Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. I. Ivanov, I. A. Kremer, Yu. M. Laevsky, On the streamline upwind scheme of solution to the filtration problem, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 757–776

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.051>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.81.137.203

April 26, 2023, 18:32:06

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 757–776 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.051

УДК 519.63

MSC 65M06

ОБ ОДНОЙ ПРОТИВОПОТОКОВОЙ СХЕМЕ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ

М.И. ИВАНОВ, И.А. КРЕМЕР, Ю.М. ЛАЕВСКИЙ

ABSTRACT. The work is devoted to one of the approaches in the numerical simulation of filtration processes of a two-phase incompressible fluid. Buckley – Leverett problem is considered with solutions of a shock wave type. Within the mixed finite element method upwind algorithm for solution to equation for saturation is proposed, which gives solutions without numerical oscillations at the discontinuity. Special attention is paid to a new approach to solving the degenerate Neumann problem in a mixed formulation for the pressure and total flow velocity. The work is accompanied by an illustration of the results of numerical experiments for 3D problem.

Keywords: immiscible fluid flow, filtration, two-phase fluid, injection well, production well, mixed finite element method, upwind scheme.

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена одному из подходов при численном моделировании процессов фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости, которую в дальнейшем будем интерпретировать как систему "нефть-вода" [4, 5, 9, 14, 27, 34]. При этом рассматривается соответствующая многомерная математическая модель в терминах "скорости-давления-насыщенности", численная реализация которой осуществляется смешанным методом конечных элементов [7, 37]. Имеется обширная литература, затрагивающая вопросы существования и регулярности решений в рамках различных математических формулировок для таких

IVANOV, M.I., KREMER, I.A., LAEVSKY, YU.M., ON THE STREAMLINE UPWIND SCHEME OF SOLUTION TO THE FILTRATION PROBLEM.

© 2019 Иванов М.И., Кремер И.А., Лаевский Ю.М.

Частично работа выполнена по госзаданию (проект № 0315-2016-0008) и при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-11-00048) и РФФИ (грант № 16-29-15122).

Поступила 18 марта 2019 г., опубликована 7 июня 2019 г.

моделей (см., например, [1, 2, 11, 12, 28]). Построению и анализу конечно-элементных аппроксимаций задач фильтрации многофазной жидкости также посвящено большое количество публикаций: например, [14, 16, 26, 30, 38]. В частности, в ряде работ применяется комбинация смешанного метода конечных элементов для нахождения вектора суммарной скорости фаз и давлений фаз и прямого метода конечных элементов [3, 38] или метода конечных объемов для нахождения насыщенностей [10, 17, 18, 32, 33]. При этом, например, для элементов Равьяра–Тома наименьшей степени [37] сеточные степени свободы, определяемые компонентами вектора скорости, связаны с гранями сеточных ячеек, значения сеточного давления связаны с самими ячейками (например, с их барицентрами), а значения сеточной насыщенности определены в вершинах сетки. Такое задание сеточных переменных соответствует исходной гладкости решений задач, включающих смешанную формулировку для суммарной скорости и давления при наличии капиллярной диффузии, когда $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\text{div}}(\Omega)$, $p \in L_2(\Omega)$, $S \in H^1(\Omega)$. Здесь через $\mathbf{v}$, p и S обозначены заданные в некоторой области Ω векторная функция суммарной скорости и скалярные функции давления и насыщенности одной из фаз (например, воды), а для функциональных пространств используются общепринятые обозначения. Отметим, что уравнение для насыщенности можно рассматривать в виде интегрального тождества в пространстве $L_2(\Omega)$ и аппроксимировать насыщенность элементами из $L_2(\Omega)$ (например, кусочно-постоянными функциями). Такой подход был реализован в работах [15, 30]. При этом важно "правильно" осуществить переход от суммарной скорости к скорости воды.

Собственно математическая модель фильтрации двухфазной жидкости представляет собой систему дифференциальных уравнений, снабженную краевыми условиями и начальными данными, и включающую эллиптическое уравнение для давления (или систему уравнений первого порядка для скорости и давления) и нестационарное уравнение параболического типа для насыщенности при наличии капиллярного давления или гиперболическое уравнение в отсутствие капиллярных сил (модель Баклея–Лeverетта). Широко распространенным подходом к решению данной задачи является IMPES (Implicit for Pressure and Explicit for Saturation) метод, впервые рассмотренный в статье [39]. Отметим, что в большинстве работ рассматривается модель при наличии капиллярных сил. С одной стороны, наличие диффузионного члена играет роль естественной регуляризации, но с другой стороны, самым существенным образом усиливает ограничение на шаг интегрирования, обусловленное условием устойчивости явной схемы, используемой в IMPES методе. В связи с этим возникли модификации IMPES метода в сторону повышения неявности схемы с целью ослабления ограничений на шаг интегрирования (см., например, [13]), вплоть до чисто неявной схемы [15, 19, 41]. В случае отсутствия в модели капиллярных сил шаг по времени явной семы регламентируется только условием Куранта, что вполне соответствует физическим представлениям о процессе. Для процесса вытеснения нефти водой насыщенность представляет собой разрывную функцию (поршневое вытеснение) типа ударной волны. В случае применения классического метода Галеркина для вычисления насыщенности в окрестности разрыва возникают численные осцилляции (см., например, результаты экспериментов в [25]). Ниже будет приведен демонстрирующий такого рода осцилляции пример расчета по методике, рассмотренной в [30], где суммарная скорость

и давление определяются смешанным методом конечных элементов. Одним из способов борьбы с такими осцилляциями является противопотоковый метод конечных элементов, предложенный в [8, 22, 23], известный в литературе, как SUPG (Streamline Upwind Petrov–Galerkin) метод. Отметим работу [29], в которой для одномерной модели Баклея–Леверетта рассмотрено поведение на разрыве схем Лакса–Вэндроффа [31] и Кабаре (балансно-характеристической схемы) [20, 21, 24]. Другим популярным средством устранения осцилляций в задачах фильтрации многофазной жидкости является разрывный метод Галеркина [19, 36, 40], основным недостатком которого является существенное увеличение количества степеней свободы. И, наконец, одним из самых эффективных способов построения неосциллирующих схем является использование метода конечных объемов для аппроксимации водонасыщенности с противопотоковым вычислением коэффициента мобильности [10, 18, 32, 33]. При этом для вычисления скорости и давления может быть использован смешанный метод конечных элементов. Именно в рамках такого подхода проведено данное исследование.

