I. Yu. Shevchenko, About effective versions of game theoretical semantics for first-order logic, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 618–637

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.040>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.196.121.252

April 26, 2023, 12:35:25

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 618–637 (2019)

УДК 510.64

DOI 10.33048/semi.2019.16.040

MSC 03B60, 03C80, 03F65

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ ВЕРСИЯХ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ
СЕМАНТИКИ ДЛЯ ЛОГИКИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

И.Ю. ШЕВЧЕНКО

ABSTRACT. In the article we compare two approaches to effectivisation of game theoretical semantics for first-order logic. One of the approaches was provided by Sergey P. Odintsov, Stanislav O. Speranski, Igor Yu. Shevchenko in the previous article, and it is based on a game-theoretical reconstruction of strategy conception. In this article we provide the other approach — we consider a strategy as a function determined on a set of histories and then we set an equivalence between these two approaches.

Keywords: game theoretical semantics, Nelson’s realizability, computability.

1. ВВЕДЕНИЕ

В [3], среди прочих, был решен вопрос о конструктивной версии теоретико-игровой семантики (GTS) для логики первого порядка в языке без импликации ($\text{FOL}^{\neg}$). Оказалось, что эффективная версия GTS эквивалентна семантике реализуемости по Нельсону. Данный результат был получен на основе теоретико-множественной реконструкции понятия стратегии в GTS. С другой стороны, Хинтикка [1], рассуждая об эффективной версии GTS, предположил, что конструктивисты ограничились бы требованием к стратегии — быть вычислимой функцией.

В этой статье мы преследуем следующую цель — найти эффективную версию GTS, основанную на подходе Хинтикки, и проверить, будет ли она эквивалентна версии, предложенной в [3]. Статья имеет следующую структуру:

- в разделе 2 рассмотрены определения экстенсивной игры и стратегии;

SHEVCHENKO, I.YU., ABOUT EFFECTIVE VERSIONS OF GAME THEORETICAL SEMANTICS FOR FIRST-ORDER LOGIC.

© 2019 Шевченко И.Ю.

Поступила 29 июля 2018 г., опубликована 15 мая 2019 г.

- в разделе 3 рассмотрено математическое определение GTS для $FOL^{\rightarrow}$ из [3], где за основу была взята формализация из [5], но с небольшими изменениями;
- в разделе 4 рассмотрено определение семантики реализуемости по Нельсону, также с незначительными отличиями от оригинала из [2];
- в разделе 5 кратко описан теоретико-множественный подход к реконструкции GTS для $FOL^{\rightarrow}$, который рассматривался в [3];
- в разделе 6 определены конструкции, которые позволяют работать с объектами формальной теоретико-игровой GTS в композиционном ключе, определены ключевые понятия *эффективной* теоретико-игровой стратегии и *эффективной полезной* теоретико-игровой стратегии, и, наконец, доказано, что множества выигрышных эффективных полезных стратегий сводимы к реализациям по Нельсону, а реализации в свою очередь можно преобразовать в выигрышные стратегии при помощи вычислимых с оракулом X функций, где X — множество номеров пустой функции.

2. ЭКСТЕНСИВНЫЕ ИГРЫ

Следуя [4] и [5], напомним, как определяются игры в экстенсивной форме с полной информацией. При этом мы сфокусируем внимание на win-lose играх.

Определение 2.1. *Win-lose игра в экстенсивной форме с полной информацией* — это пятерка $\langle N, H, Z, P, u \rangle$ со следующими компонентами:

- N — множество, элементы которого являются *игроками*;
- H — множество конечных последовательностей (*историй*), которое обладает следующим свойством: если $(a_1, \dots, a_l) \in H$ и $(a_1, \dots, a_n) \in H$, то для всех $l \leq m \leq n$ с необходимостью выполняется $(a_1, \dots, a_m) \in H$. Будем называть $(a_1, \dots, a_l)$ *начальным сегментом* $(a_1, \dots, a_m)$, а $(a_1, \dots, a_n)$ — *продолжением* $(a_1, \dots, a_m)$. В дальнейшем отношение быть сегментом(продолжением) обозначаем так:

$$(a_1, \dots, a_l) \leq (a_1, \dots, a_m) \leq (a_1, \dots, a_n),$$

также положим для $a, b \in H$

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b.$$

- $Z \subseteq H$ — множество историй без собственных продолжений в H (*терминальные истории*). Каждая история из H может быть продолжена до истории из Z ;
- $P: (H \setminus Z) \rightarrow N$ — *функция очереди*, которая сопоставляет игрока каждой нетерминальной истории;
- $u: Z \rightarrow N$ — *функция выигрыша*, которая сопоставляет победителя каждой терминальной истории.

Переход от нетерминальной истории $h = (a_1, \dots, a_m)$ к одному из её продолжений $h \frown a = (a_1, \dots, a_m, a)$ в H происходит с помощью *действия*. Будем отождествлять действия с последним элементом истории-продолжения. Функция очереди показывает, чья очередь ходить. Для каждой нетерминальной истории $h = (a_1, \dots, a_m)$ игрок $P(h)$ выбирает действие a' из множества

$$A(h) = \{a: (a_1, \dots, a_m, a) \in H\},$$

и игра продолжается с историей $h' = (a_1, \dots, a_m, a')$.

Определение 2.2. Пусть $H_p = P^{-1}(p)$ — множество историй, в которых очередь хода за игроком p , и $A = \bigcup_{h \in H} A(h)$ — множество всех возможных действий в игре.

Будем называть функцию $\delta_p: H_p \rightarrow A$ *стратегией игрока p* , если для каждой истории из H_p выполнено условие

$$\delta_p(h) \in A(h).$$

Игрок p *следует* стратегии δ_p на протяжении истории $h' = (a_1, \dots, a_n)$, если всякий раз, когда $h = (a_1, \dots, a_m) \in H_p$ является начальным сегментом h' , история

$$h \frown \delta_p(h) = (a_1, \dots, a_m, \delta_p(h))$$

также является начальным сегментом h' .

Определение 2.3. Определим множества:

- Δ_p — множество всех стратегий игрока p ;
- H_{δ_p} — истории, на протяжении которых игрок p следовал стратегии δ_p (*полезное множество*);
- $Z_{\delta_p} = H_{\delta_p} \cap Z$ — терминальные истории, на протяжении которых игрок p следовал стратегии δ_p ;
- $Z_p = u^{-1}(p)$ — терминальные истории, в которых выигрывает игрок p .

Стратегия δ_p игрока p называется *выигрышной*, если $Z_{\delta_p} \subseteq Z_p$, т.е. все терминальные истории из H_{δ_p} приводят к выигрышу.

3. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ СЕМАНТИКА

Зафиксируем множество индивидуальных переменных FOL[↗]-языка Var и сигнатуру Σ . Если $\mathbb{M}$ — модель сигнатуры Σ , то под *означиванием* в $\mathbb{M}$ будем понимать функцию

$$s : X \rightarrow |\mathbb{M}|,$$

где $X \subseteq Var$ и $|\mathbb{M}|$ — носитель $\mathbb{M}$. В таком случае будем писать $\text{dom}(s) = X$. Будем называть означивание s *конечным*, если множество $\text{dom}(s)$ конечно. В качестве связок и кванторов будем рассматривать только $\vee$, $\sim$ и $\exists$. Конъюнкция и квантор всеобщности обычным образом выражаются через дизъюнкцию, отрицание, и квантор существования.

Введём обозначения:

- $\mathbb{M}, s \models \Phi$ — краткое обозначение утверждения «FOL[↗]-формула Φ истинна в $\mathbb{M}$ на означивании s »;
- $\langle s \rangle_x^a$ — означивание, которое сопоставляет переменной x значение a , а на остальных аргументах согласовано с s ;
- $Sub(\Phi)$ — множество вхождений подформул Φ в формулу Φ ;
- $Atom(\Phi)$ — множество атомарных подформул формулы Φ ;
- $Free(\Phi)$ — множество свободных переменных формулы Φ ;
- $Var(\Phi)$ — множество переменных, входящих в формулу Φ .

Определение 3.1. Рассмотрим FOL[↗]-формулу Φ , модель $\mathbb{M}$ и конечное¹ означивание s в $\mathbb{M}$ с условием $\text{dom}(s) \supseteq \text{Free}(\Phi)$. *Семантическая игра* $G(\mathbb{M}, s, \Phi)$

¹Мы не будем работать с бесконечными множествами формул, поэтому не будем рассматривать бесконечные означивания. Однако, в [5] от означиваний не требовали быть конечными.

— это win-lose игра в экстенсивной форме с полной информацией, определённая следующим образом:

- Есть два игрока — Элоиза ($\exists$) и Абельяр ($\forall$). Также у игроков есть роли: *верификатор* и *фальсификатор*. В течение игры игроки могут меняться ролями по правилам, определённым в следующем пункте.
- Множество историй — это

$$H = \bigcup \{H_\chi : \chi \in \text{Sub}(\Phi)\},$$

где множества H_χ будут определены ниже. Параллельно будут определены функции $\text{ver} : H \rightarrow \{\exists, \forall\}$ и $\text{fals} : H \rightarrow \{\exists, \forall\}$, обозначающие роли игроков для каждой истории.

