Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. S. Sgibnev, The Wiener–Hopf equation in measures with probability kernel, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 609–617

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.039>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.84.234.179

April 26, 2023, 11:30:28

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 609–617 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.039

УДК 517.968

MSC 45E10

УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА-ХОПФА В МЕРАХ С ВЕРОЯТНОСТНЫМ ЯДРОМ

М.С. СГИБНЕВ

ABSTRACT. The paper deals with a generalization of the classical Wiener-Hopf equation where the functions involved are replaced by measures. A solution in explicit form is given, which coincides with the solution found by the method of successive approximations. An asymptotic property of the solution is also established.

Keywords: integral equation, measure, Wiener-Hopf equation, probability distribution, asymptotic behavior.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел, $\mathbb{R}_+$ — множество всех неотрицательных чисел и $\mathbb{R}_- := \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$ — множество всех отрицательных чисел. Обозначим через $\mathcal{B}$ σ -алгебру всех борелевских множеств прямой $\mathbb{R}$. Положим $\mathcal{B}(\mathbb{R}_\pm) := \{A \in \mathcal{B}: A \subseteq \mathbb{R}_\pm\}$. Классическое уравнение Винера-Хопфа имеет следующий вид:

$$(1) \quad z(x) = \int_0^\infty k(x-y)z(y) dy + g(x), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

где $z(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, — неизвестная функция, $k(x)$, $x \in \mathbb{R}$, и $g(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, — известные функции; функция $k(x)$ называется *ядром* уравнения (1). Интегральные уравнения (1) встречаются в ряде задач математической физики [1]. Перепишем уравнение (1) в виде

$$(2) \quad z(x) = \int_{-\infty}^x z(x-y)k(y) dy + g(x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

SGIBNEV, M.S., THE WIENER-HOPF EQUATION IN MEASURES WITH PROBABILITY KERNEL.

© 2019 СГИБНЕВ М.С.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2, проект № 0314-2016-0005.

Поступила 26 февраля 2019 г., опубликована 30 апреля 2019 г.

Если $k(x)$ — плотность распределения вероятностей F , то уравнение (2) превращается в уравнение

$$z(x) = \int_{-\infty}^x z(x-y) F(dy) + g(x), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

которое можно изучать, не предполагая абсолютной непрерывности распределения F (см. [2, 3]). Следующий шаг состоит в том, чтобы рассматривать еще более общее уравнение — уравнение в мерах:

$$(3) \quad z(A) = \int_{\mathbb{R}} z[(A-y) \cap \mathbb{R}_+] F(dy) + g(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+),$$

где z — неизвестная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, а g — известная конечная мера, заданная на $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$; здесь $A-y := \{x \in \mathbb{R} : x+y \in A\}$. Назовем уравнение (3) *уравнением Винера-Хопфа в мерах*. Мы будем изучать уравнение (3), ядром которого является неарифметическое распределение вероятностей F . Напомним (см. [4, гл. V, § 2, определение 3]), что распределение вероятностей F в $\mathbb{R}$ называется *арифметическим*, если оно сосредоточено на множестве точек вида $0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots$. Распределение, не являющееся арифметическим, называется *неарифметическим*.

Пусть ν и $\varkappa$ — конечные меры, определенные на σ -алгебре $\mathcal{B}$. Их *сверткой* назовем меру

$$\nu * \varkappa(A) := \iint_{\{x+y \in A\}} \nu(dx) \varkappa(dy) = \int_{\mathbb{R}} \nu(A-x) \varkappa(dx), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Обозначим через F^{n*} n -кратную свертку распределения F :