С точки зрения исходной постановки данная работа наиболее близка к статье [18], в которой рассматривается двумерная модель Баклея–Леверетта без учета гравитационных сил. В отличие от [18] в данной статье рассматривается трехмерная модель при наличии вертикальных нагнетательных и добывающих скважин с различной геометрией по высоте источника/стока жидкости. Такая постановка делает задачу существенно трехмерной и позволяет исследовать течение во всех пространственных направлениях. При этом на скважинах задаются объемные дебиты, а на внешней границе нефтяного коллектора задаются условия непротекания. При такой постановке для давления возникает вырожденная задача Неймана, решение которой осуществляется в рамках смешанной формулировки. При этом трудности, связанные с необходимостью решения в задаче в подпространстве, преодолеваются приемом, использованным для прямой формулировки в работе [6] и состоящем в модификации функции Лагранжа, позволяющей искать стационарные точки во всем пространстве. Статья организована следующим образом. В п.1 приводятся уравнения фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости в виде законов сохранения массы и импульса для каждой фазы в рамках модели Баклея–Леверетта. Для этих уравнений выписываются соответствующие интегральные тождества, причем уравнение для водонасыщенности рассматривается в пространстве квадратично суммируемых функций. В п.2 в рамках метода конечных объемов конструируется противопотоковый алгоритм вычисления водонасыщенности в переменных, привязанных к сеточным ячейкам. В этом смысле метод для вычисления водонасыщенности можно трактовать как смешанный метод конечных элементов. При этом используется явная схема Эйлера, лежащая в основе классического метода IMPES. В п.3 приводится смешанная формулировка для вычисления суммарной скорости потока жидкости и давления, реализация которой осуществляется смешанным методом конечных элементов. Дается описание упомянутого выше способа решения вырожденной задачи Неймана в смешанной постановке. В п.4 приводятся результаты вычислительных экспериментов для трехмерной модели Баклея–Леверетта, основное внимание в которых было уделено демонстрации отсутствия осцилляций на фронте разрыва функции водонасыщенности.

1. УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ

Математическая модель фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости (нефть-вода) определяется законами сохранения массы и импульса каждой из фаз. Закон сохранения массы может быть записан в виде

$$(1) \quad \phi \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_\alpha = 0, \quad \alpha = w, o,$$

где S_α , $\mathbf{v}_\alpha$ – насыщенности и скорости каждой фазы, ϕ – пористость, которая полагается постоянной. Также будем предполагать, что все поровое пространство заполнено двухфазной жидкостью:

$$(2) \quad S_w + S_o = 1.$$

В предположении несжимаемости обеих жидкостей из (1), (2) следует уравнение для суммарной скорости потока $\mathbf{v} = \mathbf{v}_w + \mathbf{v}_o$:

$$(3) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Далее, закон сохранения импульса для процесса фильтрации имеет форму обобщенного закона Дарси:

$$(4) \quad \mathbf{v}_\alpha = -k_0 \lambda_\alpha \nabla(p_\alpha + \rho_\alpha g H), \quad \alpha = w, o,$$

где p_α , λ_α , ρ_α , – давления, подвижности и плотности фаз, g – ускорение силы тяжести, k_0 – абсолютная проницаемость пористой среды, H – расстояние от фиксированной поверхности отсчета до точки среды в направлении действия силы тяжести. При этом

$$\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(S_\alpha) = \frac{f_\alpha(S_\alpha)}{\mu_\alpha}, \quad \alpha = w, o,$$

где $f_\alpha(S_\alpha)$ – относительные фазовые проницаемости, μ_α – коэффициенты динамической вязкости фаз. В численных экспериментах в качестве относительных фазовых проницаемостей будут использоваться следующие функции [27]:

$$f_\alpha(S_\alpha) = \begin{cases} 0, & 0 \leq S_\alpha \leq \underline{S} \\ \left(\frac{S_\alpha - \underline{S}}{\bar{S} - \underline{S}} \right)^3, & \underline{S} < S_\alpha < \bar{S} \\ 1, & \bar{S} \leq S_\alpha \leq 1 \end{cases}, \quad \alpha = w, o.$$

где $0 \leq \underline{S} < \bar{S} \leq 1$. В дальнейшем будем обозначать $S = S_w$, и согласно (2) $S_o = 1 - S$. Далее, для модели Баклея-Левретта давления фаз совпадают: $p_w = p_o$, и пусть $p = p_w$. Кроме того, для простоты будем пренебрегать давлением, обусловленным силой тяжести, что соответствует тонким пластам, когда $H \approx \text{const}$. Просуммируем по α равенства (4):

$$(5) \quad \mathbf{v} = -k_0 \lambda(S) \nabla p,$$

где $\lambda(S) = \lambda_w(S) + \lambda_o(1 - S)$ – суммарная подвижность. Пусть для простоты $\bar{S} = 1 - \underline{S}$. При этом $\underline{S} < 0.5 < \bar{S}$. Нетрудно показать, что при

$$S = \frac{\sqrt{\mu_w} \underline{S} + \sqrt{\mu_o} \bar{S}}{\sqrt{\mu_w} + \sqrt{\mu_o}}$$

суммарная подвижность принимает минимальное значение

$$\lambda_{\min} = (\sqrt{\mu_w} + \sqrt{\mu_o})^{-2} > 0,$$

обеспечивая тем самым эллиптичность системы (3), (5). Замыкает эту систему уравнение (1) при $\alpha = w$, где

$$(6) \quad \mathbf{v}_w = \sigma(S)\mathbf{v}, \quad \sigma(S) = \frac{\lambda_w(S)}{\lambda(S)}.$$

Равенство (6) фактически означает, что направления суммарного потока и потоков фаз совпадают.