- $H_\Phi = \{(s, \Phi)\}$, $\text{ver}((s, \Phi)) = \exists$, $\text{fals}((s, \Phi)) = \forall$;
- если $\chi = \chi_1 \vee \chi_2$, то $H_{\chi_i} = \{h \frown \chi_i : h \in H_{\chi_1 \vee \chi_2}\}$,
 $\text{ver}(h \frown \chi_i) = \text{ver}(h)$, $\text{fals}(h \frown \chi_i) = \text{fals}(h)$;
- если $\chi = \exists x \varphi$, то $H_\varphi = \{h \frown (x, a) : h \in H_{\exists x \varphi}, a \in M\}$,
 $\text{ver}(h \frown (x, a)) = \text{ver}(h)$, $\text{fals}(h \frown (x, a)) = \text{fals}(h)$;
- если $\chi = \sim \varphi$, то $H_\varphi = \{h \frown \varphi : h \in H_{\sim \varphi}\}$,
 $\text{ver}(h \frown \varphi) = \text{fals}(h)$, $\text{fals}(h \frown \varphi) = \text{ver}(h)$.²

Означивание s будем называть *начальным означиванием*. Каждая история h' порождает означивание $s_{h'}$, расширяющее или изменяющее начальное означивание:

$$s_{h'} = \begin{cases} s, & \text{если } h' = (s, \Phi), \\ s_h, & \text{если } h' = h \frown \chi \text{ для некоторой } \chi \in \text{Sub}(\Phi), \\ \langle s_h \rangle_x^a, & \text{если } h' = h \frown (x, a) \text{ для некоторого } a \in M. \end{cases}$$

- Игра заканчивается, как только она достигает атомарной формулы:

$$Z = \bigcup \{H_\chi : \chi \in \text{Atom}(\Phi)\}.$$

- Функция очереди P в точности совпадает с функцией ver :

$$P(h) = \text{ver}(h).$$

- Функция выигрыша определена на терминальных историях $h \in Z$ и выражена через истинность соответствующих атомарных вхождений $\chi \in \text{Atom}(\Phi)$:

$$u(h) = \begin{cases} \text{ver}(h), & \text{если } \mathbb{M}, s_h \models \chi, \\ \text{fals}(h), & \text{если } \mathbb{M}, s_h \not\models \chi. \end{cases}$$

Теперь определим, когда $\text{FOL}^{\rightsquigarrow}$ -формула истинна в теоретико-игровой семантике.

Определение 3.2. Рассмотрим $\text{FOL}^{\rightsquigarrow}$ -формулу Φ , модель $\mathbb{M}$ и конечное означивание s в $\mathbb{M}$ с условием $\text{dom}(s) \supseteq \text{Free}(\Phi)$. Тогда

$$\mathbb{M}, s \models_{GTS} \Phi \iff \text{Элоиза обладает выигрышной стратегией в игре } G(\mathbb{M}, s, \Phi).$$

²Чтобы выиграть в игре для $\sim \varphi$, верификатор должен опровергнуть φ . Это означает, что верификатор в игре для $\sim \varphi$ должен выступить в роли фальсификатора в игре для φ . Таким образом, символ отрицания инициирует смену ролей игроков.

Когда Φ является предложением, будем писать $\mathbb{M} \models_{GTS} \Phi$. Также обратим внимание [5], что теоретико-игровая и классическая семантики эквивалентны для $\text{FOL}^{\leftrightarrow}$:

Теорема 3.3. *Рассмотрим $\text{FOL}^{\leftrightarrow}$ -формулу Φ , модель $\mathbb{M}$ и конечное означивание s в $\mathbb{M}$ с условием $\text{dom}(s) \supseteq \text{Free}(\Phi)$. Тогда*

$$\mathbb{M}, s \models_{GTS} \Phi \Leftrightarrow \mathbb{M}, s \models \Phi.$$

4. РЕАЛИЗУЕМОСТЬ ПО НЕЛЬСОНУ

Напомним определение семантики реализуемости по Нельсону из [2]. Рассмотрим эффективную нумерацию $\{g_e\}_{e \in N}$ частично-рекурсивных функций, для которой верна s - m - n -теорема. Зафиксируем некоторую общерекурсивную биекцию $[\cdot, \cdot]$ из $N \times N$ на N , через l и r обозначим левую и правую проекции соответственно. Т.е. для всех $\{n, k\} \subseteq N$,

$$l_{[n,k]} = n, \quad r_{[n,k]} = k \quad \text{и} \quad [l_n, r_n] = n.$$

Пусть $\Sigma_{\mathbb{N}} = \{0, s, +, \times, =\}$ — сигнатура арифметики Пеано. Рассмотрим её стандартную модель $\mathbb{N} = \langle N; 0^{\mathbb{N}}, s^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, \times^{\mathbb{N}}, =^{\mathbb{N}} \rangle$. Для любого числа $e \in N$, $\text{FOL}^{\leftrightarrow}$ -формулы Φ сигнатуры $\Sigma_{\mathbb{N}}$ и конечного означивания s в $\mathbb{N}$ с условием $\text{dom}(s) \supseteq \text{Free}(\Phi)$ определим по индукции отношения

$$e \mathbb{R}_p s, \Phi \quad \text{и} \quad e \mathbb{R}_n s, \Phi$$

следующим образом (at обозначает атомарную формулу):

Позитивная реализуемость $\mathbb{R}_p$

$$\begin{aligned} e \mathbb{R}_p s, at & \Leftrightarrow e = 0 \text{ и } \mathbb{N}, s \models at; \\ e \mathbb{R}_p s, \varphi \vee \psi & \Leftrightarrow \text{либо } e = [1, k], \text{ где } k \mathbb{R}_p s, \varphi, \\ & \text{либо } e = [2, k], \text{ где } k \mathbb{R}_p s, \psi; \\ e \mathbb{R}_p s, \exists x \varphi & \Leftrightarrow e = [n, k] \text{ где } k \mathbb{R}_p \langle s \rangle_x^n, \varphi; \\ e \mathbb{R}_p s, \sim \varphi & \Leftrightarrow e \mathbb{R}_n s, \varphi. \end{aligned}$$

Негативная реализуемость $\mathbb{R}_n$

$$\begin{aligned} e \mathbb{R}_n s, at & \Leftrightarrow e = 0 \text{ и } \mathbb{N}, s \not\models at; \\ e \mathbb{R}_n s, \varphi \vee \psi & \Leftrightarrow e = [n, k], \text{ где } n \mathbb{R}_n s, \varphi \text{ и } k \mathbb{R}_n s, \psi; \\ e \mathbb{R}_n s, \exists x \varphi & \Leftrightarrow \text{для всех } n \in N \text{ верно } g_e(n) \mathbb{R}_n \langle s \rangle_x^n, \varphi; \\ e \mathbb{R}_n s, \sim \varphi & \Leftrightarrow e \mathbb{R}_p s, \varphi. \end{aligned}$$

Запись $e \mathbb{R}_p s, \Phi$ читается как « e позитивно реализует Φ при означивании s » или « e является позитивной реализацией Φ при означивании s ». Будем говорить, что Φ позитивно реализуема при означивании s тогда и только тогда, когда $e \mathbb{R}_p s, \Phi$ для некоторого натурального числа e . Аналогичным образом определяются термины для $\mathbb{R}_n$.

Каждую позитивную (негативную) реализацию Φ при означивании s можно рассматривать как код эффективной процедуры верификации (фальсификации) Φ в $\mathbb{N}$ при означивании s .

Для удобства, определения $\mathbb{R}_p$ и $\mathbb{R}_n$, описанные здесь, немного отличаются от определений из [2].

- i. Поскольку в GTS не рассматриваются формулы с импликациями, мы ограничили реализуемость на язык $FOL^{\rightarrow}$, хотя в [2] отношения для формул вида $\varphi \rightarrow \psi$ определены.
- ii. Вместо первопорядковых $\Sigma_{\mathbb{N}}$ -предложений мы используем пары (s, Φ) , где Φ — $FOL^{\rightarrow}$ -формула сигнатуры $\Sigma_{\mathbb{N}}$ и s — конечное означивание в $\mathbb{N}$ с условием $\text{dom}(s) \supseteq \text{Free}(\Phi)$.
- iii. Нельсон рассматривал примитивы $\wedge$ и $\forall$, хотя его условия для $\varphi \wedge \psi$ и $\forall x \varphi$ эквивалентны условиям для $\sim (\sim \varphi \vee \sim \psi)$ и $\sim \exists x \sim \varphi$. Мы будем считать эти примитивы определяемыми.

По умолчанию $\mathbb{R}_p$ и $\mathbb{R}_n$ интерпретируются над $\mathbb{N}$. Однако подобные определения можно дать для любой конструктивной модели.

Также в [2] показана связь между выводимостью в арифметике и реализуемостью:

Теорема 4.1. *Если $FOL^{\rightarrow 3}$ -формула выводима в арифметике Нельсона⁴, то она позитивно реализуема.*

В обратную сторону теорема не работает, поскольку множество позитивно реализуемых формул арифметики Нельсона не является рекурсивно перечислимым.

5. ФОРМАЛЬНЫЕ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ СТРАТЕГИИ И ИХ ЭФФЕКТИВИЗАЦИЯ

В этой главе мы кратко напомним теоретико-множественный подход к рассмотрению стратегий из [3]. Все необходимые инструкции для выигрыша в игре можно описать формальными объектами теории множеств.