$$F^{1*} := 1, \quad F^{(n+1)*} := F^{n*} * F, \quad n \geq 1,$$

и $F^{0*} := \delta_0$ (атомическая мера единичной массы, сосредоточенная в нуле). Обозначим через $\hat{\nu}(s)$ преобразование Лапласа произвольной комплексной меры ν : $\hat{\nu}(s) := \int_{\mathbb{R}} e^{sx} \nu(dx)$, при условии, что данный интеграл имеет смысл. *Полной вариацией* $|\nu|$ вещественной меры ν на $\mathcal{B}$ называют положительную меру $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$, где $\nu^\pm$ — меры из разложения Жордана-Хана для меры ν [5, гл. IV]. Пусть $a(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — функция. Для $c \in \mathbb{C}$ полагаем отношение c/∞ равным нулю. Соотношение $a(x) \sim cb(x)$ при $x \rightarrow \infty$ означает, что $a(x)/b(x) \rightarrow c$ при $x \rightarrow \infty$; если $c = 0$, то $a(x) = o[b(x)]$, $x \rightarrow \infty$.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ И ЕГО ЯВНЫЙ ВИД

Положим $\bar{T}_+ := \min\{n \geq 1 : S_n \geq 0\}$. Случайная величина $\bar{H}_+ := S_{\bar{T}_+}$ называется *первой слабо возрастающей лестничной высотой*. Аналогично, $\bar{T}_- := \min\{n \geq 1 : S_n < 0\}$ и $\bar{H}_- := S_{\bar{T}_-}$ — *первая сильно убывающая лестничная высота*. Справедливо факторизационное тождество

$$(4) \quad 1 - \xi E(e^{sX_1}) = [1 - E(\xi^{\bar{T}_-} e^{s\bar{H}_-})][1 - E(\xi^{\bar{T}_+} e^{s\bar{H}_+})], \quad |\xi| \leq 1, \quad \Re s = 0.$$

Его можно доказать, модифицируя рассуждения из [4, гл. XVIII, § 3], приводящие к аналогичному тождеству для другого набора лестничных величин.

Рассмотрим уравнение (3). Достаточно установить существование его решения z для положительных мер g ; в случае вещественных мер следует воспользоваться разложением Жордана-Хана меры g в виде разности $g^+ - g^-$ положительных мер [5, гл. IV, предложение IV.1.1]. Тогда $z = z^+ - z^-$, где $z^\pm$ —

два решения уравнения (1) с положительными мерами $g^\pm$ вместо вещественной меры g . Для комплексных мер g используем представление $g = \Re g + i \Im g$. Обозначим через $F_\pm$ распределения случайных величин $\overline{\mathcal{H}}_\pm$ соответственно. Из тождества (4) вытекает равенство

$$(5) \quad \delta_0 - F = (\delta_0 - F_-) * (\delta_0 - F_+).$$

Пусть $U_\pm := \sum_{k=0}^{\infty} F_\pm^{k*}$ — меры восстановления, порожденные распределениями $F_\pm$ соответственно. Продолжим меру g на $\mathcal{B}$, полагая $g(A) := g(A \cap \mathbb{R}_+)$, $A \in \mathcal{B}$. Это соглашение будет действовать на протяжении всей статьи. Обозначим через $(U_- * g)|_{\mathbb{R}_+}$ сужение меры $U_- * g$ на множестве $\mathbb{R}_+$.

Теорема 1. Пусть F — распределение вероятностей в $\mathbb{R}$ и g — конечная мера, заданная на $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Тогда мера

$$(6) \quad z(A) := U_+ * [(U_- * g)|_{\mathbb{R}_+}](A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+),$$

является решением уравнения (3), совпадающим с решением, полученным методом последовательных приближений.

