Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. A. Makhnev, M. M. Khamgokova, On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{39, 36, 22; 1, 2, 18\}$, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 638–647

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.041>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.196.121.252

April 26, 2023, 13:22:45

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 638–647 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.041

УДК 519.17

MSC 05C25

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА
С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{39, 36, 22; 1, 2, 18\}$

А.А. МАХНЕВ, М.М. ХАМГОКОВА

ABSTRACT. Prime divisors of orders of automorphisms and the fixed point subgraphs of automorphisms of prime orders are studied for a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{39, 36, 22; 1, 2, 18\}$. Let $G = \text{Aut}(\Gamma)$ is nonsolvable group, $\bar{G} = G/S(G)$ and $\bar{T}$ is the socle of $\bar{G}$. If Γ is vertex-symmetric then $\bar{T} = L \times M$ and $L, M \cong Z_5, A_5, A_6$ or $PSp(4, 3)$.

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ . Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется μ -подграфом (λ -подграфом).

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathcal{L}$ называется α -частичной геометрией порядка (s, t) , если каждая прямая содержит ровно $s + 1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t + 1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой, и для любого антифлага $(a, l) \in (P, \mathcal{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих l (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). В случае $\alpha = 1$ геометрия называется обобщенным четырехугольником и обозначается $GQ(s, t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$,

МАХНЕВ, А.А., ХАМГОКОВА, М.М., ON AUTOMORPHISMS OF A DISTANCE-REGULAR GRAPH WITH INTERSECTION ARRAY $\{39, 36, 22; 1, 2, 18\}$.

© 2019 МАХНЕВ А.А., ХАМГОКОВА М.М.

Поступила 21 марта 2019 г., опубликована 17 мая 2019 г.

$k = s(t + 1)$, $\lambda = s - 1 + t(\alpha - 1)$, $\mu = \alpha(t + 1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s, t)$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\text{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ , неподвижных относительно любого автоморфизма из X . Далее, через $p_{ij}^l(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y , находящихся на расстоянии l в графе Γ . В дистанционно регулярном графе числа $p_{ij}^l(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y , обозначаются p_{ij}^l и называются числами пересечения графа Γ (см. [1]).

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа Γ называется e -кодом, если минимальное расстояние между двумя вершинами из C не меньше $2e + 1$. Для e -кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e + 1$ выполняется граница $|C| \leq p_{dd}^d + 2$. В случае равенства код называется максимальным. Для максимального e -кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e + 1$ выполняется граница $c_d \geq a_d p_{dd}^d$. В случае равенства код называется локально регулярным. Наконец, для e -кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e + 1$ выполняется граница $|C| \leq k_d / \sum_{i=0}^e p_{id}^d + 1$. В случае равенства код называется совершенным относительно последней окрестности (см. [2]).

Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код C , являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности, то по [2, предложение 5] Γ имеет массив пересечений $\{a(p + 1), cr, a + 1; 1, c, ar\}$ или $\{a(p + 1), (a + 1)p, c; 1, c, ar\}$, где $a = a_3, c = c_2, p = p_{33}^3$. Гораздо чаще могут встретиться 1-коды, совершенные относительно последней окрестности.

В [3] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов с $\lambda = 2$ и числом вершин, не большим 4096. А.А. Махневым и М.С. Нировой предложена программа изучения автоморфизмов дистанционно регулярных графов из полученного списка.

В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{39, 36, 22; 1, 2, 18\}$. Максимальный порядок клики C из Γ не больше 4. Граф с массивом пересечений $\{39, 36, 22; 1, 2, 18\}$ имеет $v = 1 + 39 + 702 + 858 = 1600$ вершин и спектр $39^1, 9^{416}, -1^{858}, -9^{325}$. Далее, граф Γ_3 является псевдогеометрическим для сети $pG_{21}(39, 21)$. Пусть Γ_3 содержит 40-клику C . Так как $(|C| - 1)(a_3 + 1) = k_3$, то C является кодом, совершенным относительно последней окрестности.

Теорема 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{39, 36, 22; 1, 2, 18\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Ω — пустой граф, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 10r + 26t + 12$ и $\alpha_3(g) = 80r$ или $p = 5$, $\alpha_1(g) = 65n + 10l + 10$ и $\alpha_3(g) = 200l$;
- (2) Ω является n -кликкой, либо $n = 1$, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 15l + 24 + 39t$ и $\alpha_3(g) = 120l + 36$, либо $n = 2$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 10l + 26t$ и $\alpha_3(g) = 80l - 8$, либо $n = 4$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 10l + 26t + 14$ и $\alpha_3(g) = 80l - 16$ или $p = 3$, $\alpha_1(g) = 10l + 39t + 1$, l сравнимо с -1 по модулю 3 и $\alpha_3(g) = 120l + 24$;
- (3) Ω состоит из n вершин попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ , $p = 3$, $n \in \{4, 7, \dots, 40\}$, $\alpha_3(g) = 120l + 40 - 4n$ и $\alpha_1(g) = 15l + 30 + 39t - 6n$;
- (4) Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик, любые две вершины из разных клик находятся на расстоянии 3 в Γ , и либо $p = 3$ и порядки этих клик равны 1 или 4, либо $p = 2$ и порядки этих клик равны 2 или 4;
- (5) Ω содержит вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Γ , и $p \leq 3$.

