Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. V. Dymchenko, V. A. Shlyk, Generalized condensers and vector measures, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 683–691

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.044>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.85.183.62

April 26, 2023, 05:38:06

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 683–691 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.044

УДК 517.51

MSC 46E35

ОБОБЩЕННЫЕ КОНДЕНСАТОРЫ И ВЕКТОРНЫЕ МЕРЫ

Ю.В. ДЫМЧЕНКО, В.А. ШЛЫК

ABSTRACT. There are established the relations between capacity of generalized condenser and modulus of vector measures configurations.

Keywords: generalized condensers, capacity of condenser, Muckenhoupt weight, vector measures.

В данной работе рассматриваются емкости обобщенных конденсаторов, введенных В.Н. Дубининым в [5], а также модули семейств векторных мер [4]. Используя построения из [1, 4], доказываем соотношения между емкостями обобщенных конденсаторов и модулями семейств векторных мер.

Пусть G — открытое множество в n -мерном евклидовом пространстве R^n , $n \geq 2$. Для произвольного измеримого по Лебегу множества $F \subset R^n$ обозначим через $L_n(F) = |F|$ его n -мерную меру Лебега; A_p — класс локально интегрируемых функций $w : R^n \rightarrow (0; +\infty)$, удовлетворяющих условию Макенхаупта

$$\sup \frac{1}{|Q|} \int_Q w \, dx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-q} \, dx \right)^{p-1} < \infty,$$

где супремум берется по всем координатным кубам $Q \subset R^n$, $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Обозначим через $a \cdot b$ скалярное произведение двух векторов, $d(A, B)$ — евклидово расстояние между множествами A и B , и пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ — матрица с измеримыми элементами, удовлетворяющая условию

$$c_0^{-2} w(x)^{2/p} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq c_0^2 w(x)^{2/p} |\xi|^2,$$

где $c_0 \geq 1$, $\xi \in R^n$, $p > 1$.

ДЫМЧЕНКО, YU.V., SHLYK, V.A., GENERALIZED CONDENSERS AND VECTOR MEASURES.

© 2019 Дымченко Ю.В., Шлык В.А.

Поступила 6 марта 2019 г., опубликована 20 мая 2019 г.

Для $\xi \in R^n$ обозначим $\mathcal{A}[\xi] = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \right)^{1/2}$, $\mathcal{A}_p(\xi) = \left(\int_G \mathcal{A}[\xi]^p dx \right)^{1/p}$.

Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$. Известно, что для положительно определённой матрицы существует квадратный корень, который тоже является положительно определённой матрицей. Обозначим соответствующие матрицы через $\sqrt{\mathcal{A}}$ и $\sqrt{\mathcal{B}}$. Из предыдущих неравенств следует, что для любого $\eta \in R^n$

$$(1) \quad \begin{aligned} c_0^{-1} w(x)^{1/p} |\eta| &\leq |\sqrt{\mathcal{A}} \eta| \leq c_0 w(x)^{1/p} |\eta|, \\ c_0^{-1} w(x)^{-1/p} |\eta| &\leq |\sqrt{\mathcal{B}} \eta| \leq c_0 w(x)^{-1/p} |\eta|. \end{aligned}$$

Определим векторную меру $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, где каждая компонента ν_i представляет собой борелевскую меру со знаком. Полную вариацию $|\nu|$ векторной меры ν определим следующим образом:

$$|\nu|(E) = \sup \sum_j \left(\sum_{i=1}^n (\nu_i(E_j))^2 \right)^{1/2}$$

для любого борелевского множества E , где супремум берётся по всем разбиениям $\{E_j\}$ множества E .

Через $L_{p,w}^1(G)$ обозначим класс функций $u : G \rightarrow (-\infty, +\infty)$, локально интегрируемых в G , имеющих в G обобщенные частные производные и таких, что

$$\int_G |\nabla u|^p w dx < \infty.$$

В $L_{p,w}^1(G)$ введем норму

$$\|u\|_{L_{p,w}^1(G)} = \left(\int_G |\nabla u|^p w dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

в котором функции из $L_{p,w}^1(G)$, отличающиеся друг от друга на постоянную $\mathcal{L}_n$ -почти везде на каждой компоненте связности множества G , отождествляются.