Рассмотрим открытую цилиндрическую область $\Omega = G \times (0, L_z)$ с кусочно-гладкой внешней границей Γ и с M цилиндрическими нагнетательными и добывающими скважинами $\Omega_{\alpha,m} = G_{\alpha,m} \times [L'_{\alpha,m}, L''_{\alpha,m}]$, $m = 1, \dots, M_\alpha$, $\alpha = in, pr$. Здесь $G_{\alpha,m}$ – замкнутые попарно непересекающиеся множества, $G_{\alpha,m} \subset G$, $[L'_{\alpha,m}, L''_{\alpha,m}] \subseteq [0, L_z]$ (предполагается, что длина рабочей поверхности скважин может быть меньше толщины пласта). Пусть

$$\Gamma_{\alpha,m} = \partial G_{\alpha,m} \times (L'_{\alpha,m}, L''_{\alpha,m})$$

– боковая поверхность скважины.

Для модели Баклея–Левретта скорости и насыщенности фаз являются разрывными функциями, и уравнение (1) имеет место только в подобластях $\Omega_\alpha(t)$, где

$$\Omega_w(t) \cap \Omega_o(t) = \emptyset, \quad \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_w(t) \cup \bar{\Omega}_o(t),$$

$\Omega_o(t)$ – подобласть, в которой $0 \leq S \leq \underline{S}$. При этом $\lambda_w = 0$ в подобласти $\Omega_o(t)$, и, как следствие, $\mathbf{v}_w = \mathbf{0}$. Отметим, что, если начальное распределение водонасыщенности таково, что $S > \underline{S}$ во всей области Ω (состояние заводнения добывающей скважины), то $\Omega_o(t) = \emptyset$. В дальнейшем будем обозначать $\Gamma_{wo}(t) = \bar{\Omega}_w(t) \cap \bar{\Omega}_o(t)$ – интерфейс между подобластями. Сформулируем условие на интерфейсе, играющее ту же роль, что и условие Гюгоннио на ударной волне в задачах газовой динамики. Положим

$$(7) \quad [\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]_{wo}(t) = 0,$$

где $\mathbf{n}(t)$ – заданный на интерфейсе $\Gamma_{wo}(t)$ вектор нормали, направленный в подобласть $\Omega_o(t)$, $[\cdot]_{wo}$ – скачок скалярной функции на $\Gamma_{wo}(t)$. И, наконец, будем полагать, что источник воды (нагнетательные скважины) находится в подобласти $\Omega_w(t)$:

$$(8) \quad \Gamma_{in,m} \subset \bar{\Omega}_w(t), \quad m = 1, \dots, M_w, \quad t > 0.$$

Дополним задачу краевыми условиями непротекания рассматриваемой двухфазной жидкости за внешнюю границу области Ω и условиями на скважинах:

$$(9) \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_\Gamma = 0.$$

Здесь $\mathbf{n}$ – заданная почти всюду на Γ (исключая точки нарушения гладкости) внешняя нормаль. Из равенств (6), (10) немедленно следует, что

$$(\mathbf{v}_w \cdot \mathbf{n})|_\Gamma = (\mathbf{v}_o \cdot \mathbf{n})|_\Gamma = 0.$$

Далее, пусть

$$(10) \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\alpha,m})|_{\Gamma_{\alpha,m}} = q_{\alpha,m}/|\Gamma_{\alpha,m}|, \quad m = 1, \dots, M_\alpha, \quad \alpha = in, pr,$$

где $\mathbf{n}_{\alpha,m}$ – единичный вектор внешней (направленной внутрь скважин) нормали, $|\Gamma_{\alpha,m}|$ – площадь боковой поверхности скважины, $q_{\alpha,m}$ – объемный дебит

скважины. При этом интегрирование уравнения (3) по области Ω учетом равенства (9) приводит к необходимому условию разрешимости рассматриваемой задачи:

$$\sum_{m=1}^{M_{in}} \int_{\Gamma_{in,m}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{in,m} d\gamma + \sum_{m=1}^{M_{pr}} \int_{\Gamma_{pr,m}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{pr,m} d\gamma = 0,$$

откуда согласно (10) следует, что

$$(11) \quad \sum_{m=1}^{M_{in}} q_{in,m} + \sum_{m=1}^{M_{pr}} q_{pr,m} = 0.$$

Отметим, что для вычисления суммарной скорости жидкости нужны лишь суммарные дебиты скважин $q_{\alpha,m}$, которые задаются в качестве исходных данных.

Сформулируем задачу о поиске обобщенного решения в следующих классах функций: при $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &\in \mathbf{H}_{\text{div}}(\Omega, \Gamma), \quad \mathbf{v}_w(t) \in \mathbf{H}_{\text{div}}(\Omega_w(t) \cup \Omega_o(t)), \\ p(t) &\in L_{2,\perp}(\Omega), \quad S(t) \in H^1(\Omega_w(t) \cup \Omega_o(t)) \cap L_\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Здесь

$$\mathbf{H}_{\text{div}}(\Omega, \Gamma) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{div}}(\Omega); (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_\Gamma = 0\}, \quad L_{2,\perp}(\Omega) = \{q \in L_2(\Omega); \int_\Omega q d\mathbf{x} = 0\}.$$

При этом $\mathbf{v}(t)$ удовлетворяет неоднородным главным краевым условиям (10). В соответствии с (3), (5) по заданной функции $S(t)$ суммарная скорость $\mathbf{v}$ и давление p находятся из следующей смешанной формулировки: для произвольных вектор-функции $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{div}}(\Omega, \partial\Omega)$ и скалярной функции $q \in L_{2,\perp}(\Omega)$ имеют место интегральные тождества

$$(12) \quad \int_\Omega \frac{1}{k_0 \lambda(S)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} - \int_\Omega p \nabla \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} = 0,$$

$$(13) \quad \int_\Omega q \nabla \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = 0.$$

Отметим, что граница $\partial\Omega$ включает боковые поверхности скважин $\Gamma_{\alpha,m}$, и пространство $\mathbf{H}_{\text{div}}(\Omega, \partial\Omega)$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{H}_{\text{div}}(\Omega, \Gamma)$. Далее, запишем уравнение (1) при $\alpha = w$ в проекционном виде в пространстве $L_2(\Omega)$, т.е. для произвольной функции $q \in L_2(\Omega)$ рассмотрим интегральное тождество

$$(14) \quad \phi \int_\Omega q \frac{\partial S}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_w(t)} q \nabla \cdot \mathbf{v}_w d\mathbf{x} = 0,$$

где скорость воды $\mathbf{v}_w$ задается равенствами (6). При этом учитывается тот факт, что в подобласти $\Omega_o(t)$ вырождается функция подвижности воды, и согласно (6) в этой подобласти $\mathbf{v}_w \equiv 0$.

