf{u}_i]^\omega, \operatorname{div}([\rho_i \mathbf{u}_i]^\omega), [p_{\theta i}(\rho_i) \operatorname{div} \mathbf{u}_i]^\omega \right| \leq c_{39},$$

$$(t, \mathbf{x}) \in (0, T] \times \overline{\Omega},$$

$$(6.36) \quad \left| \sum_{i=1}^2 [\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\mathbf{u}_i)]^\omega, a[|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2]^\omega, [\rho g^\delta]^\omega \right| \leq c_{39}, \quad (t, \mathbf{x}) \in (0, T] \times \overline{\Omega},$$

где $c_{35}, c_{36}, c_{38} > 0$, а $c_{37}, c_{39} \geq 0$;

- для выполнения (6.19) достаточно, чтобы

$$(6.37) \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad [k(u)]^\omega > 0,$$

причем для всех $(t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \partial\Omega$ при $u > 0$ выполняется неравенство

$$(6.38) \quad \left[k \left(\theta_0^{\delta, \omega} \right) \right]^\omega [L^\delta(t, \mathbf{x}, u + \theta_0^{\delta, \omega})]^\omega > \left[k \left(u + \theta_0^{\delta, \omega} \right) \right]^\omega [L^\delta(0, \mathbf{x}, \theta_0^{\delta, \omega})]^\omega,$$

а при $u < 0$ выполняется противоположное неравенство. В случае если $L^\delta > 0$ и не зависит от t , для этого достаточно выполнения неравенства

$$(6.39) \quad \ln[L^\delta(\mathbf{x}, a + b)]^\omega - \ln[L^\delta(\mathbf{x}, a)]^\omega > \ln[k(a + b)]^\omega - \ln[k(a)]^\omega$$

при всех $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ ($\mathbf{x} \in \partial\Omega$), и противоположного неравенства при $b < 0$.

Приведем примеры ситуаций, в которых выполнены неравенства (6.39) (с $L^\delta > 0$) или (6.38).

Пример 13. $[L^\delta(\mathbf{x}, \theta)]^\omega = ([k(\theta)]^\omega)^{\zeta(\mathbf{x}, \omega)}$, где $\zeta(\mathbf{x}, \omega) > 1$, а $[k(\theta)]^\omega$ строго возрастает по θ .

Пример 14. $[L^\delta(\mathbf{x}, \theta)]^\omega = L_0(\theta, \omega)(\theta - \widehat{\theta}(\mathbf{x}))$, где $L_0(\theta, \omega) > 0$, и кроме того³⁶ $\theta_0^{\delta, \omega}|_{\partial\Omega} = \widehat{\theta}$.

Пример 15. $[L^\delta(\mathbf{x}, \theta)]^\omega = ([k(\theta)]^\omega)^{\zeta(\mathbf{x}, \omega)}(\theta - \widehat{\theta}(\mathbf{x}))$, где $\zeta(\mathbf{x}, \omega) \geq 1$, $\theta_0^{\delta, \omega}|_{\partial\Omega} > \widehat{\theta}$, а $[k(\theta)]^\omega$ не убывает по θ .

³⁶Это искусственное ограничение, возникающее в связи с неестественным способом решения задачи с любыми начальными данными сведением к задаче (6.7)–(6.9) с нулевыми начальными данными, принятым в [16].

6.4. Вспомогательные утверждения.

Лемма 16. Пусть $\omega \in (0, 1)$, $|z| \in \left(1, \frac{1}{\omega}\right)$. Тогда (см. (5.7))

$$\pi_\omega(z) - \pi_\omega(0) - \frac{|z|}{12} > 0.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} 0 < \omega < \frac{1}{|z|} < 1 < |z| < \frac{1}{\omega} < +\infty &\implies \\ \implies \sqrt{z^2 + \omega^2} < \sqrt{2}|z| &\implies \omega\sqrt{z^2 + \omega^2} < \sqrt{2} \implies \\ \implies (1 + \omega^2) \left(1 + \omega\sqrt{z^2 + \omega^2}\right) \left(\omega + \sqrt{z^2 + \omega^2}\right) < \\ < 2 \left(1 + \sqrt{2}\right) \left(1 + \sqrt{2}|z|\right) < 2 \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 |z| < 12|z| &\implies \\ \pi_\omega(z) - \pi_\omega(0) = \frac{z^2}{(1 + \omega^2) \left(1 + \omega\sqrt{z^2 + \omega^2}\right) \left(\omega + \sqrt{z^2 + \omega^2}\right)} > \frac{|z|}{12}. &\quad \square \end{aligned}$$