Доказательство. Положим $\xi \in (0, 1)$ в (4):

$$1 - \xi \widehat{F}(s) = [1 - \widehat{F}_{\xi-}(s)][1 - \widehat{F}_{\xi+}(s)], \quad \Re s = 0,$$

где $F_{\xi\pm}$ — положительные меры, сосредоточенные на множествах $\mathbb{R}_\pm$ соответственно, причем $F_{\xi\pm}(\mathbb{R}_\pm) < 1$. Найдём решение уравнения

$$(7) \quad z_\xi(A) = \xi \int_{\mathbb{R}} z_\xi[(A - y) \cap \mathbb{R}_+] F(dy) + g(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+),$$

методом последовательных приближений:

$$z_\xi^{(0)}(A) = g(A), \quad z_\xi^{(n)}(A) = \xi \int_{\mathbb{R}} z_\xi^{(n-1)}[(A - y) \cap \mathbb{R}_+] F(dy) + g(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+),$$

при $n \geq 1$. Очевидно, что $z_\xi^{(n)}(A) \uparrow$ при $n \uparrow \infty$ для любого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, и по теореме о монотонной сходимости предел $z_\xi(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_\xi^{(n)}(A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, — решение уравнения (7). Покажем, что z_ξ — конечная мера. Вместе с уравнением (1) рассмотрим уравнение восстановления

$$(8) \quad \zeta_\xi(A) = \xi \int_{\mathbb{R}} \zeta_\xi(A - y) F(dy) + g(A), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Построим его решение методом последовательных приближений:

$$\zeta_\xi^{(0)}(A) = g(A), \quad \zeta_\xi^{(n)}(A) = \xi \int_{\mathbb{R}} \zeta_\xi^{(n-1)}(A - y) F(dy) + g(A), \quad n = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что $\zeta_\xi^{(n)}(A) \uparrow$ при $n \uparrow$. Поэтому можно перейти к пределу под знаком интегрирования. Таким образом, пределы $\zeta_\xi(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_\xi^{(n)}(A)$, $A \in \mathcal{B}$, существуют, причем $z_\xi(A) \leq \zeta_\xi(A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Мера ζ_ξ — решение уравнения (8). Так как $\zeta_\xi^{(n)} = \sum_{k=0}^n \xi^k F^{k*} * g$, меру ζ_ξ можно представить в виде $\zeta_\xi(A) = U_\xi * g$, где $U_\xi := \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k F^{k*}$ — мера восстановления, порожденная несобственным распределением ξF , причем U_ξ — конечная мера, так как $\xi F(\mathbb{R}) = \xi < 1$. Следовательно, ζ_ξ — конечная мера. Таким образом, для уравнения (7) доказано существование решения z_ξ , представляющего собой конечную меру. Найдём его

явный вид. В статье [6] кратко изложена формальная схема решения классического уравнения Винера-Хопфа (см. также [7, гл. II, § 5, п. 5.4]). По аналогии с первым шагом этой схемы запишем уравнение (7) на всей прямой. Пусть

$$v_\xi(A) = \begin{cases} z_\xi(A) & \text{при } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \\ 0 & \text{при } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_-); \end{cases}$$

$$n_\xi(A) = \begin{cases} 0 & \text{при } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \\ -\xi \int_{\mathbb{R}} z_\xi[(A-y) \cap \mathbb{R}_-] F(dy) + g(A) & \text{при } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_-). \end{cases}$$

Мера n_ξ имеет смысл, так как $|n_\xi(A)| \leq \xi F * \zeta_\xi(A)$, причем $\xi F * \zeta_\xi$ — конечная мера. Уравнение (7) становится эквивалентным следующему уравнению восстановления:

$$v_\xi(A) = \xi \int_{\mathbb{R}} v_\xi(A-y) F(dy) + g(A) + n_\xi(A), \quad A \in \mathcal{B},$$