Замечание 1. Так как векторы нормали $\mathbf{n}_{\alpha,m}$, $\alpha = in, pr$ направлены внутрь скважин, то на поверхности нагнетательных скважин $\Gamma_{in,m}$ векторы $\mathbf{v}$ и

$\mathbf{n}_{in,m}$ разнонаправлены, и, следовательно, $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{in,m})|_{\Gamma_{in,m}} < 0$, а на поверхности добывающих скважин $\Gamma_{pr,m}$ векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}_{pr,m}$ направлены одинаково, и, следовательно, $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{pr,m})|_{\Gamma_{pr,m}} > 0$. Тогда согласно (10) следует задавать $q_{in,m} < 0$ и $q_{pr,m} > 0$.

2. АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОДОНАСЫЩЕННОСТИ

Пусть τ – замыкание некоторой подобласти области из Ω и χ_τ – характеристическая функция множества τ :

$$\chi_\tau(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \tau \\ 0, & \mathbf{x} \notin \tau \end{cases}.$$

Полагая в (14) $q = \chi_\tau$, получим:

$$(15) \quad \phi \frac{dS_\tau}{dt} + \frac{1}{|\tau|} \int_{\partial\tau_w(t)} \mathbf{v}_w \cdot \mathbf{n}_{\tau,w} d\gamma = 0,$$

где

$$S_\tau = \frac{1}{|\tau|} \int_{\tau} S d\mathbf{x},$$

$\tau_w(t) = \bar{\Omega}_w(t) \cap \tau$, $\mathbf{n}_{\tau,w}$ – заданный на $\partial\tau_w(t)$ единичный вектор внешней по отношению к множеству $\tau_w(t)$ нормали, $|\tau|$ – объем подобласти τ . Отметим, что в случае $\tau \cap \bar{\Omega}_o(t) \neq \emptyset$ часть границы множества $\tau_w(t)$ принадлежит интерфейсу $\Gamma_{wo}(t)$, на котором заданная в (6) функция $\sigma(S)$ определена неоднозначно – ее продолжение на $\Gamma_{wo}(t)$ из подобласти $\Omega_o(t)$ равно нулю, и, следовательно, равны нулю соответствующие продолжения компонент вектора $\mathbf{v}_w$. В равенстве (15) под $\mathbf{v}_w$ на $\partial\tau_w(t)$ понимается вектор скорости воды, определенный в замкнутой подобласти $\tau_w(t)$. Также отметим, что, если на некотором промежутке времени $[t', t'']$ имеет место $\tau \subset \bar{\Omega}_o(t)$, то согласно включению (8) из (15) следует, что $S_\tau = \text{const}$ при $t \in [t', t'']$.

Рассмотрим замкнутый многогранник τ с границей $\partial\tau$, являющейся объединением замкнутых многоугольников e_k , $k = 1, \dots, K$:

$$\partial\tau = \bigcup_{k=1}^K e_k, \quad \overset{\circ}{e}_k \cap \overset{\circ}{e}_l = \emptyset, \quad k, l = 1, \dots, K, \quad k \neq l,$$

где $\overset{\circ}{e}_k = e_k \setminus \partial e_k$ – "внутренность" многоугольника e_k . При этом каждый многоугольник e_k является либо частью границы многогранника τ_k , либо частью границы $\partial\Omega$. В дальнейшем будем предполагать, что, если $\tau \cap \Gamma_{wo}(t_n) \neq \emptyset$ в некоторый момент времени t_n , то $e_k \subset \Gamma_{wo}(t_n)$ – один (или несколько) граничный многоугольник целиком лежит на интерфейсе $\Gamma_{wo}(t_n)$ (см. рисунок 1). В частности это означает, что в момент времени t_n в равенстве (15) следует полагать $\tau_w(t_n) = \tau$. С использованием введенных обозначений, второе слагаемое в левой части уравнения (15) с учетом равенств (6) можно записать в виде:

$$(16) \quad I(t) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{|\tau|} \int_{\partial\tau} \sigma(S) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\tau d\gamma = -\frac{1}{|\tau|} \sum_{k=1}^K \int_{e_k} \sigma(S) \mathbf{v} d\gamma \cdot \mathbf{n}_{e_k}.$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что вектор нормали к многоугольнику e_k постоянный на e_k .

Рис. 1. Двумерная иллюстрация направлений потока жидкости в ячейке τ

Пусть

$$(\partial\tau)^- = \{\mathbf{x} \in \partial\tau \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \geq 0\}, \quad (\partial\tau)^+ = \partial\tau \setminus (\partial\tau)^-,$$

т.е. $(\partial\tau)^-$ – часть границы $\partial\tau$, через которую в момент времени t двухфазная жидкость вытекает из подобласти τ , а через часть границы $(\partial\tau)^+$ жидкость поступает в подобласть τ . При этом часть границы, вдоль которой направлен поток, мы относим к $(\partial\tau)^-$. В частности, согласно (9) к $(\partial\tau)^-$ относится грань множества τ , являющаяся подмножеством внешней границы Γ . Напомним, что согласно (6) направления суммарного потока и потока воды совпадают. При этом

$$(17) \quad (\partial\tau)^- = \bigcup_{k=1}^{K^-} e_k^-, \quad (\partial\tau)^+ = \bigcup_{k=1}^{K^+} e_k^+,$$

где $K^- + K^+ = K$.