Лемма 17. Пусть $v \in W_1^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$, $\partial\Omega \in C^1$. Тогда (см. (5.21))

$$(6.40) \quad \int_{\Omega} h(v) \Delta v \, dx \leq \int_{\partial\Omega} h(v) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \, d\sigma.$$

Доказательство. Для всех $\hat{\delta} > 0$ рассмотрим функцию $h_{\hat{\delta}} \in C^1(\mathbb{R})$ такую, что $0 \leq h_{\hat{\delta}} \leq 1$, $h'_{\hat{\delta}} \geq 0$, $h_{\hat{\delta}} \rightarrow h$ поточечно при $\hat{\delta} \rightarrow 0$. Заметим, что $\nabla v \in W_1^1(\Omega)$, а значит $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \in L_1(\partial\Omega)$. Имеем

$$\operatorname{div} (h_{\hat{\delta}}(v) \nabla v) = h_{\hat{\delta}}(v) \Delta v + h'_{\hat{\delta}}(v) |\nabla v|^2 \implies \int_{\partial\Omega} h_{\hat{\delta}}(v) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \, d\sigma \geq \int_{\Omega} h_{\hat{\delta}}(v) \Delta v \, dx.$$

При $\hat{\delta} \rightarrow 0$ по теореме Лебега получаем (6.40). $\square$

REFERENCES

- [1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I*, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), 623–727. MR0125307
- [2] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, V. N. Monakhov, *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, Studies in Mathematics and its Applications, **22**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990. MR1035212
- [3] D. Bresch, V. Giovangigli, E. Zatorska, *Two-velocity hydrodynamics in Fluid Mechanics. Part I: Well posedness for zero Mach number systems*, J. Math. Pures Appl., **104**:4 (2015), 762–800. MR3394616
- [4] D. Bresch, B. Desjardins, E. Zatorska, *Two-velocity hydrodynamics in Fluid Mechanics. Part II: Existence of global k-entropy solutions to compressible Navier-Stokes system with degenerate viscosities*, J. Math. Pures Appl., **104**:4 (2015), 801–836. MR3394617
- [5] E. B. Bykhovskii, N. V. Smirnov, *Orthogonal decomposition of the space of vector functions square-summable on a given domain, and the operators of vector analysis*, Trudy Mat. Inst. Steklov., **59** (1960), 5–36 (in Russian). MR0121641
- [6] T. Cazenave, A. Haraux, *An introduction to semilinear evolution equations*, Oxford: Clarendon Press, 1998. MR1691574