Обобщенным конденсатором (в дальнейшем просто конденсатором) назовем набор множеств

$$(E_1, E_2, \dots, E_m, G, \delta_1, \dots, \delta_m) = (\{E_i\}, G, \{\delta_i\}),$$

где $E_1, E_2, \dots, E_m \subset \bar{G}$ — попарно непересекающиеся компакты в $\bar{R}^n = R^n \cup \{\infty\}$, $m \geq 2$ и $\delta_1, \dots, \delta_m$ — некоторые попарно различные числа, сопоставленные этим компактам.

Множества E_i , $G_0 = G \setminus E_0$, где $E_0 = \bigcup_{i=1}^m E_i$, назовем соответственно пластинами и полем конденсатора $(\{E_i\}, G, \{\delta_i\})$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Обозначим через $\mathcal{D}$ класс абсолютно непрерывных на (p, w) -почти всех кривых из G функций u таких, что $u \rightarrow \delta_i$ при $x \rightarrow E_i \cap \bar{G}$ по (p, w) -почти всем кривым из G , $i = 1, \dots, m$; $\mathcal{D}^*$ — замыкание в $L_{p,w}^1(G)$ класса абсолютно непрерывных на (p, w) -почти всех кривых из G функций u таких, что $u = \delta_i$ в некоторой окрестности компакта E_i , $i = 1, \dots, m$.

Определим емкости конденсатора следующим образом:

$$C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}) = \inf \{ \mathcal{A}_p(\nabla u)^p : u \in \mathcal{D} \},$$

$$C_{\mathcal{A},p}^*(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}) = \inf \{ \mathcal{A}_p(\nabla u)^p : u \in \mathcal{D}^* \}.$$

Заметим, что $C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}) \leq C_{\mathcal{A},p}^*(\{E_i\}, G, \{\delta_i\})$.

Кривой γ в R^n назовем образ числового интервала (a, b) или отрезка $[a, b]$ при непрерывном отображении $x = x(t)$ его в R^n . В дальнейшем считаем, что отображение $x = x(t)$ не является постоянным ни на одном интервале из области определения $x(t)$ и задает параметризацию кривой γ .

Будем говорить, что кривая γ соединяет множества E и $F \subset \overline{R^n}$, если для ее параметризации $x = x(t)$, $a < t < b$, выполняется условие

$$\liminf_{t \rightarrow a} h(x(t), E) = \liminf_{t \rightarrow b} h(x(t), F) = 0.$$

Если ρ — неотрицательная борелевская функция в G и γ — локально спрямляемая кривая из G , то, используя натуральную параметризацию $x = x(s)$, $s \in S$ (подробнее см. [7, §2.2]), определим $\int_{\gamma} \rho ds$ как интеграл Лебега $\int_S \rho(x(s)) ds$.

Пусть дано некоторое семейство Γ локально спрямляемых кривых в G . Определим (p, w) -модуль с весом $w \in A_p$ семейства Γ следующим образом:

$$m_{p,w}(\Gamma) = \inf \int_G \rho^p w dx,$$

где инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho : G \rightarrow [0; +\infty]$ таким, что $\int_{\gamma} \rho ds \geq 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. Такие функции назовем допустимыми для Γ . Если $w \equiv 1$, то соответствующий модуль будем обозначать через $m_p(\Gamma)$.

Если вышеуказанное условие на ρ выполняется для всех $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$, где $m_{p,w}(\Gamma_0) = 0$, то такую функцию будем называть (p, w) -почти допустимой. Известно [7, теорема 1.3.6], что инфимум в определении (p, w) -модуля можно брать по (p, w) -почти допустимым функциям.

Конденсатору $(\{E_i\}, G, \{\delta_i\})$ и его емкости $C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\})$ сопоставим набор семейств кривых

$$H = \{H_{12}, \dots, H_{m-1,m}\}$$

и набор чисел $\alpha = \{\alpha_{12}, \dots, \alpha_{m-1,m}\}$, где H_{ij} — семейство локально спрямляемых кривых в G_0 , соединяющих E_i и E_j , а $\alpha_{ij} = |\delta_i - \delta_j|$, $1 \leq i < j \leq m$. При этом кривую $\gamma \in H_{ij}$ считаем ориентированной, при $\delta_i < \delta_j$ считаем ее идущей от множества E_i до множества E_j , а при $\delta_i > \delta_j$ — в обратном направлении.