Пусть в области Ω задано разбиение $\mathcal{T} = \{\tau\}$ на описанные выше многогранники:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}} \tau.$$

В основе приближенного метода вычисления насыщенности при известном на момент времени t_{n-1} векторе суммарной скорости $\mathbf{v}$ лежит замена функции S на кусочно-постоянную по пространственным переменным функцию $\tilde{S}$ с постоянными в ячейках τ значениями $\tilde{S}_\tau$, т.е.

$$\tilde{S} = \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \tilde{S}_\tau \chi_\tau.$$

Далее, вместо функции σ рассмотрим функцию $\tilde{\sigma}$ с постоянными значениями $\tilde{\sigma}_{e_k}$ на гранях e_k :

$$(18) \quad \tilde{\sigma}_{e_k^-} = \sigma(\tilde{S}_\tau), \quad \tilde{\sigma}_{e_k^+} = \sigma(\tilde{S}_{\tau_k}).$$

Вместо (16) рассмотрим величину

$$(19) \quad \tilde{I}(t) = -\frac{1}{|\tau|} \sum_{k=1}^K \int_{e_k} \tilde{\sigma}_{e_k} \mathbf{v} d\gamma \cdot \mathbf{n}_{e_k} = -\frac{1}{|\tau|} \sum_{k=1}^K |e_k| \tilde{\sigma}_{e_k} \mathbf{v}_{e_k} \cdot \mathbf{n}_{e_k},$$

где $\mathbf{v}_{e_k}$ – осредненная по грани e_k суммарная скорость:

$$\mathbf{v}_{e_k} = \frac{1}{|e_k|} \int_{e_k} \mathbf{v} d\gamma.$$

Здесь $|e_k|$ – площадь многоугольника e_k . Равенство (19) перепишем в виде:

$$(20) \quad \tilde{I}(t) = \tilde{I}^+(t) - \tilde{I}^-(t),$$

где

$$\tilde{I}^-(t) = \frac{1}{|\tau|} \sum_{k=1}^{K^-} |e_k^-| \tilde{\sigma}_{e_k^-} \mathbf{v}_{e_k^-} \cdot \mathbf{n}_{e_k^-}, \quad \tilde{I}^+(t) = -\frac{1}{|\tau|} \sum_{k=1}^{K^+} |e_k^+| \tilde{\sigma}_{e_k^+} \mathbf{v}_{e_k^+} \cdot \mathbf{n}_{e_k^+}.$$

При этом в соответствии с (17) $\mathbf{v}_{e_k^-} \cdot \mathbf{n}_{e_k^-} \geq 0$, $\mathbf{v}_{e_k^+} \cdot \mathbf{n}_{e_k^+} < 0$ и, следовательно, $\tilde{I}^-(t) \geq 0$, $\tilde{I}^+(t) > 0$ – вытекающей и втекающей потоки массы воды в ячейке τ в момент времени t соответственно.

Из равенств (19), (20) получим полудискретный аналог уравнения для водонасыщенности (15):

$$\phi \frac{d\tilde{S}_\tau}{dt} = \tilde{I}^+(t) - \tilde{I}^-(t).$$

Проинтегрируем это равенство по t от t_{n-1} до t_n . При этом оставаясь в рамках классического метода IMPES, вычисляем значения водонасыщенности $\tilde{S}_\tau^n$ по явной схеме Эйлера:

$$(21) \quad \tilde{S}_\tau^n = \tilde{S}_\tau^{n-1} + \frac{\Delta t}{\phi} \left(\tilde{I}^+(t_{n-1}) - \tilde{I}^-(t_{n-1}) \right), \quad n = 1, \dots, N_t.$$

Здесь $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ – шаг сетки по времени, $\tilde{\sigma}_{e_k^+}^{n-1} = \sigma(\tilde{S}_\tau^{n-1})$, $\tilde{\sigma}_{e_k^-}^{n-1} = \sigma(\tilde{S}_{\tau_k}^{n-1})$, $\mathbf{v}_{e_k^+}^{n-1}$ и $\mathbf{v}_{e_k^-}^{n-1}$ – значения векторов суммарных скоростей на соответствующих гранях на слое t_{n-1} . При этом значения $\tilde{S}_\tau^0$ заданы: $\tilde{S}_\tau^0 = S_\tau(0)$, где величины $S_\tau(0)$ определены при получении интегральной формы уравнения для водонасыщенности (15). По вычисленным в (21) значениям $\tilde{S}_\tau^n$ в следующем пункте будет приведен алгоритм вычисления суммарной скорости $\mathbf{v}^n$, включая случай $n = 0$. Суммированием умноженных на величину $\phi|\tau|/\Delta t$ уравнений (21) по всем $\tau \in \mathcal{T}$ нетрудно показать наличие точного сеточного баланса – достаточно заметить, что для всех внутренних граней области Ω имеет место равенство

$$|e^-| \tilde{\sigma}_{e^-} \mathbf{v}_{e^-} \cdot \mathbf{n}_{e^-} + |e^+| \tilde{\sigma}_{e^+} \mathbf{v}_{e^+} \cdot \mathbf{n}_{e^+} = 0,$$

где $e^- = e^+ = e$ – общая грань смежных ячеек. Действительно, из одной ячейки вода вытекает через грань e со скоростью $\tilde{\sigma}_{e^-} \mathbf{v}_{e^-}$, а в другую втекает с той же скоростью, причем внешние нормали на e в смежных ячейках направлены в противоположные стороны.