или кратко:

$$(9) \quad (\delta_0 - \xi F) * v_\xi = g + n_\xi.$$

Положим $U_{\xi\pm} := \sum_{n=0}^{\infty} F_{\xi\pm}^{n*}$. Меры $U_{\xi\pm}$ конечны. Образует свертки меры $U_{\xi-}$ с обеими частями уравнения (9). Из равенства $\delta_0 - \xi F = (\delta_0 - F_{\xi-}) * (\delta_0 - F_{\xi+})$ вытекает, что

$$U_{\xi-} * (\delta_0 - \xi F) = \delta_0 - F_{\xi+}.$$

Поэтому

$$(10) \quad (\delta_0 - F_{\xi+}) * v_\xi(A) = U_{\xi-} * (g + n_\xi)(A), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Конечная мера $U_{\xi-}$ неотрицательна и сосредоточена на $\mathbb{R}_- \cup \{0\}$. Левая часть соотношения (10) обращается тождественно в нуль на $\mathcal{B}(\mathbb{R}_-)$. Следовательно,

$$[U_{\xi-} * (g + n_\xi)]|_{\mathbb{R}_-} = 0,$$

откуда вытекает, что $U_{\xi-} * n_\xi = -(U_{\xi-} * g)|_{\mathbb{R}_-}$. Образует свертки обеих частей этого равенства с мерой $\delta_0 - F_{\xi-}$. Получаем

$$n_\xi = -(\delta_0 - F_{\xi-}) * [(U_{\xi-} * g)|_{\mathbb{R}_-}].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} v_\xi &= U_\xi * (g + n_\xi) = U_\xi * \{g - (\delta_0 - F_{\xi-}) * [(U_{\xi-} * g)|_{\mathbb{R}_-}]\} \\ &= U_\xi * \{g - (\delta_0 - F_{\xi-})(U_{\xi-} * g) + (\delta_0 - F_{\xi-}) * [(U_{\xi-} * g)|_{\mathbb{R}_+}]\} \\ &= U_\xi * \{(\delta_0 - F_{\xi-}) * [(U_{\xi-} * g)|_{\mathbb{R}_+}]\} = U_{\xi+} * [(U_{\xi-} * g)|_{\mathbb{R}_+}]. \end{aligned}$$

Устремляя $\xi \uparrow 1$ и применяя теорему о монотонной сходимости, убеждаемся в том, что $z(A) := \lim_{\xi \uparrow 1} z_\xi(A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, — решение уравнения (3), и что для него справедливо равенство (6). Докажем последнее утверждение теоремы. Образует последовательные приближения $z^{(n)}$ для исходного уравнения (3):

$$z^{(0)}(A) = g(A), \quad z^{(n)}(A) = \int_{\mathbb{R}} z^{(n-1)}[(A-y) \cap \mathbb{R}_+] F(dy) + g(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

Имеем $z^{(n)}(A) \uparrow$, $n \uparrow$. Существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)}(A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Покажем, что они совпадают с найденным решением (6) уравнения (3). В силу

монотонной сходимости и индукции по n имеем

$$z^{(n)}(A) = \lim_{\xi \uparrow 1} z_{\xi}^{(n)}(A) \leq \lim_{\xi \uparrow 1} z_{\xi}(A) = z(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$z_{\xi}(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} z_{\xi}^{(n)}(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)}(A) \leq \lim_{\xi \uparrow 1} z_{\xi}(A) = z(A).$$

Переходя к пределу при $\xi \uparrow 1$ получаем равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)}(A) = z(A)$, т.е. решение z , определяемое формулой (6), совпадает с решением $\{\lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)}(A)\}$, полученным методом последовательных приближений. $\square$