Рассмотрим $FOL^{\rightarrow}$ -формулу Φ , модель $\mathbb{M}$ и конечное означивание s в $\mathbb{M}$ с условием $\text{dom}(s) \supseteq \text{Free}(\Phi)$. Определим по индукции множества формальных стратегий

$$S^+(\mathbb{M}, s, \Phi) \quad \text{и} \quad S^-(\mathbb{M}, s, \Phi)$$

следующим образом (где снова at обозначает атомарную формулу):

Множества выигрышных стратегий верификатора

$$\begin{aligned} S^+(\mathbb{M}, s, at) &:= \{0\}, \text{ если } \mathbb{M}, s \models at, \text{ и } \emptyset \text{ иначе;} \\ S^+(\mathbb{M}, s, \varphi \vee \psi) &:= (\{1\} \times S^+(\mathbb{M}, s, \varphi)) \cup (\{2\} \times S^+(\mathbb{M}, s, \psi)); \\ S^+(\mathbb{M}, s, \exists x \varphi) &:= \{\langle a, t \rangle \mid a \in M \text{ и } t \in S^+(\mathbb{M}, \langle s \rangle_x^a, \varphi)\}; \\ S^+(\mathbb{M}, s, \sim \varphi) &:= S^-(\mathbb{M}, s, \varphi). \end{aligned}$$

³В [2] говорится про любую формулу первого порядка, поэтому для языка $FOL^{\rightarrow}$ утверждение тоже верно.

⁴Арифметика Нельсона — теоретико-числовая система, предложенная в [2] — аналог арифметики Пеано.

Множества выигрышных стратегий фальсификатора

$$\begin{aligned}
S^-(\mathbb{M}, s, at) &:= \{0\}, \text{ если } \mathbb{M}, s \not\models at, \text{ и } \emptyset \text{ иначе;} \\
S^-(\mathbb{M}, s, \varphi \vee \psi) &:= S^-(\mathbb{M}, s, \varphi) \times S^-(\mathbb{M}, s, \psi); \\
S^-(\mathbb{M}, s, \exists x \varphi) &:= \text{множество всех функций } f \text{ с } \text{dom}(f) = M \text{ таких, что} \\
&\quad f(a) \in S^-(\mathbb{M}, \langle s \rangle_x^a, \varphi) \text{ для каждого } a \in M; \\
S^-(\mathbb{M}, s, \sim \varphi) &:= S^+(\mathbb{M}, s, \varphi).
\end{aligned}$$

Замечание 5.1. В [3] стратегии, у которых совпадают полезные множества, отождествляются. Можно сказать, что вместо самих стратегий рассматриваются классы эквивалентности по отношению $\delta_1 \sim \delta_2 \Leftrightarrow H_{\delta_1} = H_{\delta_2}$.

В [3] показано, что об элементах $S^+(\mathbb{M}, s, \Phi)$ и $S^-(\mathbb{M}, s, \Phi)$ можно думать как о выигрышных стратегиях Элоизы и Абеляра в игре $G(\mathbb{M}, s, \Phi)$ с точностью до $\sim$.

Теорема 5.2. Для любых $\text{FOL}^{\rightarrow}$ -формулы Φ , модели $\mathbb{M}$ и конечного означивания s в $\mathbb{M}$ с условием $\text{dom}(s) \supseteq \text{Free}(\Phi)$, существуют такие канонические биекции ι^+ и ι^- , что:

- ι^+ отображает $S^+(\mathbb{M}, s, \Phi)$ на множество всех классов эквивалентности выигрышных стратегий Элоизы в игре $G(\mathbb{M}, s, \Phi)$ по отношению $\sim$;
- ι^- отображает $S^-(\mathbb{M}, s, \Phi)$ на множество всех классов эквивалентности выигрышных стратегий Абеляра в игре $G(\mathbb{M}, s, \Phi)$ по отношению $\sim$.

Более того, в [3] показано, что об эффективных элементах $S^+(\mathbb{N}, s, \Phi)$ и $S^-(\mathbb{N}, s, \Phi)$ можно думать как о реализациях по Нельсону.

Пусть $\mathbb{S}^\circ (\circ \in \{+, -\})$ — множество всех троек $\langle s, \Phi, t \rangle$ где Φ — $\text{FOL}^{\rightarrow}$ -формула, s — конечное означивание в $\mathbb{N}$ с условием $\text{dom}(s) \supseteq \text{Free}(\Phi)$ и $t \in S^\circ(\mathbb{N}, s, \Phi)$. Определим функции

$$E^+ : \mathbb{S}^+ \rightarrow \mathcal{P}(N) \quad \text{и} \quad E^- : \mathbb{S}^- \rightarrow \mathcal{P}(N)$$

индукцией по сложности Φ следующим образом:

Для любой тройки $\langle s, \Phi, t \rangle$ из $\mathbb{S}^+$:

- если $\Phi = at$, то $t = 0$ и $E^+(s, \Phi, t) = \{0\}$;
- если $\Phi = \varphi \vee \psi$, то $t = \langle i, t' \rangle$ для $i \in \{1, 2\}$ и подходящей ⁵ t' , и
$$E^+(s, \Phi, t) = \{[1, k] \mid k \in E^+(s, \varphi, t')\} \cup \{[2, k] \mid k \in E^+(s, \psi, t')\};$$
- если $\Phi = \exists x \varphi$, то $t = \langle n, t' \rangle$ для подходящих n и t' , и
$$E^+(s, \Phi, t) = \{[n, k] \mid k \in E^+(\langle s \rangle_x^n, \varphi, t')\};$$
- если $\Phi = \neg \varphi$, то $E^+(s, \Phi, t) = E^-(s, \varphi, t)$.

Для любой тройки $\langle s, \Phi, t \rangle$ из $\mathbb{S}^-$:

- если $\Phi = at$, то $t = 0$, и $E^-(s, \Phi, t) = \{0\}$;

⁵Под "подходящими" понимаем объекты, удовлетворяющие свойствам из определений $S^+(\mathbb{N}, s, \Phi)$ и $S^-(\mathbb{N}, s, \Phi)$

- если $\Phi = \varphi \vee \psi$, то $t = \langle t_1, t_2 \rangle$ для подходящих t_1 и t_2 , и

$$E^-(s, \Phi, t) = \{[n, k] \mid n \in E^-(s, \varphi, t_1) \text{ и } k \in E^-(s, \psi, t_2)\};$$
- если $\Phi = \exists x \varphi$, то $t = f$ для подходящих f , и

$$E^-(s, \Phi, t) = \{e \in N \mid \text{для всех } n \in N, g_e(n) \in E^-(\langle s \rangle_x^n, \varphi, f(n))\};$$
- если $\Phi = \neg \varphi$, то $E^-(s, \Phi, t) = E^+(s, \varphi, t)$.

Определение 5.3. Пусть Φ — $\text{FOL}^{\neg}$ -формула, s — конечное означивание в $\mathbb{N}$ с условием $\text{dom}(s) \supseteq \text{Free}(\Phi)$. Будем называть стратегию $t \in S^\circ(\mathbb{N}, s, \Phi)$ ($\circ \in \{+, -\}$) *эффективной*, если $E^\circ(s, \Phi, t) \neq \emptyset$.

Таким образом, если $t \in S^\circ(\mathbb{N}, s, \Phi)$, то каждый номер в $E^\circ(s, \Phi, t) \neq \emptyset$ кодирует алгоритм для вычисления t . Конечно, такой подход к эффективизации напоминает кодирование формул реализациями Нельсона. Собственно, в [3] показана эквивалентность этих двух подходов:

Предложение 5.4. Пусть Φ — $\text{FOL}^{\neg}$ -формула сигнатуры $\Sigma_{\mathbb{N}}$ и s — конечное означивание в $\mathbb{N}$ с условием $\text{dom}(s) \supseteq \text{Free}(\Phi)$. Для любого числа $e \in N$ верны следующие утверждения:

$$\begin{aligned} e @_p s, \Phi &\iff e \in E^+(s, \Phi, t) \text{ для некоторой } t \in S^+(\mathbb{N}, s, \Phi), \\ e @_n s, \Phi &\iff e \in E^-(s, \Phi, t) \text{ для некоторой } t \in S^-(\mathbb{N}, s, \Phi). \end{aligned}$$

Более того, если выполнено условие слева, то t однозначно определена по e , s и Φ .

Можно считать, что цель этой статьи заключается в доказательстве аналога теоремы 5.4, где вместо эффективных теоретико-множественных стратегий рассматриваются эффективные теоретико-игровые стратегии.

6. ЭФФЕКТИВНЫЕ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ СТРАТЕГИИ

Замечание 6.1. С этого момента все рассуждения будут рассматриваться только в контексте стандартной модели арифметики. Мы поступаем так, потому что реализуемость определена как раз для этой модели. Однако все результаты естественным образом распространяются на любую конструктивную модель, как и само определение реализуемости. Для краткости будем в дальнейшем писать $G(s, \Phi)$ вместо $G(\mathbb{N}, s, \Phi)$.

Мы рассмотрели два подхода к определению стратегий — *стандартный* и *формальный теоретико-множественный*. Также в [3], среди всех формальных стратегий, были выделены эффективные, а затем было показано, что коды эффективных формальных стратегий — это в точности реализации по Нельсону.

В этой главе мы определим *стандартные эффективные* стратегии, а также покажем, что множества таких стратегий и всех реализаций по Нельсону эффективно сводимы друг к другу.

Замечание 6.2. Зафиксируем $\text{FOL}^{\neg}$ -формулу Φ сигнатуры $\Sigma_{\mathbb{N}}$ и s — конечное означивание в $\mathbb{N}$ с условием $\text{dom}(s) \supseteq \text{Free}(\Phi)$.