Пусть дана конфигурация $\alpha\mathcal{E} = (\alpha_{11}\mathcal{E}_{11}, \alpha_{12}\mathcal{E}_{12}, \dots, \alpha_{m-1,m}\mathcal{E}_{m-1,m})$, где каждое $\mathcal{E}_{ij}$ представляет собой семейство неотрицательных борелевских мер, $1 \leq i < j \leq m$. Неотрицательную борелевскую функцию ρ будем называть допустимой для $\alpha\mathcal{E}$, если

$$\int_{\gamma} \rho d\nu \geq \alpha_{ij}$$

для всех $\nu \in \mathcal{E}_{ij}$ и всех $\mathcal{E}_{ij} \neq \emptyset$, $1 \leq i < j \leq m$.

Модулем $m_{p,w}(\alpha\mathcal{E})$ конфигурации $\alpha\mathcal{E}$ назовем величину $\inf \int_G \rho^p w dx$, где инфимум берется по всем допустимым для $\alpha\mathcal{E}$ функциям ρ . Если $w \equiv 1$, то соответствующий модуль будем обозначать через $m_p(\alpha\mathcal{E})$.

Семейство векторных мер назовём (p, w) -исключительным, если (p, w) -модуль семейства их полных вариаций равен нулю.

Для любой положительно определенной матрицы $Q = (q_{ij})$ определим семейства мер

$$|\sqrt{Q}dH_{ij}| = \left\{ |\sqrt{Q}dx|_{\gamma} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n q_{ij}dx_i dx_j} \right|_{\gamma}, \gamma \in H_{ij} \right\}$$

и семейства векторных мер

$$dH_{ij} = \{dx|_{\gamma} = (dx_1(s), dx_2(s), \dots, dx_n(s))|_{\gamma}, \gamma \in H_{ij}\}, \quad 1 \leq i < j \leq m.$$

Из них составим соответствующие конфигурации $\alpha|\sqrt{Q}dH|$ и αdH .

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для (p, w) -почти всех кривых, если семейство кривых, для которого оно не выполняется, является (p, w) -исключительным.

Определим $(\mathcal{A}, p)$ -модуль конфигурации αdH следующим образом:

$$m_{\mathcal{A},p}(\alpha dH) = \inf \mathcal{A}_p(\xi)^p,$$

где инфимум берется по таким вектор-функциям ξ , что $\int_{\gamma} \xi \cdot dx \geq \alpha_{ij}$ для (p, w) -почти всех $\gamma \in H_{ij}, 1 \leq i < j \leq m$. Такие функции ξ будем называть допустимыми для αdH .

Теорема 1. $C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}) = m_{\mathcal{A},p}(\alpha dH) = m_p(\alpha|\sqrt{B}dH|)$.

Доказательство. Класс $\mathcal{D}^*$ непуст, доказательство приведено в [2, лемма 1]. Поэтому $C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}) \leq C_{\mathcal{A},p}^*(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}) < \infty$. Используя теорему 4.4.2 из [7], получим, что для любой $u \in \mathcal{D}$ и (p, w) -почти всех кривых $\gamma \subset G_0$ выполнено следующее условие: для любой спрямляемой подкривой $\tilde{\gamma} \subset \gamma$

$$(2) \quad \int_{\tilde{\gamma}} \nabla u \cdot dx = u(e(\tilde{\gamma})) - u(s(\tilde{\gamma})),$$

где $s(\tilde{\gamma})$ и $e(\tilde{\gamma})$ - соответственно начальная и конечная точки кривой $\tilde{\gamma}$.

Возьмем произвольные $1 \leq i < j \leq m$ и кривую $\gamma \in H_{ij}$ такую, вдоль которой $u(x)$ стремятся к δ_i и δ_j при стремлении x к E_i и E_j соответственно. Рассмотрим произвольную спрямляемую подкривую $\tilde{\gamma} \subset \gamma \cap G_0$. Устремляя начальную и конечную точки $\tilde{\gamma}$ к множествам E_i и E_j из равенства (2) получим

$$\int_{\gamma} \nabla u \cdot dx = |\delta_i - \delta_j| = \alpha_{ij},$$

то есть ∇u допустима для αdH . Следовательно, $m_{\mathcal{A},p}(\alpha dH) \leq \mathcal{A}_p(\nabla u)^p$. Переходя к инфимуму по u , получим

$$(3) \quad m_{\mathcal{A},p}(\alpha dH) \leq C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}) < \infty.$$