Пусть X_k , $k \geq 1$, — независимые случайные величины с одним и тем же распределением F , не сосредоточенным в нуле. Эти величины порождают случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$. Согласно теореме 1 в [4, гл. XII, § 2] существуют только два типа случайных блужданий: 1) осциллирующий тип (S_n колеблется с вероятностью единица между $-\infty$ и $+\infty$); 2) уходящий тип (с вероятностью единица S_n стремится либо к $-\infty$, либо к $+\infty$). Теорема 1 справедлива для *всех* типов вероятностных распределений: как для распределений осциллирующего типа, так и для распределений уходящего типа. Если существует математическое ожидание $\mathbf{E}X_1 := \int_{\mathbb{R}} x F(dx)$, то при $\mathbf{E}X_1 > 0$ согласно закону больших чисел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n/n = \mathbf{E}X_1$ почти наверно (см. [5, предложение IV.7.1]), т.е. случайное блуждание уходит в $+\infty$. В этом случае $\bar{T}_+ < \infty$ почти наверно и распределение F_+ собственное. Кроме того, для случайных блужданий, уходящих в $+\infty$, F_- — несобственное распределение, сосредоточенное на $\mathbb{R}_-$: $F_-(\mathbb{R}_-) < 1$, см. [4, гл. XVII, § 4, пример а)]. Соответствующая мера восстановления U_- конечна и $U_-(\mathbb{R}_- \cup \{0\}) = 1/[1 - F_-(\mathbb{R}_-)]$.

Пусть ядро F в уравнении (3) — несобственное распределение. Тогда метод последовательных приближений дает решение этого уравнения в виде *конечной* меры (см. часть доказательства теоремы 1, относящуюся к уравнению (7)).

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предварительно докажем лемму и установим неарифметичность распределения F_+ . Обозначим через $\mathbb{Z}$ множество целых чисел.

Определение 1. Пусть $f(x)$ ограниченная вещественная функция на $\mathbb{R}$. При фиксированном $h > 0$ обозначим соответственно через m_n и M_n инфимум и супремум $f(x)$ на интервале $(nh, (n+1)h]$, $n \in \mathbb{Z}$. Предположим, что ряды $\sigma = h \sum m_n$ и $\bar{\sigma} = h \sum M_n$ сходятся абсолютно. Функция $f(x)$ называется *непосредственно интегрируемой по Риману*, если

$$\lim_{h \downarrow 0} (\bar{\sigma} - \sigma) = 0;$$

см. [4, XI, § 1] и [8, § 2, определение 2.5.1].

Лемма 1. Пусть ν — конечная вещественная мера на $\mathbb{R}$ и $a > 0$. Тогда функция $f(x) = \nu((x, x+a])$, $x \in \mathbb{R}$, непосредственно интегрируема по Риману.

Доказательство. Пусть x, y — произвольные точки интервала $(nh, (n+1)h]$. Если $y \leq z$, то

$$f(z) - f(y) = \nu((y+a, z+a]) - \nu((y, z]),$$

откуда

$$(11) \quad |f(z) - f(y)| \leq |\nu|((nh + a, (n+1)h + a]) + |\nu|((nh, (n+1)h]).$$

Это неравенство справедливо при любом расположении точек y, z из интервала $(nh, (n+1)h]$. Пусть $\{y_k\}, \{z_k\}$ — последовательности точек интервала $(nh, (n+1)h]$ такие, что

$$m_n = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k), \quad M_n = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k).$$

Из неравенства (11) вытекает, что

$$M_n - m_n \leq |\nu|((nh + a, (n+1)h + a]) + |\nu|((nh, (n+1)h]).$$

Окончательно имеем: при $h \rightarrow 0$

$$\bar{\sigma} - \underline{\sigma} \leq h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{|\nu|((nh + a, (n+1)h + a]) + |\nu|((nh, (n+1)h])\} = 2h|\nu|(\mathbb{R}) \rightarrow 0.$$

Лемма 1 доказана. $\square$

Определение 2. Распределение вероятностей G на $\mathbb{R}$ называется *решётчатым*, если оно сосредоточено на множестве, образующем арифметическую прогрессию, т.е. на множестве точек вида $a + j\lambda$, где $a \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ — постоянные числа, а $j \in \mathbb{Z}$. Наибольшее число λ , обладающее этим свойством, называется *шагом* G .

Лемма 2. Пусть F — неарифметическое распределение вероятностей такое, что с вероятностью единица S_n стремится к $+\infty$. Тогда F_+ также является неарифметическим распределением.