Рассмотрим дерево $\langle H, \leq \rangle$, где H — множество всех историй игры $G(s, \Phi)$, а $\leq$ — отношение из определения 2.1. Несложно заметить, что H — разрешимое

множество, а $\leq$ — разрешимое отношение. Ещё заметим, что правила семантической игры гарантируют вычислимость функции определения верификатора $\text{ver}(h)$ для $h \in H$. Из предыдущих выкладок и соотношения

$$H_{\exists} = \{h \in H : \text{ver}(h) = \exists\}$$

закключаем, что множество историй $H_{\exists}$ также разрешимо. Аналогичным образом устанавливается разрешимость множества $H_{\forall}$.

Далее определим эффективным образом вхождение Φ_h , полученное разбором Φ в ходе истории $h \in H$, следующим образом:

$$\Phi_h = \begin{cases} \Phi, & \text{если } h = (s, \Phi), \\ \chi_1, & \text{если } h = (s, \Phi, \dots, \chi_1), \\ \chi_2, & \text{если } h = (s, \Phi, \dots, \exists x_1 \dots \exists x_n \chi_2) \wedge ((x_1, a_1), \dots, (x_n, a_n)), \\ & (x_i, a_i) \in \text{Var}(\Phi) \times N. \end{cases}$$

Наконец, из соотношения

$$A(h) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } \Phi_h = at, \\ \{\varphi, \psi\}, & \text{если } \Phi_h = \varphi \vee \psi, \\ \{(x, a) : a \in N\}, & \text{если } \Phi_h = \exists x \varphi, \\ \{\varphi\}, & \text{если } \Phi_h = \sim \varphi, \end{cases}$$

закключаем, что множество всех действий игры $A = \bigcup_{h \in H} A(h)$ также разрешимо.

Таким образом, множества A , $H_{\exists}$, $H_{\forall}$ кодируются натуральными числами. Зафиксируем некоторую нумерацию этих множеств и перейдем к рассмотрению числового аналога стратегии $\delta_p : H_p \rightarrow A$.

Определение 6.3. Будем называть стратегию δ_p *эффективной*, если её числовой аналог g_e является частично-рекурсивной функцией. В таком случае за номер эффективной стратегии δ_p принимаем число e .

При условии, что игрок p следовал стратегии δ_p на протяжении всей игры, он не сможет дойти до историй из $H_p \setminus H_{\delta_p}$ (*бесполезное множество*). Следовательно, действие δ_p на таких историях не имеет никакого значения для игрока, а вся необходимая информация содержится в ограничении стратегии на полезное множество. Отсюда заключаем, что существуют стратегии, одинаковые содержательно, но различные с формальной точки зрения. В частности, стратегии, у которых совпадает полезное множество и которые согласованы на нём, могут отличаться в плане эффективности. Выделим стратегии, которые на бесполезных множествах ведут себя одинаково, т.е. в каждом классе эквивалентности

$$\delta_1 \sim \delta_2 \Leftrightarrow H_{\delta_1} = H_{\delta_2}$$

выделим некий канонический элемент.

Определение 6.4. Будем называть стратегию σ_p игрока p *полезной*, если для любой истории h из $H_p \setminus H_{\sigma_p}$ выполнено условие:

$$\sigma_p(h) = \min\{A(h)\},$$

где минимум берется по номерам элементов в множестве A .

Определение 6.5. Пусть X — некоторое разрешимое множество и g_e — его характеристическая функция. Тогда натуральное число e будем называть *индексом* множества X .

Предложение 6.6. *Справедливы следующие утверждения:*

- если δ_p — эффективная стратегия, то H_{δ_p} — разрешимое полезное множество и его индекс эффективно вычисляется по номеру δ_p ;
- если H_{σ_p} — разрешимое полезное множество для некоторой полезной стратегии σ_p , то σ_p — эффективная стратегия.

Доказательство. Рассмотрим эффективную стратегию δ_p игрока p и характеристическую функцию соответствующего полезного множества H_{δ_p} :

$$\text{char}_{H_{\delta_p}}(h') = \begin{cases} 1, & \text{если для всех } h \preceq h': \\ & h \in H_p \Rightarrow h \cap \delta_p(h) \leq h', \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для вычисления функции требуется найти все начальные отрезки h' , выбрать среди них принадлежащие H_p и для каждого полученного отрезка h проверить, выполняется ли одно из условий: $h \cap \delta_p(h) \leq h'$. Все три шага алгоритма эффективны в силу конечного числа начальных отрезков h' , разрешимости H_p и $\leq$, а также в силу эффективности δ_p .

Теперь пусть полезное множество H_{σ_p} разрешимо. Тогда частичная рекурсивность полезной стратегии σ_p становится очевидной при следующем её определении:

$$\sigma_p(h) = \begin{cases} (x, a), & \text{если } h \cap (x, a) \in H_{\sigma_p}, \\ \varphi, & \text{если } h \cap \varphi \in H_{\sigma_p}, \\ \min\{A(h)\}, & \text{иначе и при условии } h \in H_p. \end{cases}$$

□

Таким образом, полезные эффективные стратегии можно рассматривать и как рекурсивные функции, и как разрешимые множества.

6.1. Преобразования стратегий. Между рассмотренными подходами к определению стратегий есть одно существенное отличие: теоретико-игровые стратегии не обладают явной композициональной структурой, в отличие от реализаций. Поэтому мы определим конструкции, позволяющие работать с теоретико-игровыми стратегиями в композициональном ключе. В дальнейшем, к множествам всех историй и стратегий, к полезным множествам, а также к множествам H_p будем приписывать начальную историю, чтобы различать принадлежность этих объектов к разным играм. Например, запись $H(s_1, \Phi_1)$ будет обозначать множество всех историй игры $G(s_1, \Phi_1)$, а для множества всех историй игры $G(s_2, \Phi_2)$ мы используем обозначение $H(s_2, \Phi_2)$.

Пусть $h \in H(s, \Phi)$ и P — функция очереди из $G(s, \Phi)$. Определим преобразование

$$[\]_h: \{h' \in H(s, \Phi) \mid h \leq h'\} \rightarrow H(s_h, \Phi_h)$$

следующим образом:

$$[h \cap q]_h = (s_h, \Phi_h) \cap q.$$

При этом истории $h \frown q$ и $(s_h, \Phi_h) \frown q$ отличаются только начальными сегментами h и (s_h, Φ_h) , а дальше последовательность действий $q = (a_1, \dots, a_n)$ совпадает.⁶ Такое преобразование будем называть *проекцией историй вдоль h* .

Аналогичным образом определим *проекцию стратегий*. Для неё мы также будем использовать обозначение $[\]_h$:

$$\begin{aligned} [\]_h &: \Delta_{\exists}(s, \Phi) \cup \Delta_{\forall}(s, \Phi) \rightarrow \Delta_{P(h)}(s_h, \Phi_h), \\ [\delta_p]_h([h \frown q]_h) &= \delta_p(h \frown q). \end{aligned}$$

Одинаковое обозначение проекций историй и стратегий не приводит к неоднозначности, т.к. области определения у этих преобразований не пересекаются, и из контекста ясно, о какой функции идет речь.

Предложение 6.7. Пусть заданы $\text{FOL}^{\leftrightarrow}$ -формула Φ сигнатуры $\Sigma_{\mathbb{N}}$, конечное означивание s в $\mathbb{N}$ с условием $\text{dom}(s) \supseteq \text{Free}(\Phi)$, история $h \in H(s, \Phi)$ и стратегия $\delta \in \Delta_p(s, \Phi)$. Верны следующие утверждения:

- (1) проекция историй вдоль h — биективная функция;
- (2) числовой аналог проекции историй вдоль h — частично-рекурсивная функция;
- (3) $[\text{dom}([\]_h) \cap H_p(s, \Phi)]_h = \begin{cases} H_p(s_h, \Phi_h), & \text{если } P(h) = \exists, \\ H_{\bar{p}}(s_h, \Phi_h), & \text{если } P(h) = \forall, \end{cases}$
где $\bar{p} \in \{\exists, \forall\}$ и $\bar{p} \neq p$;
- (4) $[\text{dom}([\]_h) \cap H_{\delta}(s, \Phi)]_h = H_{[\delta]_h}(s_h, \Phi_h)$, при этом
 $[\delta]_h \in \Delta_p(s_h, \Phi_h)$, если $P(h) = \exists$,
 $[\delta]_h \in \Delta_{\bar{p}}(s_h, \Phi_h)$, если $P(h) = \forall$;
- (5) если H_{δ} — разрешимое множество, то $[H_{\delta}]_h$ также разрешимое множество, и его индекс эффективно вычисляется по индексу H_{δ} и истории h ;
- (6) если δ — эффективная стратегия, то $[\delta]_h$ — также эффективная стратегия, и её номер эффективно вычисляется по номеру δ_p и истории h ;

Утверждения (1) и (2) следуют из построения проекции историй. Утверждения (3) и (4) проверяются разбором случаев, когда $\Phi_h = at$, $\Phi_h = \varphi \vee \psi$, $\Phi_h = \exists x \varphi$, $\Phi_h = \sim \varphi$. Последние два утверждения также следуют из построения проекции.

Замечание 6.8. Номер выигрышной эффективной полезной стратегии Элоизи будем сокращенно называть $\exists$ -*newus* — аббревиатурой от английского *number of effective winning useful strategy*. Соответственно, номер выигрышной эффективной полезной стратегии Абеляра назовем $\forall$ -*newus*.