Далее рассмотрим произвольную функцию ξ , допустимую для αdH . Для (p, w) -почти всех $\gamma \in H_{ij}, 1 \leq i < j \leq m$ имеем

$$\alpha_{ij} \leq \int_{\gamma} \xi \cdot dx = \int_{\gamma} \sqrt{A}\xi \cdot \sqrt{B}dx \leq \int_{\gamma} |\sqrt{A}\xi| |\sqrt{B}dx|,$$

откуда следует, что функция $|\sqrt{\mathcal{A}}\xi|$ допустима для конфигурации $\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}dH|$. Поэтому

$$m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}dH|) \leq \mathcal{A}_p(\xi)^p.$$

переходя к инфимуму по ξ , получим

$$(4) \quad m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}dH|) \leq m_{\mathcal{A},p}(\alpha dH).$$

Далее докажем неравенство

$$(5) \quad C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}) \leq m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}dH|).$$

Заметим, что

$$m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}}dH|) = m_{p,w}(\alpha|w^{1/p}\sqrt{\mathcal{B}}dH|).$$

Пусть ρ — произвольная допустимая неотрицательная функция для конфигурации $\alpha|w^{1/p}\sqrt{\mathcal{B}}dH|$, то есть для любой кривой $\gamma \in H_{ij}$ выполняется

$$\int_{\gamma} \rho w^{1/p} |\sqrt{\mathcal{B}} dx| \geq \alpha_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq m.$$

Для любого $1 \leq i \leq m$ определим на G_0 функцию

$$u_i(x) = \delta_i + \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \rho w^{1/p} |\sqrt{\mathcal{B}} dx|,$$

где инфимум берется по всем кривым, соединяющим точку $x \in G_0$ с E_i . Если таких кривых не существует, то полагаем $u_i(x) = \max_i \delta_i$. В силу оценок (1) и свойств модуля из [6, Теорема 3]

$$(6) \quad \int_{\gamma} \rho w^{1/p} |\sqrt{\mathcal{B}} dx| \leq c_0 \int_{\gamma} \rho ds < \infty$$

для (p, w) -почти всех кривых $\gamma \subset G_0$. Следовательно, для таких кривых

$$(7) \quad |u_i(b) - u_i(a)| \leq \int_{\tilde{ab}} \rho w^{1/p} |\sqrt{\mathcal{B}} dx| \leq c_0 \int_{\tilde{ab}} \rho ds$$

для любых точек a, b на γ , где $\tilde{ab}$ — дуга кривой γ между точками a и b . Отсюда получаем, что функция u_i абсолютно непрерывна на (p, w) -почти всех кривых в G_0 и почти везде в G $|\partial u_i / \partial x_k| \leq c_0 \rho$, $k = 1, 2, \dots, n$, откуда следует, что $\int_G |\nabla u_i|^p w dx < \infty$.

Неравенство

$$(8) \quad |\sqrt{\mathcal{A}(x)} \nabla u_i(x)| \leq \rho(x) w(x)^{1/p}$$

для почти всех $x \in G_0$ доказывается в точности так же, как и в [1, теорема 1].

Функция ρ удовлетворяет неравенству (6) для (p, w) -почти всех кривых γ в G_0 . Возьмём такую кривую γ , соединяющую E_i и E_j , $i \neq j$, и параметризуем её параметром t (если таких кривых не существует, то в некоторой окрестности компакта E_i $u_i = \max_k \delta_k \geq \delta_i$). Пусть уравнение этой кривой будет $x = x(t)$, где $x(t) \rightarrow E_i$ при $t \rightarrow t_0$ и $x(t) \rightarrow E_j$ при $t \rightarrow t_1$. Имеем:

$$\delta_i \leq u_i(x(t)) \leq \int_{t_0}^t \rho w^{1/p} |\sqrt{\mathcal{B}} dx| \leq \delta_i + c_0 \int_{t_0}^t \rho ds \rightarrow \delta_i$$

при $t \rightarrow t_0$. Отсюда следует, что по (p, w) -почти всем кривым $u_i(x) \rightarrow \delta_i$, когда $x \rightarrow E_i$.