Следствие 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{39, 36, 22; 1, 2, 18\}$, и неразрешимая группа $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа. Если $\bar{T}$ — цокль группы $\bar{G} = G/O_{5'}(G)$, то $\bar{T} = L \times M$, любая из подгрупп L, M изоморфна Z_5, A_5, A_6 или $PSp(4, 3)$.

В случае $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 40^2$ имеем $O_{5'}(G) = 1$ и этот случай реализуется, если либо

- (1) $L \cong M \cong PSp(4, 3)$, $|L : L_a| = |M : M_a| = 40$, либо
 (2) $L \cong PSp(4, 3)$, $|L : L_a| = 40$, $M \cong A_6$ и $|M_a| = 9$, либо
 (3) $L \cong M \cong A_6$ и $|L_a| = |M_a| = 9$.

Сначала приведем один вспомогательный результат.

Лемма 1. [2, теорема 3.2] [2, теорема 3.2]. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) и вторым собственным значением r . Если g — автоморфизм Γ и $\Delta = \text{Fix}(g)$, то $|\Delta| \leq v \cdot \max\{\lambda, \mu\} / (k - r)$.

По лемме 1 для графа с параметрами $(1600, 741, 344, 342)$ получим $|\Delta| \leq 1600344/720 = 6880/9$.

Лемма 2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 36, 22; 1, 2, 18\}$. Тогда для чисел пересечений графа Γ верны равенства

- (1) $p_{11}^1 = 2$, $p_{12}^1 = 36$, $p_{22}^1 = 270$, $p_{23}^1 = 396$, $p_{33}^1 = 462$;
 (2) $p_{11}^2 = 2$, $p_{12}^2 = 15$, $p_{13}^2 = 22$, $p_{22}^2 = 312$, $p_{23}^2 = 374$, $p_{33}^2 = 462$;
 (3) $p_{12}^3 = 18$, $p_{13}^3 = 21$, $p_{22}^3 = 306$, $p_{23}^3 = 378$, $p_{33}^3 = 458$.

Доказательство. Следует из [3, лемма 4.1.7]. $\square$

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [4]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \leq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X , в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$ для чисел пересечений p_{ij}^l .

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p_{ij}^l . Тогда собственные значения $p_1(0), \dots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа

Γ кратностей $m_0 = 1, \dots, m_d$. Матрицы P и Q , у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Подстановочное представление группы $G = \text{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом даёт матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbb{C})$. Пространство $\mathbb{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, \dots, W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ . Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A , поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$ -инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i} . Тогда (см. § 3.7 [4]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^d Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

Лемма 3. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 36, 22; 1, 2, 18\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$. Если $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 675, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 156, то $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l , взаимно простого с $|g|$, $\chi_1(g) = (44\alpha_0(g) + 8\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/104 - 25/13$ и $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/40 - 4$. Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_1(g) - 675$ и $\chi_2(g) - 156$ делятся на p .

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 416 & 96 & 64/9 & -32/3 \\ 858 & -22 & -22 & 18 \\ 325 & -75 & 125/9 & -25/3 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = 25(351\alpha_0(g) + 63\alpha_1(g) - \alpha_2(g) - 9\alpha_3(g))/832$. Подставляя $\alpha_2(g) = 1600 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (44\alpha_0(g) + 8\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/104 - 25/13$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (39\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 9\alpha_3(g))/400$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 1600 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/40 - 4$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 1 [5]. $\square$

В леммах 5–7 предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1600, 156, 44, 12)$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G , $\alpha_i(g) = pw_i$ для $i > 0$ и $\Delta = \text{Fix}(g)$. Ввиду границы Дельсарта максимальный порядок клики K из Γ не больше $1 - k/\theta_d$, поэтому $|K| \leq 40$. Ввиду границы Хофмана максимальный порядок коклики C из Γ не больше $-v\theta_d/(k - \theta_d)$, поэтому $|C| \leq 40$.