Замечание 2. В случае, когда $\Omega_{in,m} \cap \tau \neq \emptyset$ (множество τ содержит часть нагнетательной скважины), будем полагать $S_\tau = 1$. Наличие добывающих скважин в расчетах водонасыщенности можно игнорировать – просто в соответствии с краевыми условиями (10) векторы суммарной скорости на боковых гранях скважин заданы, а водонасыщенность не вычисляется. В этом смысле при построении дискретной задачи сеточное множество Ω можно

рассматривать, как множество без скважин с заданными на гранях некоторых ячеек компонентами суммарной скорости.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕКТОРА СКОРОСТИ ПОТОКА И ДАВЛЕНИЯ

Уравнения (12), (13) перепишем для функций $\mathbf{v}^n$, p^n , используя вместо S кусочно-постоянную функцию

$$(22) \quad \tilde{S}^n = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \tilde{S}_\tau^n \chi_\tau,$$

Имеем:

$$(23) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{div}}(\Omega, \partial\Omega) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{k_0 \lambda(\tilde{S}^n)} \mathbf{v}^n \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p^n \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0,$$

$$(24) \quad \forall q \in L_{2,\perp}(\Omega) \quad \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v}^n \, d\mathbf{x} = 0.$$

В дальнейшем номер временного слоя n будем опускать.

Пространственная аппроксимация уравнений (23), (24) осуществляется смешанным методом конечных элементов с использованием элементов Равьяра–Тома наименьшей степени. Для этой цели осуществим некоторые дополнительные построения. В соответствии с Замечанием 2 наличие скважин учитывается только заданием на гранях соответствующих ячеек суммарной скорости, а давление и водонасыщенность в них не вычисляются. Обозначим

$$\Omega_\alpha = \bigcup_{m=1}^{M_\alpha} \Omega_{\alpha,m}, \quad \alpha = in, pr.$$

Пусть

$$\Pi = \bar{\Omega} \cup \bar{\Omega}_{in} \cup \bar{\Omega}_{pr}.$$

Для простоты положим Π – параллелепипед, являющийся объединением замкнутых ячеек

$$\tau = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k],$$

где

$$i = 1, \dots, N_x, \quad j = 1, \dots, N_y, \quad k = 1, \dots, N_z.$$

Через $\mathcal{T}_\Pi$ обозначим множество всех ячеек указанного разбиения. Далее, пусть $\mathcal{T}_{\alpha,m}$, $m = 1, \dots, M_\alpha$, $\alpha = in, pr$ – подмножества из $\mathcal{T}_\Pi$ такие, что

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_{\alpha,m} \quad \tau \cap \Omega_{\alpha,m} \neq \emptyset, \quad \forall \tau \notin \mathcal{T}_{\alpha,m} \quad \tau \cap \Omega_{\alpha,m} = \emptyset.$$

Обозначим

$$\Pi_{\alpha,m} = \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}_{\alpha,m}} \tau, \quad m = 1, \dots, M_\alpha, \quad \alpha = in, pr.$$

При этом $\Omega_{\alpha,m} \subset \Pi_{\alpha,m}$. Множества $\Pi_{in,m}$ и $\Pi_{pr,m}$ представляют собой параллелепипедальные вертикальные скважины, внутри которых находятся скважины $\Omega_{in,m}$ и $\Omega_{pr,m}$. Пусть $\tilde{\Gamma}_{\alpha,m}$ – боковые поверхности этих скважин, являющихся аналогами множеств $\Gamma_{\alpha,m}$. Далее, пусть

$$\mathcal{T}_\alpha = \bigcup_{m=1}^{M_\alpha} \mathcal{T}_{\alpha,m}, \quad \alpha = in, pr, \quad \mathcal{T}_\Omega = \mathcal{T}_\Pi \setminus (\mathcal{T}_{in} \cup \mathcal{T}_{pr}), \quad \Pi_\Omega = \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}_\Omega} \tau.$$

Отметим, что $\Pi_\Omega \subseteq \bar{\Omega}$.

Сеточная функция $\mathbf{v}^n$ (мы сохраняем для сеточных функций обозначения из (23), (24)) ищется как элемент пространства векторов $\mathbf{V}$, в котором компоненты произвольного вектора $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} u_x(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} u_{i,j-1/2,k-1/2} \varphi_i(x) \chi_{j-1/2}(y) \chi_{k-1/2}(z), \\ u_y(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{k=1}^{N_z} u_{i-1/2,j,k-1/2} \chi_{i-1/2}(x) \varphi_j(y) \chi_{k-1/2}(z), \\ u_z(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z-1} u_{i-1/2,j-1/2,k} \chi_{i-1/2}(x) \chi_{j-1/2}(y) \varphi_k(z), \end{aligned}$$

где $\varphi_l(\xi)$ — кусочно-линейные функции-крышки с носителями (ξ_{l-1}, ξ_{l+1}) , $\chi_{l-1/2}(\xi)$ — характеристические функции множеств $[\xi_{l-1}, \xi_l]$.

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{V} \subset \mathbf{H}_{\text{div}}(\Omega, \Gamma).$$

В дальнейшем также будет использоваться конечномерное подпространство

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V} \cap \mathbf{H}_{\text{div}}(\Pi_\Omega, \partial\Pi_\Omega).$$

Вектор-функции $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_0$ удовлетворяют условиям $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Pi_\Omega} = 0$. Сеточным аналогом краевых условий на скважинах (10) являются равенства

$$(25) \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\alpha,m})|_{\tilde{\Gamma}_{w,m}} = q_{\alpha,m}/|\tilde{\Gamma}_{\alpha,m}|, \quad m = 1, \dots, M_\alpha, \quad \alpha = w, o,$$

Отметим, что $|\tilde{\Gamma}_{\alpha,m}| \geq |\Gamma_{\alpha,m}|$. Это соответствует очевидному физическому факту — суммарная скорость жидкости уменьшается при удалении от нагнетательной скважины.