Докажем теперь, что $\liminf_{x \rightarrow E_j} u_i(x) \geq \delta_i + \alpha_{ij}$, $j \neq i$, по (p, w) -почти всем кривым. Предположим противное, что для кривой γ , для которой выполняется неравенство (6), указанный нижний предел равен $\alpha_0 < \delta_i + \alpha_{ij}$. Пусть $\varepsilon = \delta_i + \alpha_{ij} - \alpha_0$. По определению, существует t , $t_0 < t < t_1$ такое, что

$$|u_i(x(t)) - \alpha_0| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \int_t^{t_1} \rho ds < \frac{\varepsilon}{3c_0}.$$

По определению $u_i(x)$, существует кривая γ' , соединяющая $x(t)$ с E_i такая, что

$$\delta_i + \int_{\gamma'} \rho w^{1/p} |\sqrt{B} dx| < u_i(x(t)) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Если γ'' — часть кривой γ , соответствующая значениям параметра (t, t_1) , то кривая $\gamma' \cup \gamma'' \in \Gamma$ и

$$\int_{\gamma' \cup \gamma''} \rho w^{1/p} |\sqrt{B} dx| < u_i(x(t)) - \delta_i + \frac{\varepsilon}{3} + c_0 \int_t^{t_1} \rho ds < \alpha_0 - \delta_i + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \alpha_{ij}.$$

Это противоречит допустимости функции ρ .

Таким образом, мы получаем, что при стремлении $x \rightarrow E_i$ по (p, w) -почти всем кривым $u_i(x)$ имеет нижний предел, не меньший δ_i . При стремлении же $x \rightarrow E_j$, $j \neq i$, по (p, w) -почти всем кривым функция $u_i(x)$ также имеет предел, не меньший $\delta_i + \alpha_{ij} = \delta_i + |\delta_i - \delta_j| \geq \delta_j$.

Далее рассмотрим функцию $u(x) = \min_{1 \leq i \leq m} u_i(x)$. Как следует из выше доказанного, $u(x)$ стремится к пределу, не меньшему δ_i , при стремлении $x \rightarrow E_i$ по (p, w) -почти всем кривым из G_0 , $1 \leq i \leq m$. Из неравенств (8) следует, что $|\sqrt{A(x)} \nabla u(x)| \leq \rho(x) w(x)^{1/p}$.

Наконец, произведем срезку функции $u(x)$ сверху значениями δ_i в некоторых попарно непересекающихся окрестностях множеств E_i , $1 \leq i \leq m$. Получим функцию $\tilde{u}(x)$, которая стремится к δ_i при стремлении $x \rightarrow E_i$ по (p, w) -почти всем кривым из G_0 , то есть $\tilde{u} \in \mathcal{D}$. Также

$$|\sqrt{A(x)} \nabla \tilde{u}(x)| \leq |\sqrt{A(x)} \nabla u(x)| \leq \rho(x) w(x)^{1/p}.$$

Поэтому, используя определение ёмкости, получим

$$C_{A,p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}) \leq \int_G \mathcal{A}_p[\nabla \tilde{u}]^p dx \leq \int_G \rho^p w dx.$$

Взяв инфимум по функциям ρ , получим неравенство (5). Неравенства (3), (4), (5) дают доказательство теоремы.

Далее докажем теорему о равенстве ёмкостей $C_{A,p}$ и $C_{A,p}^*$ при дополнительном условии непрерывности функции $w^{1/p} \sqrt{B}$ в G_0 . Это условие является более слабым, чем условие равномерной непрерывности указанной функции, приведенное в [4].

Для $r > 0$ и конечной точки $x \in \overline{R^n}$ обозначим через $B(x, r)$ открытый шар с центром в точке x и радиуса r ; для $x = \infty$ положим

$$B(\infty, r) = \left\{ x \in \overline{R^n} : |x| > \frac{1}{r} \right\}.$$

Определим $\frac{1}{k}$ -окрестности $O\left(E_i, \frac{1}{k}\right)$ множеств E_i как $\bigcup_{x \in E_i} B\left(x, \frac{1}{k}\right)$, $1 \leq i \leq m$, $k = 1, 2, \dots$. Возьмем k_0 такое, что эти окрестности попарно не пересекаются при $k = k_0$. Пусть $O_i(k) \subset O\left(E_i, \frac{1}{k}\right)$ — открытые множества с гладкой границей такие, что $\overline{O_i(k+1)} \subset O_i(k)$, $k \geq k_0$. Также обозначим $E_{0k} = \bigcup_{i=1}^m \overline{O_i(k)}$, $G_{0k} = G \setminus E_{0k}$. Через $H_{ij}(k)$ обозначим семейство кривых в G_{0k} , соединяющих $\overline{O_i(k)}$ и $\overline{O_j(k)}$, $1 \leq i < j \leq m$, $k \geq k_0$. Кривые считаем ориентированными, при $\delta_i < \delta_j$ начальная точка находится в множестве $\overline{O_i(k)}$, а конечная в $\overline{O_j(k)}$; при $\delta_i > \delta_j$ — наоборот. Конфигурацию $\alpha|\sqrt{B} dH(k)|$ определим аналогично $\alpha|\sqrt{B} dH|$.