Лемма 4. Выполняются следующие утверждения:

- (1) если Δ — пустой граф, то $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 80s$ или $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 200t$;
- (2) если Δ является n -кликкой, то либо $n = 1$, $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 80s - 4$ или $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 120t + 36$, или $p = 13$ и $\alpha_1(g) = 520l + 156$, либо $p = 3$, $n \in \{4, 7, \dots, 40\}$ и $\alpha_1(g) = 120t + 40 - 4n$ или $p = 37$, $n = 9$ и $\alpha_1(g) = 444$;
- (3) если Δ является m -кокликкой, $m > 1$, то $p = 2$, $m \in \{4, 6, \dots, 40\}$ и $\alpha_1(g) = 80s - 4m$ или $p = 3$, $m \in \{4, 7, \dots, 40\}$ и $\alpha_1(g) = 120t + 40 - 4m$;

(4) если Δ содержит ребро и является объединением изолированных клик, то $p = 3$.

Доказательство. Пусть Δ — пустой граф. Так как $v = 2^6 \cdot 25$, то p равно 2 или 5.

В случае $p = 2$ имеем $\chi_1(g) = \alpha_1(g)/40 - 4$ и $\alpha_1(g) = 80s$.

В случае $p = 5$ имеем $\chi_1(g) = \alpha_1(g)/40 - 4$ и $\alpha_1(g) = 200t$.

Пусть Δ является n -кликкой. Если $n = 1$, то p делит 156 и 1443, поэтому $p \in \{2, 3, 13\}$. В случае $p = 2$ имеем $\chi_1(g) = (4 + \alpha_1(g))/40 - 4$ и $\alpha_1(g) = 80s - 4$.

В случае $p = 3$ имеем $\chi_1(g) = (4 + \alpha_1(g))/40 - 4$ и число $(4 + 3w_1)/40$ сравнимо с 1 по модулю 3. Отсюда $4 + 3w_1 = 120t + 40$ и $\alpha_1(g) = 120t + 36$.

В случае $p = 13$ имеем $\chi_1(g) = (4 + 13w_1)/40 - 4$ и число $(4 + 13w_1)/40$ сравнимо с 4 по модулю 13. Отсюда $4 + 13w_1 = 520l + 160$ и $\alpha_1(g) = 520l + 156$.

Если $n > 1$, то для двух вершин $a, b \in \Delta$ элемент g действует без неподвижных точек на $[a] \cap [b] - \Delta$, $[a] - b^\perp$ и на $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp)$. Отсюда p делит $46 - n$, 111 и 1332, поэтому $p \in \{3, 37\}$.

В случае $p = 3$ имеем $n \in \{4, 7, \dots, 40\}$. Далее, $\chi_1(g) = (4n + \alpha_1(g))/40 - 4$ и число $(4n + \alpha_1(g))/40$ сравнимо с 1 по модулю 3. Отсюда $4n + 3w_1 = 120t + 40$ и $\alpha_1(g) = 120t + 40 - 4n$.

В случае $p = 37$ имеем $n = 9$. Далее, $\chi_1(g) = (36 + \alpha_1(g))/40 - 4$ и число $(36 + \alpha_1(g))/40$ сравнимо с 12 по модулю 37. Отсюда $\alpha_1(g) = 444$.

Пусть Δ является m -коккликой, $m > 1$. Для двух вершин $a, b \in \Delta$ элемент g действует без неподвижных точек на $[a] \cap [b]$, $[a] - b^\perp$ и на $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp \cup \Delta)$. Отсюда p делит 12, 144 и $1300 - m$, поэтому $p \in \{2, 3\}$.

В случае $p = 2$ имеем $m \in \{4, 6, \dots, 40\}$. Далее, $\chi_1(g) = (4m + \alpha_1(g))/40 - 4$ и число $(4m + \alpha_1(g))/40$ четно. Отсюда $\alpha_1(g) = 80s - 4m$.

В случае $p = 3$ имеем $m \in \{4, 7, \dots, 40\}$. Далее, $\chi_1(g) = (4m + \alpha_1(g))/40 - 4$ и число $(4m + \alpha_1(g))/40$ сравнимо с 1 по модулю 3. Отсюда $\alpha_1(g) = 120t + 40 - 4m$.

Пусть Δ содержит ребро и является объединением изолированных клик. Тогда p делит 12 и 111, поэтому $p = 3$. $\square$

Лемма 5. Если $[a] \subset \Delta$ для некоторой вершины a , то для любой вершины $u \in \Gamma_2(a) - \Delta$ орбита $u^{(g)}$ является кликой или коккликой и верно одно из утверждений:

(1) если на $\Gamma - \Delta$ кокликовых орбит нет, то $\alpha_1(g) = 1600 - \alpha_0(g)$, $\alpha_0(g) = 40l$, $l = 4$, $p = 2, 3$ или $l = 5$, $p = 5, 7$, или $l = 6$, $p = 2$, или $l = 7$, $p = 3, 11$, или $l = 8$, $p = 2$, или $l = 10$, $p = 2, 3, 5$, или $l = 12$, $p = 2, 7$, или $l = 13$, $p = 3$, или $l = 14$, $p = 2$;

(2) если на $\Gamma - \Delta$ есть коккликовая орбита, то $p \leq 3$, а в случае $a^\perp = \Delta$ имеем $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 120l + 12$.