Для аппроксимации давления p используется пространство кусочно-постоянных функций с нулевым средним значением:

$$(26) \quad Q = \{q \mid q = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_\Omega} q_\tau \chi_\tau\}, \quad Q_\perp = \{q \in Q; \sum_{\tau \in \mathcal{T}_\Omega} |\tau| q_\tau = 0\}.$$

При этом $\tilde{S} \in Q$, $p \in Q_\perp$. С учетом представлений скалярных сеточных функций (26) может быть сформулирована следующая сеточная задача, аппроксимирующая задачу (23), (24): найти вектор-функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, удовлетворяющую условиям (25), и скалярную функцию $p \in Q_\perp$ такие, что имеют место интегральные тождества

$$(27) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}_0 \quad \int_{\Pi_\Omega} \frac{1}{k_0 \lambda(\tilde{S})} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \int_{\Pi_\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0,$$

$$(28) \quad \forall q \in Q_\perp \quad \int_{\Pi_\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0.$$

В соответствии с (11) система (27), (28) однозначно разрешима в $\mathbf{V} \times Q_\perp$. При этом основные трудности формирования и решения сеточной системы связаны с требованиями $p, q \in Q_\perp$. В связи с этим мы переформулируем задачу (27),

(28), не накладывая никаких ограничений на решение p . Будем искать вектор-функцию $\mathbf{v}_\varepsilon \in \mathbf{V}$, удовлетворяющую равенствам (25), и скалярную функцию $p_\varepsilon \in Q$ такие, что

$$(29) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}_0 \quad \int_{\Pi_\Omega} \frac{1}{k_0 \lambda(\tilde{S})} \mathbf{v}_\varepsilon \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \int_{\Pi_\Omega} p_\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0,$$

$$(30) \quad \forall q \in Q \quad \int_{\Pi_\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v}_\varepsilon \, d\mathbf{x} + \varepsilon \int_{\Pi_\Omega} q \, d\mathbf{x} \cdot \int_{\Pi_\Omega} p_\varepsilon \, d\mathbf{x} = 0,$$

где $\varepsilon > 0$. Полагая $q = \text{const}$, из (11), (25) и (30) получим, что $p_\varepsilon \in Q_\perp$, и как нетрудно видеть, $\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{v}$, $p_\varepsilon = p$ при любом ε . В связи с этим индекс ε будем опускать.

Приведем векторно-матричную форму сеточных уравнений (29), (30). Пусть в (30) $q = \chi_\tau$. Тогда в соответствии с (26) система (29), (30) может быть переписана в виде:

$$(31) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} \quad \int_{\Pi_\Omega} \frac{1}{k_0 \lambda(\tilde{S})} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \sum_{\tau \in \mathcal{T}_\Omega} p_\tau \int_{\partial\tau} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\tau \, d\gamma = 0,$$

$$(32) \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_\Omega \quad \int_{\partial\tau} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\tau \, d\gamma + \varepsilon |\tau| \sum_{\tau' \in \mathcal{T}_\Omega} |\tau'| p_{\tau'} = 0,$$

где $\mathbf{n}_\tau$ – внешняя нормаль на $\partial\tau$. Введем евклидово пространство $\mathcal{E}_N$ размерности $N = |\mathcal{T}_\Omega|$ со скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$ и нормой $\|\cdot\|$. Элементами пространства $\mathcal{E}_N$ являются векторы-столбцы $\bar{q}$ с компонентами $(q)_\tau$. Установим следующее соответствие между элементами вектора $\bar{q} \in \mathcal{E}_N$ и значениями сеточной функции $q \in Q$:

$$(33) \quad (q)_\tau = \sqrt{|\tau|} q_\tau.$$

Обозначим через $\bar{e} \in \mathcal{E}_N$ вектор-столбец с компонентами $(e)_\tau = \sqrt{|\tau|}$. Тогда в соответствии с (26) условие $q \in Q_\perp$ в векторной форме принимает вид:

$$(34) \quad [\bar{q}, \bar{e}] = 0.$$

Используя введенные векторные обозначения, перепишем уравнения (31), (32):

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_\Omega} \frac{1}{k_0 \lambda(\tilde{S})} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \sum_{\tau \in \mathcal{T}_\Omega} (p)_\tau \frac{1}{\sqrt{|\tau|}} \int_{\partial\tau} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\tau \, d\gamma &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{|\tau|}} \int_{\partial\tau} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\tau \, d\gamma + \varepsilon \sqrt{|\tau|} \sum_{\tau' \in \mathcal{T}_\Omega} \sqrt{|\tau'|} (p)_{\tau'} &= 0, \end{aligned}$$

откуда немедленно следует симметричная векторно-матричная форма системы (29), (30):

$$(35) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{D} & B \\ B^t & -\varepsilon C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{f}} \\ \bar{g} \end{pmatrix},$$

где согласно (33) $C = \bar{e} \cdot \bar{e}^t$ – симметрическая квадратная матрица размерности N . При этом $\text{rank}(C) = 1$. Отметим, что данное представление позволяет производить умножение плотной матрицы C на вектор экономично, поскольку

$$(36) \quad C\bar{q} = [\bar{e}, \bar{q}]\bar{e}.$$

Из (36) следует, что для любого вектора $\bar{q} \in \mathcal{E}_N$ имеет место неравенство $[C\bar{q}, \bar{q}] = [\bar{e}, \bar{q}]^2 \geq 0$, т.е. матрица C положительно полуопределена. При этом матрица $S_\varepsilon = B^t \mathbf{D}^{-1} B + \varepsilon C$ положительно определена, что очевидным образом обеспечивает однозначную разрешимость системы (35). Действительно, в соответствии с (34) евклидово пространство $\mathcal{E}_N$ можно представить в виде суммы подпространств

$$\mathcal{E}_N = \mathcal{E}_{N,\perp} \oplus \mathcal{E}_N^0,$$

где $\mathcal{E}_{N,\perp}$ векторное представление пространства $Q_\perp$ и $\mathcal{E}_N^0 = \{\alpha \bar{e}, \alpha \in R\}$. Иначе говоря, произвольный вектор $\bar{q} \in \mathcal{E}_N$ может быть представлен в виде суммы ортогональных векторов: $\bar{q} = \bar{q}_\perp + \alpha \bar{e}$, где $\bar{q}_\perp \in \mathcal{E}_{N,\perp}$, и из (34) следует, что $\alpha = [\bar{q}, \bar{e}]/[\bar{e}, \bar{e}]$. Согласно (36), (34) $C\bar{q}_\perp = \bar{0}$. Таким образом, $\text{Ker } C = \mathcal{E}_{N,\perp}$. Далее, из ([7], с.138, (1.20)) следует, что $\nabla \cdot \mathbf{V}_0 = Q_\perp$. Это, в частности, означает, что для произвольного вектора $\bar{q}_\perp \in \mathcal{E}_{N,\perp}$ найдется вектор-функция $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_0$ такая, что

$$(q_\perp)_\tau = \frac{1}{\sqrt{|\tau|}} \int_{\partial\tau} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\tau d\gamma,$$