Доказательство. Распределение вероятностей G на $\mathbb{R}$ является решетчатым тогда и только тогда, когда найдется вещественное число $t_0 \neq 0$ такое, что $|\hat{G}(it_0)| = 1$ [9, теорема 2.1.4]. Анализируя доказательство этой теоремы, видим, что G — арифметическое распределение в том и только в том случае, когда найдется вещественное число $t_0 \neq 0$ такое, что $\hat{G}(it_0) = 1$. Шаг λ решетчатого распределения G определяется следующими соотношениями [10, гл. IV, упр. 7]: $|\hat{G}(it)| < 1$ при $0 < |t| < 2\pi/\lambda$ (t вещественно) и $|\hat{G}(2\pi i/\lambda)| = 1$. Если G — арифметическое распределение, то его шаг λ определяется из соотношений $\hat{G}(it) \neq 1$ при $0 < |t| < 2\pi/\lambda$ (t вещественно) и $\hat{G}(2\pi i/\lambda) = 1$. Далее рассуждаем от противного. Допустим, что распределение F_+ является арифметическим с шагом λ . Тогда $\hat{F}_+(2\pi i/\lambda) = 1$. Переходя от мер к преобразованиям Лапласа в (5) и полагая $s = 2\pi i/\lambda$, получаем

$$1 - \hat{F}(2\pi i/\lambda) = [1 - \hat{F}_-(2\pi i/\lambda)][1 - \hat{F}_+(2\pi i/\lambda)] = 0,$$

откуда согласно приведенному критерию арифметичности для вероятностных распределений вытекает, что распределение F также должно быть арифметическим вопреки предположению. Поэтому F_+ — неарифметическое распределение. Лемма доказана. $\square$

Пусть g — конечная вещественная мера, заданная на σ -алгебре $\mathcal{B}$. Обозначим через $g(x)$ ее функцию распределения: $g(x) := g((-\infty, x])$ при $x \in \mathbb{R}$. Положим $g(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = g(\mathbb{R})$ и $g(x-0) := \lim_{\Delta \downarrow 0} g(x - \Delta)$. Если мера g сосредоточена на $\mathbb{R}_+$, то значение $g(x-0)$ в точке $x = 0$ равно нулю.

Теорема 2. Пусть F — неарифметическое распределение вероятностей такое, что

$$\mu := \mathbf{E}X_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x F(dx) \in (0, +\infty],$$

и пусть g — конечная вещественная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Тогда решение z уравнения (3) удовлетворяет следующему соотношению:

$$(12) \quad z((x, x+h]) \rightarrow \frac{hg(\mathbb{R}_+)}{\mu} - \frac{h}{\mu_+} \int_{-\infty}^{0+} g(-y-0) U_-(dy), \quad x \rightarrow \infty;$$

здесь $h > 0$ — фиксированное число, $\mu_+ = \mathbf{E}\bar{\mathcal{H}}_+ = \int_0^\infty x F_+(dx)$.

Доказательство. Положим $\mathcal{T}_+ := \min\{n \geq 1: S_n > 0\}$. Случайная величина $\mathcal{H}_+ := S_{\mathcal{T}_+}$ называется *первой строго возрастающей лестничной высотой*. Если μ конечно и положительно, то $\mathbf{E}\mathcal{H}_+ \in (0, +\infty)$ (см. [4, гл. XII, § 2, теорема 2]). Следовательно, μ_+ также конечно и положительно, поскольку $X_1 = S_1 \leq \bar{\mathcal{H}}_+ \leq \mathcal{H}_+$ почти наверно. Кроме того, $\mu_+ \geq \mu$. Таким образом, если $\mu = +\infty$ то и $\mu_+ = +\infty$.