Доказательство. Пусть $[a] \subset \Delta$ для некоторой вершины a . Тогда для любой вершины $u \in \Gamma_2(a) - \Delta$ орбита $u^{(g)}$ не содержит геодезических 2-путей и является кликой или коккликой.

В случае $p \geq 13$ подграф $[a] \cap [u]$ является 12-кликкой и для двух вершин $b, c \in [a] \cap [u]$ подграф $[b] \cap [c]$ содержит a , 10 вершин из $[a] \cap [u]$ и p вершин из $u^{(g)}$, поэтому $p \leq 31$.

Если на $\Gamma - \Delta$ кокликовых орбит нет, то $\alpha_1(g) = v - |\Delta|$ и для вершины $u' \in u^{(g)} - \{u\}$ подграф $[u] \cap [u']$ содержит $p - 2$ вершины из $u^{(g)}$ и 12 вершин из Δ . Далее, $\chi_1(g) = (3\alpha_0(g) + 1600)/40 - 4$, $\chi_1(g) - 156$ делится на p и p делит

$3\alpha_0(g)/40 - 120$. Положим $\alpha_0(g) = 40l$. Тогда $4 \leq l \leq 14$, p делит $40(40 - l)$ и $3(40 - l)$. Таким образом, либо $l = 4$, $p = 2, 3$, либо $l = 5$, $p = 5, 7$, либо $l = 6$, $p = 2, 17$, либо $l = 7$, $p = 3, 11$, либо $l = 8$, $p = 2$, либо $l = 9$, $p = 31$, либо $l = 10$, $p = 2, 3, 5$, либо $l = 11$, $p = 29$, либо $l = 12$, $p = 2, 7$, либо $l = 13$, $p = 3$, либо $l = 14$, $p = 2, 13$. В случае $p \geq 13$ подграф $[a] \cap [u]$ является 12-кликой и $p \leq 23$.

Пусть $p = 17$ и $b \in \Delta - a^\perp$. Тогда $|\Delta(b) - a^\perp| \leq 82$ и $|[b] - \Delta| \geq 68$. Для $w \in [b] - \Delta$ имеем $[a] \cap [w] = [a] \cap [b]$ (иначе $w^{(g)}$ содержится в $[b] \cap [c]$ для вершины $c \in [a] \cap [w] - [b]$). Противоречие с тем, что для двух вершин $c, d \in [a] \cap [w]$ подграф $[c] \cap [d]$ содержит 68 вершин из $[b] - \Delta$.

Пусть $p = 13$. Тогда $|\Delta - a^\perp| = 403$. Если $b \in \Delta - a^\perp$ и $|[b] - \Delta| = 13$, то для $w \in [b] - \Delta$ имеем $[a] \cap [w] = [a] \cap [b]$ (иначе $w^{(g)}$ содержится в $[b] \cap [c]$ для вершины $c \in [a] \cap [w] - [b]$). Далее, $[b] \cap [w]$ содержит 12 вершин из $w^{(g)}$ и 32 вершины из $\Delta(b)$. Отсюда для $w' \in w^{(g)} - \{w\}$ подграф $[w] \cap [w']$ содержит b , 32-клику из $\Delta(b)$ и 11 вершин из $w^{(g)}$. Противоречие с тем, что порядок клики в Γ не больше 40.

Если $b \in \Delta - a^\perp$ и $|[b] - \Delta| = 26$, то $[b] - \Delta = u^{(g)} \cup w^{(g)}$. Как и выше, $[a] \cap [u] = [a] \cap [w] = [a] \cap [b]$, поэтому подграф $\{b\} \cup ([a] \cap [b]) \cup u^{(g)} \cup w^{(g)}$ является 39-кликой. Если $e \in [u] \cap \Delta(b) - [w]$, то $[e] \cap [w]$ содержит 13 вершин из $u^{(g)}$, противоречие. Значит, $\{b\} \cup ([u] \cap \Delta(b)) \cup u^{(g)} \cup w^{(g)}$ является 46-кликой, противоречие. Если $b \in \Delta - a^\perp$ и $|[b] - \Delta| \geq 39$, то для двух вершин $c, d \in [a] \cap [b]$ подграф $[c] \cap [d]$ содержит a, b и 39 вершин из $[b] - \Delta$, противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть на $\Gamma - \Delta$ имеется кокликовая орбита $u^{(g)}$. Тогда $[u]$ содержит по одной вершине в 144 $\langle g \rangle$ -орбитах длины p и $145p \leq |\Gamma - \Delta| \leq 1444$, поэтому $p \leq 7$. Покажем, что $p \leq 3$.