- [7] E. Feireisl, *On weak solutions to a diffuse interface model of a binary mixture of compressible fluids*, Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S, **9**:1 (2016), 173–183. MR3461654
- [8] E. Feireisl, H. Petzeltova, K. Trivisa, *Multicomponent reactive flows: Global-in-time existence for large data*, Communications on Pure and Applied Analysis, **7**:5 (2008), 1017–1047. MR2410865
- [9] E. Feireisl, *Dynamics of viscous compressible fluids*, Oxford: Oxford University Press, 2004. MR2040667
- [10] E. Feireisl, A. Novotny, *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids. Advances in Mathematical Fluid Mechanics*, Basel: Birkhauser, 2009. MR2499296
- [11] J. Frehse, S. Goj, J. Malek, *On a Stokes-like system for mixtures of fluids*, SIAM J. Math. Anal., **36**:4 (2005), 1259–1281. MR2139449
- [12] J. Frehse, S. Goj, J. Malek, *A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum*, Appl. Math., **50**:6 (2005), 527–541. MR2181024
- [13] J. Frehse, W. Weigant, *On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids*, Appl. Math., **53**:4 (2008), 319–345. MR2433725
- [14] V. Giovangigli, M. Pokorný, E. Zatorska, *On the steady flow of reactive gaseous mixture*, Analysis (Berlin), **35**:4 (2015), 319–341. MR3420315
- [15] A. V. Kazhikhov, A. N. Petrov, *Well-posedness of the initial-boundary value problem for a model system of equations of a multicomponent mixture*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **35** (1978), 61–73 (in Russian). MR539168
- [16] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Uraltseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, 1968. MR0241822
- [17] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence*, Methods and Applications of Analysis, **20**:2 (2013), 179–195. MR3119736
- [18] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Solvability of a stationary boundary-value problem for the equations of motion of a one-temperature mixture of viscous compressible heat-conducting fluids*, Izvestiya: Mathematics, **78**:3 (2014), 554–579. MR3241821
- [19] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Solvability of the regularized steady problem of the spatial motions of multicomponent viscous compressible fluids*, Siberian Math. J., **57**:6 (2016), 1044–1054. MR3614003
- [20] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Solvability of steady boundary value problem for the equations of polytropic motion of multicomponent viscous compressible fluids*, Siberian Electr. Math. Reports, **13** (2016), 664–693 (in Russian). MR3540771
- [21] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Solvability of initial boundary value problem for the equations of polytropic motion of multicomponent viscous compressible fluids*, Siberian Electr. Math. Reports, **13** (2016), 541–583 (in Russian). MR3528629
- [22] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory*, Siberian Electr. Math. Reports, **14** (2017), 388–397. MR3642147
- [23] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Existence of weak solutions to the three-dimensional problem of steady barotropic motions of mixtures of viscous compressible fluids*, Siberian Math. J., **58**:1 (2017), 113–127. MR3686948
- [24] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Global solvability of 1D equations of viscous compressible multi-fluids*, J. of Physics: Conference Series, **894** (2017), Art. 012059.
- [25] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Modeling viscous compressible barotropic multi-fluid flows*, J. of Physics: Conference Series, **894** (2017), Art. 012058.
- [26] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Unique solvability of initial-boundary value problem for one-dimensional equations of polytropic flows of multicomponent viscous compressible fluids*, Siberian Electr. Math. Reports, **15** (2018), 631–649. MR3814156
- [27] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Solvability of unsteady equations of multi-component viscous compressible fluids*, Izvestiya: Mathematics, **82**:1 (2018), 140–185. MR3749599
- [28] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Local solvability of initial-boundary value problem for one-dimensional equations of polytropic flows of viscous compressible multicomponent fluids*, J. of Math. Sciences, **231**:2 (2018), 227–242. MR3803034
- [29] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Global unique solvability of the initial-boundary value problem for the equations of one-dimensional polytropic flows of viscous compressible multicomponent fluids*, J. Math. Fluid Mech., **21**:1 (2019), article 9.

- [30] P. B. Mucha, M. Pokorný, E. Zatorska, *Heat-conducting, compressible mixtures with multicomponent diffusion: construction of a weak solution*, SIMA, **47**:5 (2015), 3747–3797. MR3403138
- [31] P. B. Mucha, M. Pokorný, E. Zatorska, *Chemically reacting mixtures in terms of degenerated parabolic setting*, J. Math. Phys., **54** (2013), 071501. MR3114200
- [32] R. I. Nigmatulin, *Dynamics of multiphase media, Vol. 1*, Hemisphere, N.Y., 1990.
- [33] L. Nirenberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, 1974. MR0488102
- [34] A. Novotný, I. Straškraba, *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, **27**, Oxford: Oxford University Press, 2004. MR2084891
- [35] A. N. Petrov, *Well-posedness of initial-boundary value problems for one-dimensional equations of interpenetrating motion of perfect gases*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **56** (1982), 105–121 (in Russian). MR706350
- [36] D. A. Prokudin, *Unique solvability of initial-boundary value problem for a model system of equations for the polytropic motion of a mixture of viscous compressible fluids*, Siberian Electr. Math. Reports, **14** (2017), 568–585 (in Russian). MR3693742
- [37] D. A. Prokudin, *Global solvability of the initial boundary value problem for a model system of one-dimensional equations of polytropic flows of viscous compressible fluid mixtures*, J. of Physics: Conference Series, **894** (2017), 012076.
- [38] D. A. Prokudin, M. V. Krayushkina, *Solvability of a stationary boundary value problem for a model system of the equations of barotropic motion of a mixture of compressible viscous fluids*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **10**:3 (2016), 417–428. MR3588953
- [39] K. L. Rajagopal, L. Tao, *Mechanics of mixtures*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, **35**, World Scientific, River Edge, NJ, 1995. MR1370661
- [40] V. A. Solonnikov, *Estimates in L_p of solutions of elliptic and parabolic systems*, Trudy Mat. Inst. Steklov., **102** (1967), 137–160 (in Russian). MR0228809
- [41] E. Zatorska, *On the flow of chemically reacting gaseous mixture*, J. Differential Equations, **253** (2012), 3471–3500. MR2981262

ALEXANDER EVGENYEVICH MAMONTOV, DMITRIY ALEXEYEVICH PROKUDIN
 LAVRENTYEV INSTITUTE OF HYDRODYNAMICS,
 15, LAVRENT'YEV AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
 E-mail address: aem@hydro.nsc.ru