Так как U_- — конечная мера, то мера $U_- * g$ конечна и, следовательно, конечна мера $(U_- * g)|_{\mathbb{R}_+}$. По лемме 1 функция $(U_- * g)|_{\mathbb{R}_+}((x, x+h])$ непосредственно интегрируема по Риману. Применяем теорему 2 из [4, гл. XI, § 1] (см. также замечание после формулировки теоремы 1 в [4, гл. XI, § 9]), получаем

$$z((x, x+h]) \rightarrow \frac{1}{\mu_+} \int_{\mathbb{R}} (U_- * g)((x, x+h] \cap \mathbb{R}_+) dx, \quad x \rightarrow \infty.$$

Интеграл равен следующему выражению:

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^0 \int_{-\infty}^{0+} g([-y, x-y+h]) U_-(dy) dx + \int_0^\infty \int_{-\infty}^{0+} g((x-y, x-y+h]) U_-(dy) dx \\ &= \int_{-\infty}^{0+} \int_{-h}^0 g([-y, x-y+h]) dx U_-(dy) + \int_{-\infty}^{0+} \int_0^\infty g((x-y, x-y+h]) dx U_-(dy). \end{aligned}$$

Обозначая данные слагаемые через I_1 и I_2 , осуществим преобразования:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{0+} \int_{-h}^0 [g(x-y+h) - g(-y-0)] dx U_-(dy) \\ &= \int_{-\infty}^{0+} \int_0^h g(x-y) dx U_-(dy) - h \int_{-\infty}^{0+} g(-y-0) U_-(dy); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g((x-y, x-y+h]) dx &= \int_0^\infty [g(x-y+h) - g(x-y)] dx \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left[\int_0^B g(x-y+h) dx - \int_0^B g(x-y) dx \right] \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left[\int_h^{B+h} g(x-y) dx - \int_0^B g(x-y) dx \right] = hg(\infty) - \int_0^h g(x-y) dx; \end{aligned}$$

$$I_2 = hg(\infty)U_-(\mathbb{R}_- \cap \{0\}) - \int_{-\infty}^{0+} \int_0^h g(x-y) dx U_-(y).$$

Складывая I_1 и I_2 , производя сокращение и умножая на $1/\mu_+$, получаем требуемую асимптотику (12), так как из формулы (5) вытекают равенства

$$\mu = \mu_+[1 - F_-(\mathbb{R}_-)] = \frac{\mu_+}{U_-(\mathbb{R}_- \cup \{0\})}.$$

Действительно, перейдем в формуле (5) от мер к преобразованиям Лапласа, затем разделим обе части на $-s$. Получим соотношение

$$\frac{\widehat{F}(s) - 1}{s} = [1 - \widehat{F}_-(s)] \frac{\widehat{F}_+(s) - 1}{s}, \quad \Re s = 0.$$

Устремим s к нулю. Тогда дроби в левой и правой частях будут стремиться к μ и μ_+ соответственно. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2. Тогда*

$$z([0, x]) \sim x \left[\frac{g(\mathbb{R}_+)}{\mu} - \frac{1}{\mu_+} \int_{-\infty}^{0+} g(-y - 0) U_-(dy) \right], \quad x \rightarrow \infty;$$

если $\mu = +\infty$, то $z([0, x]) = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

Предположим, что F сосредоточено на $\mathbb{R}_+$ и $g = F$. Тогда уравнение (3) совпадает с уравнением восстановления $z = z * F + F$. Известная теорема Блеквелла [4, гл. XI, § 1, теорема 1] утверждает, что если $\mu = EX_1 \in (0, +\infty]$ и $h > 0$ — фиксированное число, то в этом случае $z((x, x + h]) \rightarrow h/\mu$ при $x \rightarrow \infty$. Мы видим полное совпадение с формулой (12) для уравнения Винера-Хопфа в мерах, так как в данном случае $F(\mathbb{R}_+) = 1$, $U_- = \delta_0$ и $F(0 - 0) = 0$, поскольку функция распределения $F(x)$ обращается в нуль при $x < 0$. Имеет место аналогичное совпадение следствия 1 с так называемой *элементарной теоремой восстановления*: если $F(\mathbb{R}_+) = 1$ и $g = F$, то $z([0, x]) \sim x/\mu$, $x \rightarrow \infty$ (см. [4, гл. XI, § 4]).