Пусть G_k , $k = 1, 2, \dots$ — исчерпание G_0 , то есть последовательность открытых множеств такая, что $\overline{G_k} \subset G_{k+1}$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G_0$. Так как $w^{1/p}\sqrt{B}$ равномерно непрерывна на $\overline{G_k}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует η_k такое, что при $x, z \in G_k$, $|x - z| < \eta_k$ будет выполнено неравенство

$$(9) \quad \left| w^{1/p}(x)\sqrt{B(x)} - w^{1/p}(z)\sqrt{B(z)} \right| < c_0^{-1}\varepsilon.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Следующая лемма отличается от леммы 2 из [2] некоторыми дополнительными условиями и ее доказательство проводится таким же образом.

Лемма 1. Пусть $(\{E_i\}, G, \{\delta_i\})$ — конденсатор и $G_k, k = 1, 2, \dots$ — исчерпание G_0 , введенное выше. Тогда существует функция $\beta(x) \in C^\infty(G_0)$ такая, что $0 < \beta(x) < 1$, $|\nabla\beta(x)| < 1$, $2\beta(x) < d(x, \partial G_0)$ при $x \in G_0$, $\beta(x) < \min(\eta_2, d(x, \partial G_2))$ при $x \in G_1$, $\beta(x) < \min(\eta_{k+1}, d(x, \partial G_{k+1}))$ при $x \in G_k \setminus G_{k-1}$, $k > 1$.

Если обозначить $d\sigma = |\sqrt{B} dx|$, то, как легко следует из оценок (1),

$$c_0^{-1} \leq \frac{d\sigma}{ds} \leq c_0.$$

Используя эти неравенства, можно убедиться, что для заданного ε леммы 3, 4 из [2] с заменой ds на $d\sigma$ и αH , $\alpha H(k)$ на $\alpha|\sqrt{B} dH|$, $\alpha|\sqrt{B} dH(k)|$ переносятся без изменений. Приведем их формулировки:

Лемма 2. Инфимум в определении модуля $t_{p,w}(\alpha|w^{1/p}\sqrt{B} dH|)$ можно брать по допустимым функциям ρ , непрерывным в G_0 и таким, что для любого компакта $K \subset R^n$, $K \cap G_0 \neq \emptyset$, $\inf_{G_0 \cap K} \rho > 0$.

Лемма 3. Пусть дана непрерывная в G_0 функция ρ , допустимая для

$$\alpha|w^{1/p}\sqrt{B} dH|,$$

$\int_{G_0} \rho^p w dx < \infty$, которая удовлетворяет условию: для любого компакта $K \subset R^n$ $\inf_{G_0 \cap K} \rho > 0$. Тогда для заданного $\varepsilon \in (0, 1)$ существуют окрестности $O_i(k)$, $i = 1, \dots, m$ и функция $\tilde{\rho}$, $\tilde{\rho} \geq \rho$ в G_0 , такие, что для любой кривой $\gamma \in H_{ij}(k)$ выполняются условия

$$\int_{\gamma} \tilde{\rho} d\sigma \geq \alpha_{ij}(1 - \varepsilon), 1 \leq i < j \leq m.$$

Функция $\tilde{\rho}$ непрерывна в G_0 , исключая замкнутое множество нулевой L_n -меры, локально ограничена в G_0 и $\tilde{\rho} = \rho$ на $G_0 \setminus \bar{B}$, где $\int_{\bar{B}} \tilde{\rho}^p w dx < \varepsilon$, и, следовательно,

$$\int_{G_0} \tilde{\rho}^p w dx < \int_{G_0} \rho^p w dx + \varepsilon.$$

Далее нам потребуется аналог леммы 5 из [2] (см. также теорему 4 из [4]):

Теорема 2.

$$m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}} dH|) = \lim_{k \rightarrow \infty} m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}} dH(k)|).$$

Доказательство. Здесь снова используем равенство

$$m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}} dH|) = m_{p,w}(\alpha w^{1/p}|\sqrt{\mathcal{B}} dH|).$$