Пусть $c \in [a] \cap [u]$ и $[c] \cap [u]$ содержит γ вершин из $[a] \cap [u]$. Тогда $[c] \cap [u]$ содержит $44 - \gamma$ вершин вне Δ (лежащих в разных $\langle g \rangle$ -орбитах) и $p(44 - \gamma) \leq |[c] - \Delta| \leq 156 - 45 = 111$. Отсюда $32p \leq 111$.

Если $a^\perp = \Delta$, то $\alpha_0(g) = 157$, p делит 1443 и $p = 3$. Далее, $\chi_1(g) = (628 + \alpha_1(g))/40 - 4$, $(628 + \alpha_1(g))/40$ сравнимо с 1 по модулю 3 и $\alpha_1(g) = 120l + 12$. $\square$

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) Γ не содержит собственных сильно регулярных подграфов с параметрами $(v', k', 44, 12)$;
- (2) $p \leq 43$.

Доказательство. Допустим, что Γ содержит собственный сильно регулярный подграф Σ с параметрами $(v', k', 44, 12)$. Тогда $4(k' - 12) + 32^2 = n^2$, поэтому $n = 2l$, $k' = l^2 - 244$, $l \geq 16$, Σ имеет неглавные собственные значения $16 + l$, $16 - l$ и кратность $16 + l$ равна $(l - 17)(l^2 - 244)(l^2 + l - 260)/24l$. Если l нечетно, то 8 делит $(l - 17)(l^2 + l - 20)$, l делит $17 \cdot 61 \cdot 65$ и $l = 5, 13$. Если же l четно, то 3 делит $(l - 2)(l^2 - 1)(l^2 + l - 2)$ и $l = 16$. В любом случае имеем противоречие.

Если $p \geq 47$, то Δ — сильно регулярный подграф с параметрами $(v', k', 44, 12)$, противоречие. $\square$

Из лемм 5–7 следует теорема 2.

В леммах 8–9 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G , $\alpha_i(g) = pw_i$ для $i > 0$ и $\Omega = \text{Fix}(g)$.

Лемма 7. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) *если Ω — пустой граф, то $p = 2$, $\alpha_1(g) = 10r + 26m + 12$ и $\alpha_3(g) = 80r = 1600 - \alpha_1(g)$ или $p = 5$, $\alpha_1(g) = 65n + 10l + 10$ и $\alpha_3(g) = 200l$;*
- (2) *если Ω является n -кликкой, то либо $n = 1$, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 15l + 24 + 39m$ и $\alpha_3(g) = 120l + 36$, либо $n = 2$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 10l + 26m$ и $\alpha_3(g) = 80l - 8$, либо $n = 4$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 10l + 26m + 14$ и $\alpha_3(g) = 80l - 16$ или $p = 3$, $\alpha_1(g) = 10l + 39m + 1$, l сравнимо с -1 по модулю 3 и $\alpha_3(g) = 120l + 24$;*
- (3) *если Ω состоит из n вершин попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ , то $p = 3$, $n \in \{4, 7, \dots, 40\}$, $\alpha_3(g) = 120l + 40 - 4n$ и $\alpha_1(g) = 15l + 30 + 39m - 6n$*
- (4) *если Ω содержит ребро и не содержит вершин, находящихся на расстоянии 2 в Γ , то Ω является объединением изолированных клик, и любые две вершины из разных клик находятся на расстоянии 3 в Γ , либо $p = 3$ и порядки этих клик равны 1 или 4, либо $p = 2$ и порядки этих клик равны 2 или 4.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф и $\alpha_i(g) = pw_i$ для $i \geq 1$. Так как $v = 1600$, то p равно 2 или 5.

Пусть $p = 2$. Тогда $w_1 + w_2 + w_3 = 800$ и $\chi_2(g) = w_3/20 - 4$. Отсюда $w_3 = 40r$. Далее, число $\chi_1(g) = (2w_1 - 10r - 25)/13$ нечетно, поэтому $w_1 = 13m + 6 + 5r$. Наконец, $\alpha_2(g) = 0$ (если $d(u, u^g) = 2$, то единственная вершина из $[u] \cap [u^g]$ попадает в Ω). Поэтому $\alpha_1(g) = 10r + 26m + 12 = 1600 - 80r$.