Установим связь уравнения (3) для мер с классическим уравнением Винера-Хопфа (1). Предположим, что мера g абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и распределение F имеет плотность $k(x)$. В этом случае решение z уравнения (3), задаваемое формулой (6), абсолютно непрерывно. Действительно, если хотя бы одна из двух мер абсолютно непрерывна, то их свертка также абсолютно непрерывна. Поэтому абсолютно непрерывны мера $U_- * g$, ее сужение на $\mathbb{R}_+$ и решение $z = U_+ * [(U_- * g)|_{\mathbb{R}_+}]$. Мера, задаваемая интегралом в (3), абсолютно непрерывна как разность $z - g$ абсолютно непрерывных мер. Возьмем $A = [0, x]$. Так как мера z сосредоточена на $\mathbb{R}_+$, можем считать, что ее плотность $z'(v) \equiv 0$ на $\mathbb{R}_-$. Тогда

$$z[(A - y) \cap \mathbb{R}_+] = \int_{A-y} z'(v) dv.$$

Имеем

$$\int_0^x z'(u) du = \int_{-\infty}^x \int_{-y}^{x-y} z'(v) dv k(y) dy + \int_0^x g'(u) du.$$

Преобразуем повторный интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x \int_0^x z'(u - y) du k(y) dy \\ = \int_0^x \int_{-\infty}^x z'(u - y) k(y) dy du = \int_0^x \int_{-\infty}^u z'(u - y) k(y) dy du. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\int_0^x \left[z'(u) - \int_{-\infty}^u z'(u-y)k(y) dy - g'(u) \right] du \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество, приходим к классическому уравнению Винера-Хопфа для неизвестной плотности z' :

$$z'(x) = \int_{-\infty}^x z'(x-y)k(y) dy + g'(x).$$

Таким образом, в абсолютно непрерывном случае уравнение Винера-Хопфа (3) для мер эквивалентно классическому уравнению Винера-Хопфа (1) для соответствующих плотностей.

REFERENCES

- [1] V.A. Fock, *On some integral equations of mathematical physics*, Matematicheskii Sbornik, **14**:1–2 (1944), 3–50. MR0012190
- [2] M.S. Sgibnev, *Wiener-Hopf equation whose kernel is a probability distribution*, Differential equations, **53**:9 (2017), 1209–1231. MR3714954
- [3] M.S. Sgibnev, *On the inhomogeneous conservative Wiener-Hopf equation*, Siberian Mathematical Journal, **58**:6 (2017), 1090–1103. MR3783880
- [4] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications. Volume II*, New York–London–Sydney: John Wiley & Sons, 1966. MR0210154
- [5] J. Neveu, *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*, Paris: Masson et Cie, 1964. MR0198504
- [6] V.I. Dmitriev, *The Wiener-Hopf equation*, in: Mathematical Encyclopedia. Volume 1 [Russian], Sovetskaya Entsiklopediya, Moscow, (1977), 697–698.
- [7] F.D. Gakhov, Yu.I. Cherskii, *Equations of the convolution type*, Nauka, Moscow, 1978 [Russian]. MR527628
- [8] G. Alsmeyer, *Erneuerungstheorie*, Stuttgart: B.G. Teubner, 1991. MR1119301
- [9] E. Lukacs, *Characteristic Functions. Second Edition*, London: Griffin, 1970. MR0346874
- [10] M. Loève, *Probability Theory. Second Edition*, New Jersey–Toronto–New York–London: D. Van Nostrand Company Inc. Princeton, 1960. MR0123342

MIKHAIL SERGEYEVICH SGIBNEV
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 4, KOPTYUGA AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: `sgibnev@math.nsc.ru`