Очевидно, что семейство $H_{ij}(k)$ короче $H_{ij}(k+1)$ для $k \geq k_0$, $1 \leq i < j \leq m$. Поэтому [3, теорема 2.5]

$$m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}} dH|) \leq m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}} dH(k)|),$$

следовательно,

$$m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}} dH|) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}} dH(k)|).$$

С другой стороны, пусть ρ — произвольная положительная функция, допустимая для $\alpha w^{1/p}|\sqrt{\mathcal{B}} dH|$ и удовлетворяющая условиям леммы 3. По лемме 3 найдем $\tilde{k}$ и функцию $\tilde{\rho}$. Тогда $\rho_0 = \frac{\tilde{\rho}}{1 - \varepsilon}$ допустима для $\alpha|\sqrt{\mathcal{B}} dH(\tilde{k})|$, если положить $\tilde{\rho} = 0$ на $G_0 \setminus G_{0\tilde{k}}$. Значит,

$$\int_{G_{0\tilde{k}}} \rho_0^p w dx < \int_{G_0} \rho^p w dx + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отсюда, используя произвол в выборе ρ , при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}} dH(\tilde{k})|) \leq m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}} dH|) + o(1).$$

Из монотонности $m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}} dH(k)|)$ по k из этого следует, что при $k \geq \tilde{k}$

$$m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}} dH(k)|) \leq m_p(\alpha|\sqrt{\mathcal{B}} dH|) + o(1).$$

Устремляя $k \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, получим противоположное неравенство. Лемма доказана.

Теорема 3. Если функция $w^{1/p}\sqrt{\mathcal{B}}$ непрерывна на G_0 , то

$$C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}) = C_{\mathcal{A},p}^*(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}).$$

Доказательство. Неравенство $C_{\mathcal{A},p}(\{E_i\}, G, \{\delta_i\}) \leq C_{\mathcal{A},p}^*(\{E_i\}, G, \{\delta_i\})$ было отмечено ранее и является очевидным. Докажем противоположное неравенство.

Пусть $u \in \mathcal{D}^*$ и такая, что при достаточно больших k $u = \delta_i$ на $O_i(k)$, $1 \leq i \leq m$. Отсюда следует, что $|\nabla u|$ будет допустима для $\alpha|\sqrt{B}dH(k)|$ при достаточно больших k , поэтому при таких k

$$m_p(\alpha|\sqrt{B}dH(k)|) \leq \mathcal{A}_p(\nabla u)^p.$$

Аппроксимируя произвольную функцию $u \in D^*$ функциями указанного выше вида и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, используя теоремы 1, 2 и произвол в выборе u , получаем противоположное неравенство. Теорема доказана.

REFERENCES

- [1] Yu. V. Dymchenko, V.A. Shlyk, *Capacity of polycondenser and modulus of family of vector measures*, Analit. teoriya chisel i teoriya funkci. 24.(Zap. nauchn. sem. POMI), **371** (2009), 56–68.
- [2] Yu. V. Dymchenko, V.A. Shlyk, *On a problem of Dubinin for the capacity of a condenser with a finite number of plates*, Mat. Zametki, **103**:6 (2018), 841–852. Zbl 1397.30025
- [3] A.V. Sychev, *Modules and space quasiconformal mappings*, Novosibirsk: “Nauka”, 1983. Zbl 0528.30002
- [4] H. Aikawa, M. Ohtsuka, *Extremal length of vector measures*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A., **24** (1999), 61–88. Zbl 0940.31006
- [5] V. N. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Basel: Birkhauser / Springer, 2014. Zbl 1305.30002
- [6] B. Fuglede, *Extremal length and functional completion*, Acta Math., **126**:3 (1957), 171–219. Zbl 0079.27703
- [7] M. Ohtsuka, *Extremal length and precise functions*, GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications 19. Tokyo: Gakkōtoshō, 2003. Zbl 1075.31001

YURIY VIKTOROVICH DYMCHENKO
 FAR EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,
 8, SUKHANOVA STR.,
 VLADIVOSTOK, 690090, RUSSIA
E-mail address: dymch@mail.ru

VLADIMIR ALEKSEEVICH SHLYK
 VLADIVOSTOK BRANCH OF RUSSIAN CUSTOMS ACADEMY,
 16V, STRELKOVAYA STR.,
 VLADIVOSTOK, 690034, RUSSIA
E-mail address: shlykva@yandex.ru