Предложение 6.9. Существуют такие частично-рекурсивные функции μ_0^+ и μ_0^- , что для любой бесквантроной $\text{FOL}^{\leftrightarrow}$ -формулы Φ сигнатуры $\Sigma_{\mathbb{N}}$, конечного означивания s в $\mathbb{N}$ с условием $\text{dom}(s) \supseteq \text{Free}(\Phi)$, а также для любого

⁶Очевидно, что остаточная последовательность q не является историей ни для какой игры, поскольку она состоит только из действий и не содержит начального означивания.

числа $e \in N$, выполнены следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} e\mathbb{R}_p s, \Phi &\iff \mu_0^+(e, s, \Phi) = \exists\text{-}newus \text{ в игре } G(s, \Phi); \\ e\mathbb{R}_n s, \Phi &\iff \mu_0^-(e, s, \Phi) = \forall\text{-}newus \text{ в игре } G(s, \Phi). \end{aligned}$$

Доказательство. Везде, где есть необходимость, вместо самих объектов подразумеваются их числовые аналоги в соответствующих нумерациях: истории, формулы, переменные и т.д. В частности, будем считать числовые аналоги функций расходящимися на аргументах, на которых они явно не определены. Доказательство будем проводить индукцией по сложности формулы Φ .

Пусть Φ — атомарная формула. Зафиксируем некоторый номер a пустой функции и некоторый номер b произвольной непустой функции. Положим

$$\mu_0^+(e, s, \Phi) = \begin{cases} a, & \text{если } e = 0 \text{ и } \mathbb{N}, s \models \Phi, \\ b, & \text{иначе.} \end{cases}$$

и проверим требуемые эквивалентности.

$\Rightarrow$ Пусть $e\mathbb{R}_p s, \Phi$. Тогда $\mathbb{N}, s \models \Phi$ и $e = 0$. По построению получаем $\mu_0^+(e, s, \Phi) = a = \exists\text{-}newus$ для $\sigma_\exists = \{\emptyset\}$ ⁷ в игре $G(s, \Phi)$.

$\Leftarrow$ Пусть $e\mathbb{R}_p s, \Phi$. Тогда $e \neq 0$ или $\mathbb{N}, s \not\models \Phi$. По построению получаем $\mu_0^+(e, s, \Phi) = b$, но поскольку непустая функция в игре $G(s, \Phi)$ никак не может быть стратегией, то $\mu_0^+(e, s, \Phi)$ в этом случае не является $\exists\text{-}newus$.

Для μ_0^- ситуация двойственная — функция возвращает a , если $e = 0$ и $\mathbb{N}, s \not\models \Phi$. В противном случае функция возвращает b . Доказательство требуемых эквивалентностей проводится аналогичным образом.

Пусть $\Phi = \varphi \vee \psi$. Введём обозначение истории, связанной с выбором Элоизы дизъюнктивного члена формулы в игре $G(s, \varphi \vee \psi)$, а также определим вспомогательную функцию:

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi \rangle_s^\chi &= (s, \varphi \vee \psi, \chi), \text{ где } \chi \in \{\varphi, \psi\}, \\ g_{\theta_1(n, \varphi, \psi, \chi)}(h) &= \begin{cases} \chi, & \text{если } h = (s, \varphi \vee \psi), \chi \in \{\varphi, \psi\} \\ g_n([h]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\chi}), & \text{если } \langle \varphi, \psi \rangle_s^\chi \leq h, \\ \min\{A(h)\}, & \text{если } \langle \varphi, \psi \rangle_s^{\bar{\chi}} \leq h, \bar{\chi} \neq \chi. \end{cases} \end{aligned}$$

В качестве аргументов выступают число $n \in N$, FOL[↔]-формулы φ, ψ, χ , история $h \in H_\exists(s, \varphi \vee \psi)$. Заметим, что существование общерекурсивной функции θ_1 гарантируется $s\text{-}m\text{-}n$ -теоремой. Определим функцию μ_0^+ на формулах-дизъюнкциях:

$$\mu_0^+(e, s, \varphi \vee \psi) = \begin{cases} \theta_1(\mu_0^+(r_e, s, \varphi), \varphi, \psi, \varphi), & \text{если } l_e = 1, \\ \theta_1(\mu_0^+(r_e, s, \psi), \varphi, \psi, \psi), & \text{если } l_e = 2, \end{cases}$$

и докажем требуемые эквивалентности.

$\Rightarrow$ Пусть $e\mathbb{R}_p s, \varphi \vee \psi$. Рассмотрим случай, когда $l_e = 1$ и $r_e\mathbb{R}_p s, \varphi$. Тогда по индукционному предположению $\mu_0^+(r_e, s, \varphi) = \exists\text{-}newus$ в игре $G(s, \varphi)$. С другой

⁷Множество нетерминальных историй в такой игре пустое, поэтому и сама стратегия является пустой.

стороны, в силу построения $\mu_0^+([1, r_e], s, \varphi \vee \psi)$,

$$g_{\mu_0^+(e, s, \varphi \vee \psi)}(h) = \begin{cases} \varphi, & \text{если } h = (s, \varphi \vee \psi), \\ g_{\mu_0^+(r_e, s, \varphi)}([h]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}), & \text{если } \langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi \leq h, \\ \min\{A(h)\}, & \text{если } \langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi \leq h. \end{cases}$$

Легко проверить, что полученная функция является числовым аналогом выигрышной стратегии Элоизы в игре $G(s, \varphi \vee \psi)$. При этом на бесполезном множестве стратегия определена так, чтобы она была эффективной. Следовательно, $\mu_0^+(e, s, \varphi \vee \psi)$ является $\exists$ -*newus*. Случай, когда $l_e = 2$, разбирается аналогично.

$\Leftarrow$ Пусть $e \notin \mathbb{R}_p s, \varphi \vee \psi$ и $l_e = 1$. Тогда $r_e \notin \mathbb{R}_p s, \varphi$, и по индукционному предположению $\mu_0^+(r_e, s, \varphi)$ не является $\exists$ -*newus* в $G(s, \varphi)$. Соответственно, функция $\mu_0^+(e, s, \varphi \vee \psi) = \theta_1(\mu_0^+(r_e, s, \varphi), \varphi, \psi, \varphi)$ никак не может быть $\exists$ -*newus* в $G(s, \varphi \vee \psi)$ по построению. Случай, когда $l_e = 2$, рассматривается аналогично, а если $l_e \notin \{1, 2\}$, то функция $\mu_0^+(e, s, \varphi \vee \psi)$ вовсе расходится.

Определим ещё одну вспомогательную функцию:

$$g_{\theta_2(n, m, \varphi, \psi)}(h) = \begin{cases} g_n([h]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}), & \text{если } \langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi \leq h, \\ g_m([h]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi}), & \text{если } \langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi \leq h. \end{cases}$$

Параметры функции обладают тем же смыслом, что и параметры для θ_1 , но с условием $h \in H_\forall(s, \varphi \vee \psi)$ и с добавлением ещё одного — числа $m \in N$. Как и в случае с θ_1 , s - m - n -теорема гарантирует существование общерекурсивной функции θ_2 . Общерекурсивность вводимых впоследствии вспомогательных функций также вытекает из s - m - n -теоремы, и мы уже не будем ссылаться на неё явным образом. Далее, положим

$$\mu_0^-(e, s, \varphi \vee \psi) = \theta_2(\mu_0^-(l_e, s, \varphi), \mu_0^-(r_e, s, \psi), \varphi, \psi),$$

и также проверим требуемые эквивалентности.

$\Rightarrow$ Пусть $e \in \mathbb{R}_n s, \varphi \vee \psi$. Тогда по определению реализуемости $l_e \in \mathbb{R}_n s, \varphi$ и $r_e \in \mathbb{R}_n s, \psi$. По индукционному предположению $\mu_0^-(l_e, s, \varphi)$ и $\mu_0^-(r_e, s, \psi)$ являются $\forall$ -*newus* в играх $G(s, \varphi)$ и $G(s, \psi)$ соответственно. С другой стороны, в силу построения $\mu_0^-(e, s, \varphi \vee \psi)$, имеем:

$$g_{\mu_0^-(e, s, \varphi \vee \psi)}(h) = \begin{cases} g_{\mu_0^-(l_e, s, \varphi)}([h]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}), & \text{если } \langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi \leq h, \\ g_{\mu_0^-(r_e, s, \psi)}([h]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi}), & \text{если } \langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi \leq h. \end{cases}$$

Легко проверить, что полученная функция является числовым аналогом выигрышной стратегии Абеляра в игре $G(s, \varphi \vee \psi)$, следовательно, $\mu_0^-(e, s, \varphi \vee \psi)$ является $\forall$ -*newus*.

$\Leftarrow$ Пусть $e \notin \mathbb{R}_n s, \varphi \vee \psi$. Тогда $l_e \notin \mathbb{R}_n s, \varphi$ или $r_e \notin \mathbb{R}_n s, \psi$. Если $l_e \notin \mathbb{R}_n s, \varphi$, то по индукционному предположению $\mu_0^-(l_e, s, \varphi)$ не является $\forall$ -*newus* в игре $G(s, \varphi)$, следовательно, функция $\mu_0^-(e, s, \varphi \vee \psi)$ по построению никак не может быть $\forall$ -*newus* в игре $G(s, \varphi \vee \psi)$. Случай, когда $r_e \notin \mathbb{R}_n s, \psi$, доказывается также.