Пусть $p = 5$. Тогда $w_1 + w_2 + w_3 = 320$ и $\chi_2(g) = w_3/8 - 4$. Отсюда $w_3 = 40l$. Наконец, $\chi_1(g) = (5w_1 - 25l - 25)/13$, поэтому $w_1 = 13n + 5l + 5$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является n -кликкой. Если $n = 1$, то p делит 39 и 315, поэтому $p = 3$. Имеем $\chi_1(g) = (8\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 156)/104$, $\chi_2(g) = (4 + \alpha_3(g))/40 - 4$. Поэтому число $(4 + \alpha_3(g))/40$ сравнимо с 1 по модулю 3, $\alpha_3(g) = 120l + 36$ и число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 15l - 24)/13$ делится на 3. Отсюда $\alpha_1(g) = 15l + 24 + 39m$.

Если $n > 1$, то p делит $4 - n$ и 36, поэтому либо $n = 2$, $p = 2$, либо $n = 4$, $p = 2, 3$. В первом случае число $\chi_2(g) = (8 + \alpha_3(g))/40 - 4$ четно и $\alpha_3(g) = 80l - 8$. Далее, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 10l)/13 - 1$ нечетно и $\alpha_1(g) = 10l + 26m$. Во втором случае $\chi_2(g) = (16 + \alpha_3(g))/40 - 4$, либо $p = 2$ и $\alpha_3(g) = 80l - 16$, либо $p = 3$ и $\alpha_3(g) = 120l + 24$. Далее, $\chi_1(g) = (176 + 8\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/104 - 25/13$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 10l + 26m + 14$, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 10l + 39m + 1$, l сравнимо с -1 по модулю 3.

Пусть Ω состоит из n вершин, попарно находящихся на расстоянии 3. Так как $p_{13}^3 = 3$, $p_{33}^3 = 44$, то p делит 3 и $46 - n$. Отсюда $p = 3$ и $n \in \{4, 7, \dots, 40\}$. Имеем $\chi_2(g) = (4n + \alpha_3(g))/40 - 4$ и число $(4n + \alpha_3(g))/40$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\alpha_3(g) = 120l + 40 - 4n$. Далее, число $\chi_1(g) = (6n + \alpha_1(g) - 15l - 30)/13$ делится на 3 и $\alpha_1(g) = 15l + 30 + 39m - 6n$.

Пусть Ω содержит ребро и не содержит вершин, находящихся на расстоянии 2 в Γ . Тогда Ω является объединением изолированных клик, и любые две вершины из разных клик находятся на расстоянии 3 в Γ . Так как $p_{13}^3 = 3$, то порядки этих клик равны 1, 2 или 4, причем $p = 3$, если порядок некоторой клики равен 1. Если Ω содержит изолированную клику K порядка 2, то $p = 2$.

Допустим, что порядок каждой изолированной клики из Ω равен 4. Тогда p делит $44 - 4t$ и снова $p = 2$. $\square$

Лемма 8. Если Ω содержит вершины a, b на расстоянии 2 в Γ , то $p \leq 3$.

Доказательство. Пусть Ω содержит вершины a, b на расстоянии 2 в Γ и Ω_0 — содержащая a, b связная компонента графа Ω .

Допустим, что диаметр графа Ω_0 равен 2. Тогда по [?, теорема 1.17.1] верно одно из утверждений:

- (i) $\Omega_0 \subseteq a^\perp$ и $\Omega_0(a)$ является объединением изолированных клик;
- (ii) Ω_0 — сильно регулярный граф;
- (iii) Ω_0 — бирегулярный граф со степенями вершин α, β , $\alpha < \beta$, если A и B — множества вершин из Ω_0 степеней α и β , то A — клика, прямые между A и B имеют порядок 2, прямые из B имеют порядок $l = \beta - \alpha + 2 > 2$, и $|\Omega_0| = \alpha\beta + 1$.

В случае (i) с учетом равенства $p_{33}^1 = 12$ число p равно 2 или 3. Если $p = 3$, то $\Omega_0(a)$ является объединением изолированных 3-клик, а если $p = 2$, то $\Omega_0(a)$ является объединением изолированных вершин или 3-клик. Так как $p_{22}^2 = 1229$, то $p = 2$.

В случае (ii) либо $p = 2$ и Ω_0 — пятиугольник, граф Петерсена или граф Хофмана-Синглтона, либо $p > 2$ и Ω_0 — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 2, 1)$. Заметим, что Ω_0 не является пятиугольником, так как число $39 - 2$ нечетно. Если Ω_0 является графом Хофмана-Синглтона, то число ребер между Ω_0 и $\Gamma - \Omega_0$ равно $50 \cdot 32$, $\Gamma - \Omega_0$ содержит 350 вершин, смежных с ребрами из Ω_0 , 900 вершин, смежных с единственной вершиной из Ω_0 и 300 вершин, несмежных с вершинами из Ω_0 . Отсюда $\alpha_3(g) \leq 300$ и $\alpha_2(g) \geq 900$. Далее, число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/40 + 46$ четно, $\alpha_3(g) = 80l$, число $\chi_1(g) = (250 + \alpha_1(g) - 10l)/13$ нечетно, противоречие.

Итак, Ω_0 является графом Петерсена.

Пусть $p > 2$. Тогда $\Omega(a)$ состоит из e изолированных треугольников и либо $e = 1$, $p = 3$, либо $e = 2$, $p = 3, 11$, либо $e = 3$, $p = 3, 5$, либо $e = 4$, $p = 3$, либо $e = 5$, $p = 3$, либо $e = 6$, $p = 3, 7$, либо $e = 7$, $p = 3$, либо $e = 8$, $p = 3, 5$, либо $e \geq 9$, $p = 3$.

В случае $p = 11$ граф Ω является регулярным графом степени 6, $|\Omega \cap \Gamma_2(a)| = 18$, $|\Omega \cap \Gamma_3(a)| = 24$ и $|\Gamma_3(a) - \Omega|$ не делится на 11.

В случае $p = 7$ граф Ω является регулярным графом степени 18, $|\Omega \cap \Gamma_2(a)| = 270$ и $|\Omega \cap \Gamma_3(a)| = 270 \cdot 4/15 = 64$ и $|\Gamma_3(a) - \Omega|$ не делится на 7.

В случае $p = 5$ граф Ω содержит вершины степеней 9 и 24. Допустим, что $|\Omega(a)| = 24$, $\Omega(a)$ содержит β вершин степени 24 в Ω и $\Omega_3(a)$ содержит γ вершин степени 24 в Ω . Тогда число $21\beta + 6(24 - \beta) = |\Omega \cap \Gamma_2(a)|$ сравнимо с 4 по модулю 5 и $4|\Omega \cap \Gamma_2(a)| = 21\gamma + 6|\Omega \cap \Gamma_3(a)| - \gamma$. Отсюда $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = (144 + 15\beta)$ и $576 + 60\beta = 15\gamma + 6|\Omega \cap \Gamma_3(a)|$, противоречие с тем, что $|\Omega \cap \Gamma_3(a)|$ делится на 5.

Значит, Ω — вполне регулярный граф с параметрами $(v', 9, 2, 1)$, $54 = |\Omega \cap \Gamma_2(a)|$ и $|\Omega \cap \Gamma_3(a)| = 36$. Снова имеем противоречие с тем, что $|\Omega \cap \Gamma_3(a)|$ делится на 5. Лемма доказана. $\square$

Из лемм 8-9 следует теорема 1.

До конца работы будем предполагать, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 36, 4, 1, 1, 36\}$ и неразрешимая группа $G =$

$\text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа. Для вершины $a \in \Gamma$ получим $|G : G_a| = 1600$. Ввиду теоремы 1 имеем $p \in \{2, 3, 5\}$. Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/O_{5'}(G)$.

Лемма 9. *Если f — элемент порядка 5 из G , g — элемент порядка $p < 5$ из $C_G(f)$ и $\Omega = \text{Fix}(g)$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

- (1) Ω — пустой граф, $p = 2$, $\alpha_3(g) = 80r$, $r \leq 19$, $\alpha_1(g) = 10r + 26m + 12 = 1600 - 80r$, и $m \in \{-7, -2, 3, 8, \dots, 58\}$;
- (2) Ω состоит из n вершин попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ , $p = 3$, $n \in \{10, 25, 40\}$, $\alpha_3(g) = 120l + 40 - 4n$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 135l - 10n + 39m + 70 \leq 1600$ и m делится на 5;
- (3) $p = 3$, $\alpha_3(g) = 120s$, $\alpha_0(g) = 30t + 10$, $\alpha_1(g) = 39l - 165t + 15s - 30$ или $\alpha_3(g) = 120s + 60$, $\alpha_0(g) = 30t - 5$, $\alpha_1(g) = 195l - 165t + 15s + 60$;
- (4) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 80s - 4\alpha_0(g)$ и $\alpha_1(g) = 10s + 26l + 38 - 6\alpha_0(g)$, l сравнимо с 2 по модулю 5.

Доказательство. Ввиду теоремы 1 граф $\text{Fix}(f)$ пуст, $\alpha_1(f) = 65n + 10l + 10$ и $\alpha_3(f) = 200l$.

Если Ω — пустой граф, то $p = 2$, $\alpha_3(g) = 80r$ и $\alpha_1(g) = 10r + 26m + 12 = 1600 - 80r$ делится на 5. Отсюда $13m + 6$ делится на 5 и $m \in \{-7, -2, 3, 8, \dots, 58\}$. Наконец, $26m + 12 = 1600 - 90r$, поэтому m сравнимо с 2 по модулю 3 и $m \in \{-7, 8, 23, 38, 53\}$.

Если Ω является n -кликой, то n делится на 5, противоречие.