Пусть $\Phi = \sim \varphi$. Определим $\langle \varphi \rangle_s^\sim = (s, \sim \varphi, \varphi)$ и введём ещё одну вспомогательную функцию, определённую на $H_\exists(s, \sim \varphi)$:

$$g_{\theta_3(m, \varphi)}(h) = g_m([h]_{\langle \varphi \rangle_s^\sim}).$$

Теперь положим

$$\begin{aligned}\mu_0^+(e, s, \sim \varphi) &= \theta_3(\mu_0^-(e, s, \varphi), \varphi), \\ \mu_0^-(e, s, \sim \varphi) &= \theta_3(\mu_0^+(e, s, \varphi), \varphi).\end{aligned}$$

Требуемые эквивалентности следуют непосредственно из построения $\mu_0^\pm$ и тривиального индукционного перехода. $\square$

Теорема 6.10. *Существуют такие частично-рекурсивные функции μ^+ и μ^- , что для любой $\text{FOL}^{\rightarrow}$ -формулы Φ сигнатуры $\Sigma_{\mathbb{N}}$, конечного означивания s в $\mathbb{N}$ с условием $\text{dom}(s) \supseteq \text{Free}(\Phi)$, а также для любого числа $e \in \mathbb{N}$, выполнены следующие эквивалентности:*

$$\begin{aligned}e\mathbb{R}_p s, \Phi &\iff \mu^+(e, s, \Phi) - \exists\text{-newus в игре } G(s, \Phi); \\ e\mathbb{R}_n s, \Phi &\iff \mu^-(e, s, \Phi) - \forall\text{-newus в игре } G(s, \Phi).\end{aligned}$$

Доказательство. Как и ранее, вместо самих объектов подразумеваем их числовые аналоги в соответствующих нумерациях. Построение искомым функций будем проводить индукцией по *кванторной сложности* формулы Φ , т.е. по максимальной длине цепочки вложенных в Φ кванторов. Более точно — при помощи возвратной рекурсии будет определена вычисляемая последовательность функций

$$\mu_0^\pm, \dots, \mu_n^\pm, \dots,$$

а искомые частично-рекурсивные функции определим соотношением

$$\mu^\pm(e, s, \Phi) = \mu_{d(\Phi)}^\pm(e, s, \Phi),$$

где $d(\Phi)$ — кванторная сложность формулы Φ .

Функции $\mu_0^\pm$ построены в предложении 6.9. Далее предположим, что функции $\mu_{n-1}^\pm$ определены при $n > 0$. Для формул с $d(\Phi) \leq n-1$ положим

$$\mu_n^\pm(e, s, \Phi) = \mu_{n-1}^\pm(e, s, \Phi)$$

и перейдем к определению функций $\mu_n^\pm$ для формул $\varphi \vee \psi$ и $\sim \varphi$ кванторной сложности n :

$$\begin{aligned}\mu_n^+(e, s, \varphi \vee \psi) &= \begin{cases} \theta_1(\mu_n^+(r_e, s, \varphi), \varphi, \psi, \varphi), & \text{если } l_e = 1, \\ \theta_1(\mu_n^+(r_e, s, \psi), \varphi, \psi, \psi), & \text{если } l_e = 2, \end{cases} \\ \mu_n^-(e, s, \varphi \vee \psi) &= \theta_2(\mu_n^-(l_e, s, \varphi), \mu_n^-(r_e, s, \psi), \varphi, \psi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_n^+(e, s, \sim \varphi) &= \theta_3(\mu_n^-(e, s, \varphi), \varphi), \\ \mu_n^-(e, s, \sim \varphi) &= \theta_3(\mu_n^+(e, s, \varphi), \varphi).\end{aligned}$$

Требуемые эквивалентности проверяем как в предложении 6.9, но при этом естественно заменяя нижние индексы на n .

Пусть $\Phi = \exists x \varphi$. Определим $\langle x, \varphi \rangle_s^i = (s, \exists x \varphi, (x, i))$ и введём ещё одну вспомогательную функцию, определённую на $H_{\exists}(s, \exists x \varphi)$:

$$g_{\theta_4(i, m, x, \varphi)}(h) = \begin{cases} (x, i), & \text{если } h = (s, \exists x \varphi), \\ g_m([h]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i}), & \text{если } \langle x, \varphi \rangle_s^i \leq h, \\ \min\{A(h)\}, & \text{если } \langle x, \varphi \rangle_s^{\bar{i}} \leq h, \bar{i} \neq i. \end{cases}$$

Теперь положим

$$\mu_n^+(e, s, \exists x\varphi) = \theta_4(l_e, \mu_{n-1}^+(r_e, \langle s \rangle_x^{l_e}, \varphi), x, \varphi)$$

и проверим требуемые эквивалентности.

$\Rightarrow$ Пусть $e \mathbb{R}_p s, \exists x\varphi$. Тогда по определению реализуемости $r_e \mathbb{R}_p \langle s \rangle_x^{l_e}, \varphi$, и по индукционному предположению $\mu_{n-1}^+(r_e, \langle s \rangle_x^{l_e}, \varphi)$ является $\exists$ -*newus* в игре $G(\langle s \rangle_x^{l_e}, \varphi)$. С другой стороны, в силу построения $\mu_n^+(e, s, \exists x\varphi)$,

$$g_{\mu_n^+(e, s, \exists x\varphi)}(h) = \begin{cases} (x, l_e), & \text{если } h = (s, \exists x\varphi), \\ g_{\mu_{n-1}^+(r_e, \langle s \rangle_x^{l_e}, \varphi)}([h]_{\langle x, \varphi \rangle_s^{l_e}}), & \text{если } \langle x, \varphi \rangle_s^{l_e} \leq h, \\ \min\{A(h)\}, & \text{если } \langle x, \varphi \rangle_s^i \leq h, i \neq l_e. \end{cases}$$

Легко проверить, что полученная функция является числовым аналогом выигрышной стратегии Элоизы в игре $G(s, \exists x\varphi)$, следовательно, $\mu_n^+(e, s, \exists x\varphi)$ является $\exists$ -*newus*.

$\Leftarrow$ Пусть $e \mathbb{R}_p s, \exists x\varphi$. Тогда $r_e \mathbb{R}_p \langle s \rangle_x^i, \varphi$ при любом $i \in N$, и по индукционному предположению $\mu_n^+(r_e, \langle s \rangle_x^i, \varphi)$ не является $\exists$ -*newus* в игре $G(\langle s \rangle_x^i, \varphi)$ ни при каком i . Соответственно, функция $\mu_n^+(e, s, \exists x\varphi)$ никак не может быть $\exists$ -*newus* в игре $G(s, \exists x\varphi)$ по построению.

Определим последнюю вспомогательную функцию на $H_\forall(s, \exists x\varphi)$

$$g_{\theta_5(n, m, x, \varphi)}(h) = g_n(g_m(i), \langle s \rangle_x^i, \varphi)([h]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i}), \text{ если } \langle x, \varphi \rangle_s^i \leq h,$$

где $g_n(g_m(i), \langle s \rangle_x^i, \varphi)$ обозначает частично-рекурсивную функцию с номером n от трёх аргументов. Теперь положим

$$\mu_n^-(e, s, \exists x\varphi) = \theta_5(M^\varphi, e, x, \varphi),$$

где M^φ — номер следующей функции:

$$g_{M^\varphi}(e, s, \chi) = \begin{cases} \mu_{n-1}^-(e, s, \chi), & \text{если } d(\chi) \leq d(\varphi), \\ \uparrow & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство эквивалентностей теоремы для μ_n^- следует из соотношения:

$$g_{\mu_n^-(e, s, \exists x\varphi)}(h) = g_{\mu_{n-1}^-(e, s, \exists x\varphi)}([h]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i}), \langle x, \varphi \rangle_s^i \leq h.$$

Во-первых, все истории Абеляра в игре $G(s, \exists x\varphi)$ имеют вид $\langle x, \varphi \rangle_s^i \frown q$, поэтому стратегия определена исключительно на историях такого вида. Во-вторых, чтобы вычислить действие на $(s, \exists x\varphi, (x, i), \dots)$, достаточно вычислить действие стратегии для маленькой игры $G(\langle s \rangle_x^i, \varphi)$ на проекции истории $(s, \exists x\varphi, (x, i), \dots)$ вдоль $\langle x, \varphi \rangle_s^i$. Последнее равенство как раз отражает эту идею.

Таким образом, функции $\mu_n^\pm$ определены, а также для них доказаны эквивалентности из формулировки теоремы. Ясно, что последовательности функций μ_n^+ и μ_n^- , $n \in N$, вычислимы, поэтому искомые функции $\mu^\pm$ вычислимы и определены для формул любой кванторной сложности, то есть вообще для всех формул. Требуемые эквивалентности для функций $\mu^\pm$ немедленно следуют из доказанных ранее эквивалентностей для функций $\mu_n^\pm$. $\square$

Предложение 6.11. Пусть X — множество номеров пустой функции. Существуют такие вычислимые с оракулом X функции τ_0^+ и τ_0^- , что для любой бескванторной $\text{FOL}^{\rightarrow}$ -формулы Φ сигнатуры $\Sigma_{\mathbb{N}}$, конечного означивания s в

$\mathbb{N}$ с условием $\text{dom}(s) \supseteq \text{Free}(\Phi)$, а также для любого числа $e \in N$, выполнены следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} e - \exists\text{-news в игре } G(s, \Phi) &\iff \tau_0^+(e, s, \Phi) \mathbb{R}_p s, \Phi; \\ e - \forall\text{-news в игре } G(s, \Phi) &\iff \tau_0^-(e, s, \Phi) \mathbb{R}_n s, \Phi. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть Φ — атомарная формула. Положим

$$\tau_0^+(e, s, \Phi) = \begin{cases} 0, & \text{если } e \in X \text{ и } \mathbb{N}, s \models \Phi, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

и перейдем к доказательству эквивалентностей.

$\Rightarrow$ Пусть $e - \exists\text{-news}$ в игре $G(s, \Phi)$. С необходимостью $g_e = \emptyset$ и $\mathbb{N}, s \models \Phi$. Тогда $\tau_0^+(e, s, \Phi) = 0$, и по определению реализуемости $\tau_0^+(e, s, \Phi) \mathbb{R}_p s, \Phi$.

$\Leftarrow$ Пусть $\tau_0^+(e, s, \Phi) \mathbb{R}_p s, \Phi$. Тогда по определению реализуемости $\tau_0^+(e, s, \Phi) = 0$, откуда заключаем $g_e = \emptyset$, $\mathbb{N}, s \models \Phi$ и $e - \exists\text{-news}$ в игре $G(s, \Phi)$.

Построение τ_0^- для атомарных формул и доказательство теоремы проводится двойственным образом.

Пусть $\Phi = \varphi \vee \psi$. Положим

$$\tau_0^+(e, s, \varphi \vee \psi) = \begin{cases} [1, \tau_0^+([e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}, s, \varphi)], & \text{если } g_e((s, \varphi \vee \psi)) = \varphi, \\ [2, \tau_0^+([e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi}, s, \psi)], & \text{если } g_e((s, \varphi \vee \psi)) = \psi, \end{cases}$$

и перейдем к доказательству требуемых эквивалентностей.

$\Rightarrow$ Пусть $e - \exists\text{-news}$ в игре $G(s, \varphi \vee \psi)$. Рассмотрим случай, когда $g_e((s, \varphi \vee \psi)) = \varphi$. Тогда $[e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi} - \exists\text{-news}$ в игре $G(s, \varphi)$ и по индукционному предположению $\tau_0^+([e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}, s, \varphi) \mathbb{R}_p s, \varphi$. Далее, в силу определения реализуемости и построения $\tau_0^+(e, s, \varphi \vee \psi)$, заключаем $\tau_0^+(e, s, \varphi \vee \psi) \mathbb{R}_p s, \varphi \vee \psi$. Случай, когда $g_e((s, \varphi \vee \psi)) = \psi$, доказывается аналогичным образом.

$\Leftarrow$ Пусть $\tau_0^+(e, s, \varphi \vee \psi) \mathbb{R}_p s, \varphi \vee \psi$. Тогда по определению реализуемости

$$\begin{aligned} l_{\tau_0^+(e, s, \varphi \vee \psi)} &= 1 \text{ и } r_{\tau_0^+(e, s, \varphi \vee \psi)} \mathbb{R}_p s, \varphi, \text{ или} \\ l_{\tau_0^+(e, s, \varphi \vee \psi)} &= 2 \text{ и } r_{\tau_0^+(e, s, \varphi \vee \psi)} \mathbb{R}_p s, \psi. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда $l_{\tau_0^+(e, s, \varphi \vee \psi)} = 1$. Тогда по построению

$$\tau_0^+(e, s, \varphi \vee \psi) = [1, \tau_0^+([e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}, s, \varphi)] \text{ и } \tau_0^+([e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}, s, \varphi) \mathbb{R}_p s, \varphi.$$

В силу индукционного предположения $\tau_0^+([e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}, s, \varphi) - \exists\text{-news}$ в игре $G(s, \varphi)$. Тогда функция

$$f(h) = \begin{cases} \varphi, & \text{если } h = (s, \varphi \vee \psi), \\ g_{[e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}}([h]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}), & \text{если } \langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi \leq h, \\ \min\{A(h)\}, & \text{если } \langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi \leq h, \end{cases}$$

где $h \in H_\exists(s, \varphi \vee \psi)$, является эффективной выигрышной стратегией в игре $G(s, \varphi \vee \psi)$. Но с другой стороны, $f(h) = g_e(h)$ для любой истории $h \in H_\exists(s, \varphi \vee \psi)$. В самом деле, из построения $\tau_0^+(e, s, \varphi \vee \psi)$ следует $g_e((s, \varphi \vee \psi)) = \varphi$, а из определения проекции стратегий следует

$$f(\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi \frown q) = g_{[e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}}([\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi \frown q]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}) = g_e(\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi \frown q).$$

Таким образом, $e - \exists\text{-news}$ в игре $G(s, \varphi \vee \psi)$.

Далее положим

$$\tau^-(e, s, \varphi \vee \psi) = \left[\tau_0^-([e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}, s, \varphi), \tau_0^-([e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi}, s, \psi) \right]$$

и также докажем эквивалентности.

$\Rightarrow$ Пусть e — $\forall$ -*newus* в игре $G(s, \varphi \vee \psi)$. Тогда $[e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}$ — $\forall$ -*newus* в игре $G(s, \varphi)$, а $[e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi}$ — $\forall$ -*newus* в игре $G(s, \psi)$. По индукционному предположению

$$\tau_0^-([e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}, s, \varphi) \mathbb{R}_n s, \varphi \text{ и } \tau_0^-([e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi}, s, \psi) \mathbb{R}_n s, \psi.$$

Теперь, из определения реализуемости и построения $\tau_0^-(e, s, \varphi \vee \psi)$, непосредственно заключаем $\tau_0^-(e, s, \varphi \vee \psi) \mathbb{R}_n s, \varphi \vee \psi$.

$\Leftarrow$ Пусть $\tau_0^+(e, s, \varphi \vee \psi) \mathbb{R}_n s, \varphi \vee \psi$. Тогда по определению реализуемости

$$l_{\tau_0^-(e, s, \varphi \vee \psi)} \mathbb{R}_n s, \varphi \text{ и } r_{\tau_0^-(e, s, \varphi \vee \psi)} \mathbb{R}_n s, \psi.$$

Из построения $\tau_0^-(e, s, \varphi \vee \psi)$ следует

$$\tau_0^-([e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}, s, \varphi) \mathbb{R}_n s, \varphi \text{ и } \tau_0^-([e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi}, s, \psi) \mathbb{R}_n s, \psi.$$

В силу индукционного предположения $\tau_0^-([e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}, s, \varphi)$ — $\forall$ -*newus* в игре $G(s, \varphi)$, а $\tau_0^-([e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi}, s, \psi)$ — $\forall$ -*newus* в игре $G(s, \psi)$. Тогда функция

$$f(h) = \begin{cases} g_{[e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}}([h]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}), & \text{если } \langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi \leq h, \\ g_{[e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi}}([h]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi}), & \text{если } \langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi \leq h, \end{cases}$$

где $h \in H_\forall(s, \varphi \vee \psi)$, является эффективной выигрышной стратегией в игре $G(s, \varphi \vee \psi)$. Но с другой стороны, $f(h) = g_e(h)$ для любой истории $h \in H_\forall(s, \varphi \vee \psi)$, поскольку

$$\begin{aligned} f(\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi \hat{~} q) &= g_{[e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}}([\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi \hat{~} q]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}) = g_e(\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi \hat{~} q), \\ f(\langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi \hat{~} q) &= g_{[e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi}}([\langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi \hat{~} q]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi}) = g_e(\langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi \hat{~} q). \end{aligned}$$

Таким образом, e — $\forall$ -*newus* в игре $G(s, \varphi \vee \psi)$.

Рассмотрим последний случай бескванторных формул $\Phi = \sim \varphi$ и определим для них τ_0^+ и τ_0^- :

$$\begin{aligned} \tau_0^+(e, s, \sim \varphi) &= \tau_0^-(e, s, \varphi), \\ \tau_0^-(e, s, \sim \varphi) &= \tau_0^+(e, s, \varphi). \end{aligned}$$

Требуемые эквивалентности следуют непосредственно из построения $\tau_0^\pm$ и тривиального индукционного перехода. $\square$

Теорема 6.12. Пусть X — множество номеров пустой функции. Существуют такие вычислимые с оракулом X функции τ^+ и τ^- , что для любой $\text{FOL}^{\sim}$ -формулы Φ сигнатуры $\Sigma_{\mathbb{N}}$, конечного означивания s в $\mathbb{N}$ с условием $\text{dom}(s) \supseteq \text{Free}(\Phi)$, а также для любого числа $e \in \mathbb{N}$, выполнены следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} e \text{ — } \exists\text{-newus в игре } G(s, \Phi) &\iff \tau^+(e, s, \Phi) \mathbb{R}_p s, \Phi; \\ e \text{ — } \forall\text{-newus в игре } G(s, \Phi) &\iff \tau^-(e, s, \Phi) \mathbb{R}_n s, \Phi. \end{aligned}$$