Если Ω состоит из n вершин попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ , то $p = 3$, $n \in \{10, 25, 40\}$, числа $\alpha_3(g) = 120l + 40 - 4n$ и $\alpha_1(g) = 15l + 30 + 39m - 6n$ делятся на 5. Отсюда m делится на 5, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 135l - 10n + 39m + 70 \leq 1600$.

Если $p = 3$, то $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/40 - 4$ и число $(4\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/40$ сравнимо с 1 по модулю 3. Далее, число $\chi_1(g) = (44\alpha_0(g) + 8\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/104 - 25/13$ делится на 3, $\alpha_3(g)$ делится на 60. Если $\alpha_3(g) = 120s$, то $\alpha_0(g) = 30t + 10$, $\alpha_1(g) = 39l - 165t + 15s - 30$. Если же $\alpha_3(g) = 120s + 60$, то $\alpha_0(g) = 30t - 5$, $\alpha_1(g) = 195l - 165t + 15s + 60$.

Если $p = 2$, то $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/40 - 4$, $4\alpha_0(g) + \alpha_3(g) = 80s$. Далее, $\alpha_1(g) = -6\alpha_0(g) + 10s + 26l + 38$ и $13l + 19$ делится на 5, поэтому $l \in \{2, 7, \dots\}$. Наконец, $1600 - 5\alpha_0(g) + 80s = -6\alpha_0(g) + 10s + 26l + 38$, $1600 = -70s - \alpha_0(g) + 26l + 38$. $\square$

Лемма 10. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) $\bar{T} = L \times M$, любая из подгрупп L, M изоморфна Z_5, A_5, A_6 или $PSp(4, 3)$;
- (2) в случае $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 40^2$ имеем $O_{5'}(G) = 1$ и этот случай реализуется, если либо
 - (i) $L \cong M \cong PSp(4, 3)$, либо
 - (ii) $L \cong PSp(4, 3)$, $|L : L_a| = 40$, $M \cong A_6$ и $|M_a| = 9$, либо
 - (iii) $L \cong M \cong A_6$ и $|L_a| = |M_a| = 9$.

Доказательство. Напомним, что простая $\{2, 3, 5\}$ -группа изоморфна A_5, A_6 или $PSp(4, 3)$. Отсюда ввиду теоремы 1 имеем $\bar{T} = L \times M$, любая из подгрупп L, M изоморфна Z_5, A_5, A_6 или $PSp(4, 3)$.

Если $\bar{T} \cong PSp(4, 3)$, то группа $\bar{T}_a$ имеет индекс 40 в $\bar{T}$ и изоморфна $E_9.SL_2(3)$ или $E_{27}.S_4$.

Если $\bar{T} \cong A_6$, то группа $\bar{T}_a$ имеет индекс в $\bar{T}$, делящийся на 10, и делящий 40.

Если $\bar{T} \cong A_5$, то группа $\bar{T}_a$ имеет индекс в $\bar{T}$, делящийся на 10, и делящий 20.

В случае $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 40^2$ имеем $O_{5'}(G) = 1$ и этот случай реализуется, если либо $L \cong M \cong PSp(4, 3)$, либо $L \cong PSp(4, 3)$, $M \cong A_6$ и $|M_a| = 9$, либо $L \cong M \cong A_6$ и $|L_a| = |M_a| = 9$. Лемма и следствие доказаны. $\square$

REFERENCES

- [1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1989. Zbl 0747.05073
- [2] A. Jurišić, J. Vidali, *Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3*, Des. Codes Cryptogr., **65** (2012), 29–47. Zbl 1245.05036
- [3] A.A. Makhnev, M.S. Nirova, *On distance-regular graphs with $\lambda = 2$* , Journal of Siberian Federal Univ., **7**:2 (2014), 188–194.
- [4] M. Behbahani, C. Lam, *Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms*, Discrete Math., **311**:2–3 (2011), 132–144. Zbl 1225.05248
- [5] P.J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts **45**, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. Zbl 0922.20003
- [6] A.L. Gavriluk, A.A. Makhnev, *On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$* , Doklady Mathematics, **81**:3 (2010), 439–442. Zbl 1250.05059
- [7] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Sibirean Electr. Math. Reports, **6** (2009), 1–12. Zbl 1289.20021

ALEXANDR ALEKSEEVICH MAKHNEV

N.N. KRASOVSKY INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,

16, S. KOVALEVSKOY STR.,

EKATERINBURG, 620990, RUSSIA

E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

MADINA MUKHADINOVNA KHAMGOKOVA

KABARDINO-BALKARIAN STATE UNIVERSITY NAMED AFTER H.M. BERBEKOV,

175, CHERNYSHEVSKY ST.,

NALCHIK, 360004, RUSSIA

E-mail address: hamgokova.madina@yandex.ru