Доказательство. Поступим также, как в теореме 6.10, т.е. при помощи возвратной рекурсии определим вычислимую последовательность функций

$$\tau_0^\pm, \dots, \tau_n^\pm, \dots,$$

а искомые функции определим соотношением

$$\tau^\pm(e, s, \Phi) = \tau_{d(\Phi)}^\pm(e, s, \Phi).$$

Функции $\tau_0^\pm$ построены в предложении 6.11. Далее предположим, что функции $\tau_{n-1}^\pm$ определены при $n > 0$. Для формул с $d(\Phi) \leq n - 1$ положим

$$\tau_n^\pm(e, s, \Phi) = \tau_{n-1}^\pm(e, s, \Phi)$$

и перейдем к определению функций $\tau_n^\pm$ для формул $\varphi \vee \psi$ и $\sim \varphi$ кванторной сложности n :

$$\tau_n^+(e, s, \varphi \vee \psi) = \begin{cases} [1, \tau_n^+([e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}, s, \varphi)], & \text{если } g_e((s, \varphi \vee \psi)) = \varphi, \\ [2, \tau_n^+([e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi}, s, \psi)], & \text{если } g_e((s, \varphi \vee \psi)) = \psi, \end{cases}$$

$$\tau_n^-(e, s, \varphi \vee \psi) = [\tau_0^-([e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\varphi}, s, \varphi), \tau_0^-([e]_{\langle \varphi, \psi \rangle_s^\psi}, s, \psi)],$$

$$\tau_n^+(e, s, \sim \varphi) = \tau_n^-(e, s, \varphi),$$

$$\tau_n^-(e, s, \sim \varphi) = \tau_n^+(e, s, \varphi).$$

Требуемые эквивалентности проверяем как в предложении 6.11, но при этом естественно заменяя нижние индексы на n .

Пусть $\Phi = \exists x \varphi$. Положим

$$\tau_n^+(e, s, \exists x \varphi) = [i, \tau_{n-1}^+([e]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i}, \langle s \rangle_x^i, \varphi)], \text{ где } i = g_e((s, \exists x \varphi))$$

и снова проверим эквивалентности.

$\Rightarrow$ Пусть $e - \exists\text{-newus}$ в $\mathbf{G}(s, \exists x \varphi)$ и $i = g_e((s, \exists x \varphi))$. Тогда $[e]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i} - \exists\text{-newus}$ в игре $\mathbf{G}(\langle s \rangle_x^i, \varphi)$. По индукционному предположению

$$\tau_n^+([e]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i}, \langle s \rangle_x^i, \varphi) \mathbb{R}_p \langle s \rangle_x^i, \varphi,$$

следовательно, по определению реализуемости и по построению τ_n^+ заключаем $\tau_n^+(e, s, \varphi) \mathbb{R}_p s, \exists x \varphi$.

$\Leftarrow$ Пусть $\tau_n^+(e, s, \exists x \varphi) \mathbb{R}_p s, \exists x \varphi$. Тогда из построения τ_n^+ и из определения реализуемости следует

$$\tau_n^+(e, s, \exists x \varphi) = [i, \tau_n^+([e]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i}, \langle s \rangle_x^i, \varphi)]$$

для некоторого числа $i \in N$. По индукционному предположению $[e]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i} - \exists\text{-newus}$ в игре $\mathbf{G}(\langle s \rangle_x^i, \varphi)$. Тогда функция

$$f(h) = \begin{cases} i, & \text{если } h = (s, \exists x \varphi), \\ g_{[e]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i}}([h]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i}), & \text{если } \langle x, \varphi \rangle_s^i \leq h, \\ \min\{A(h)\}, & \text{если } \langle x, \varphi \rangle_s^{\bar{i}} \leq h, \bar{i} \neq i, \end{cases}$$

где $h \in H_\exists(s, \exists x \varphi)$, будет являться эффективной выигрышной стратегией в игре $\mathbf{G}(s, \exists x \varphi)$. Но поскольку $i = g_e((s, \exists x \varphi))$ и

$$g_{[e]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i}}([h]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i}) = g_e(h),$$

получаем $f(h) = g_e(h)$ при любых $h \in H_\exists(s, \exists x\varphi)$. Следовательно, $e - \exists\text{-newus}$ в $G(s, \exists x\varphi)$.

Теперь определим вычислимую функцию T^φ :

$$T^\varphi(e, s, \psi) = \begin{cases} \tau_{n-1}^-(e, s, \psi), & \text{если } d(\psi) \leq d(\varphi), \\ \uparrow & \text{иначе.} \end{cases}$$

и положим $\tau_n^-(e, s, \exists x\varphi)$:

$$g_{\tau_n^-(e, s, \exists x\varphi)}(i) = T^\varphi([e]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i}, \langle s \rangle_x^i, \varphi).$$

$\Rightarrow$ Пусть $e - \forall\text{-newus}$ в $G(s, \exists x\varphi)$. Тогда, для любого i , $[e]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i} - \forall\text{-newus}$ в $G(\langle s \rangle_x^i, \varphi)$. По индукционному предположению, для любого i верно

$$\tau_n^-[e]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i}, \langle s \rangle_x^i, \varphi) \mathbb{R}_n \langle s \rangle_x^i, \varphi.$$

Но поскольку кванторная сложность $d(\varphi) = n - 1$, то $\tau_n^-(\dots, \varphi) = \tau_{n-1}^-(\dots, \varphi)$, следовательно, для любого i

$$\tau_{n-1}^-[e]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i}, \langle s \rangle_x^i, \varphi) \mathbb{R}_n \langle s \rangle_x^i, \varphi.$$

Наконец, по построению $\tau_n^-(e, s, \exists x\varphi)$ и по определению реализуемости, получаем $\tau_n^-(e, s, \exists x\varphi) \mathbb{R}_n s, \exists x\varphi$.

$\Leftarrow$ Пусть $\tau_n^-(e, s, \exists x\varphi) \mathbb{R}_n s, \exists x\varphi$. Тогда для любого i

$$g_{\tau_n^-(e, s, \exists x\varphi)}(i) \mathbb{R}_n \langle s \rangle_x^i, \varphi$$

и из построения $\tau_n^-(e, s, \exists x\varphi)$ непосредственно следует, что для любого i

$$\tau_{n-1}^-[e]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i}, \langle s \rangle_x^i, \varphi) \mathbb{R}_n \langle s \rangle_x^i, \varphi.$$

По индукционному предположению, для любого i , $[e]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i} - \forall\text{-newus}$ в игре $G(\langle s \rangle_x^i, \varphi)$. Тогда функция

$$f(\langle x, \varphi \rangle_s^i q) = g_{[e]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i}}([\langle x, \varphi \rangle_s^i q]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i}),$$

где $h \in H_\forall(s, \exists x\varphi)$, будет являться эффективной выигрышной стратегией. Но последнее соотношение можно продолжить

$$f(\langle x, \varphi \rangle_s^i q) = g_{[e]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i}}([\langle x, \varphi \rangle_s^i q]_{\langle x, \varphi \rangle_s^i}) = g_e(\langle x, \varphi \rangle_s^i q).$$

Отсюда заключаем, что $e - \forall\text{-newus}$ в $G(s, \exists x\varphi)$.

Таким образом, по аналогии с доказательством теоремы 6.10, определены функции $\tau_n^\pm$ и для них доказаны требуемые эквивалентности. Из построения следует вычислимость последовательностей функций τ_n^+ и τ_n^- , $n \in N$, поэтому искомые функции $\tau^\pm$ вычислимы и определены для формул любой кванторной сложности, то есть вообще для всех формул. Требуемые эквивалентности для функций $\tau^\pm$ также следуют из доказанных ранее эквивалентностей для функций $\tau_n^\pm$. $\square$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хинтика полагает, что конструктивисты при определении GTS для логики IF-FOL⁸ потребовали бы от стратегий быть вычислимыми функциями. По сути мы последовали этой идее и аккуратно рассмотрели семантические игры для FOL[↔] с точки зрения теории вычислимости. При этом было сделано следующее.

- Введено понятие полезной стратегии для семантической игры в FOL[↔], которое позволяет обойти проблему существования стратегий, одинаковых качественно, но отличных формально.
- Определены эффективные стратегии и полезные эффективные стратегии для семантических игр в FOL[↔].
- Определена надстройка понятий, позволяющих рассматривать GTS для FOL[↔] как композиционную семантику.
- Построены алгоритмы, позволяющие по эффективной стратегии получить реализацию по Нельсону, и наоборот.

В дальнейшем планируется распространить результаты с FOL[↔] на IF-FOL. Таким образом, будет получено сильное подспорье к выводам из [3], т.к. оба подхода — стандартный теоретико-игровой и нестандартный теоретико-множественный — привели к одним и тем же результатам.

REFERENCES

- [1] J. Hintikka, *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge: Cambridge University Press, 1996. Zbl 0869.03003
- [2] D. Nelson, *Constructible falsity*, Journal of Symbolic Logic, **14**:1 (1949), 16–26. Zbl 0033.24304
- [3] S. P. Odintsov, S. O. Speranski and I. Yu. Shevchenko, *Hintikka's independence-friendly logic meets Nelson's realizability*, Studia Logica, First Online: 14.10.2017.
- [4] M. J. Osborne, A. Rubinstein, *A Course in Game Theory*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1994. Zbl 1194.91003
- [5] A. L. Mann, G. Sandu and M. Sevenster, *Independence-Friendly Logic. A game-theoretic approach*, Cambridge: Cambridge University Press, 2011. Zbl 1218.03002

IGOR YURIEVICH SHEVCHENKO
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 4, KOPTYUGA AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
 E-mail address: i.yur.shevchenko@gmail.com

⁸IF-FOL — расширение логики первого порядка, являющееся основным объектом изучения в [1] и [3]