т.е. в векторном аналоге пространства $\mathbf{V}_0$ разрешимо уравнение $B^t \bar{\mathbf{u}} = \bar{q}_\perp$, где $\bar{\mathbf{u}}$ – векторное представление функции $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_0$. Кроме того,

$$\sum_{\tau \in \mathcal{T}_\Omega} (e)_\tau \frac{1}{\sqrt{|\tau|}} \int_{\partial\tau} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\tau d\gamma = 0.$$

Из этого равенства, при условии разрешимости уравнения $B^t \bar{\mathbf{u}} = \bar{q}_\perp$, следует, что $\text{Ker } S_0 = \mathcal{E}_N^0$. Здесь существенным образом используется приведенное в п.1 условие эллиптичности с константой, определяемой только абсолютной проницаемостью пласта и коэффициентами динамической вязкости воды и нефти. Таким образом,

$$\text{Ker } S_0 \cup \text{Ker } C = \mathcal{E}_N, \quad \text{Ker } S_0 \cap \text{Ker } C = \{\bar{0}\}.$$

В свою очередь, это означает, что положительно полуопределенная матрица $S_\varepsilon = S_0 + \varepsilon C$ является положительно определенной.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном пункте приведены результаты вычислительных экспериментов для 3D модели Баклея–Левретта, демонстрирующие работоспособность изложенного в статье алгоритма. На рисунке 2 (см. [35], с.84, рис.3.26) проиллюстрированы результаты вычисления водонасыщенности с использованием алгоритма из работы [30], реализующего смешанный метод конечных элементов для нахождения суммарной скорости и давления, а для представления скорости воды в базисе Равьяра–Тома применяется проекционная форма равенства (6) в пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Рассмотрена двумерная задача с двумя скважинами в углах области. На рисунках представлена водонасыщенность в два момента времени. Нефизичные осцилляции и нарушение закона сохранения массы: $S > S_{\max} = 0.8$, говорят о непригодности такого алгоритма для работы с моделью Баклея–Левретта.

Все приводимые ниже результаты экспериментов получены при следующих значениях физических параметров процесса фильтрации, взятых из статьи

Рис. 2. Осцилляции на разрыве водонасыщенности в модели Баклея–Левверетта

[30]:

$$\phi = 0.375 \text{ б/р}, \quad k_0 = 3.06 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2, \\ \mu_w = 1.15 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \mu_o = 9.28 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

Рассматривалась параллелепипедальная область с одной нагнетательной и одной добывающей скважиной:

$$\Pi = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z],$$

$$\Pi_{in,1} = (x_{in}, x_{in} + h) \times (y_{in}, y_{in} + h) \times (L_z/2, L_z),$$

$$\Pi_{pr,1} = (x_{pr}, x_{pr} + h) \times (y_{pr}, y_{pr} + h) \times (0, L_z/2),$$

и $\bar{\Omega} = \Pi \setminus (\Pi_{in,1} \cup \Pi_{pr,1})$. В отличие от обозначений предыдущего пункта здесь $\Pi_{in,1}$ и $\Pi_{pr,1}$ – открытые множества. При этом предполагается, что $\bar{\Pi}_{in,1} = \Omega_{in,1}$ и $\bar{\Pi}_{pr,1} = \Omega_{pr,1}$. Заданная таким образом геометрия скважин обеспечивает наличие ненулевой вертикальной компоненты вектора скорости. На рисунке 3 приведена схема расположения скважин.

Рис. 3. Тестовый 3D коллектор

Вычисления проводились на кубической сетке с шагом $h = 0.5$ м при следующих значениях геометрических параметров:

$$L_x = L_y = 50 \text{ м}, \quad L_z = 10 \text{ м},$$

$$x_{in} = x_{pr} = 25 \text{ м}, \quad y_{in} = 10 \text{ м}, \quad y_{pr} = 40 \text{ м}.$$

В расчетах задавались следующие значения объемных дебитов скважин:

$$q_{in,1} = -5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}, \quad q_{pr,1} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}.$$

При этом учитывалось балансное соотношение (11) и Замечание 1. В начальный момент времени предполагается, что $S = 0.2$ во всей расчетной области.

Основная цель экспериментов для 3D задачи состояла в демонстрации отсутствия осцилляций на фронте разрыва водонасыщенности. Сетка преднамеренно бралась достаточно грубой, чтобы продемонстрировать отсутствие осцилляций даже для таких значений пространственного шага. Шаг по времени выбирался экспериментально таким образом, чтобы обеспечить устойчивость вычисления водонасыщенности по явной схеме Эйлера. В частности, устойчивый расчет обеспечивало значение $\Delta t = 2000 \text{ с}$. Решение седловой системы (35) осуществлялось обращением матрицы S_ε итерациями метода сопряженных градиентов с учетом равенства (36), обеспечивающего экономичное умножение матрицы C на вектор. Отметим, что от параметра ε зависит число обусловленности матрицы S_ε , и, следовательно, количество итераций, необходимое для обеспечения заданной точности. В данной работе эти вопросы не рассматриваются и будут обсуждены в отдельном исследовании, посвященном решению вырожденной задачи Неймана в смешанной формулировке. На рисунках 4, 5 проиллюстрирована динамика фильтрационного потока вплоть до момента времени $t = 3 \cdot 10^6 \text{ с}$ (около 35 суток), соответствующего прорыву воды в добывающую скважину.

Рис. 4. Водонасыщенность в плоскостях xy при $z = 0$, $z = 5$ м и $z = 10$ м

Отсутствие осцилляций на фронте водонасыщенности хорошо иллюстрируется рисунком 6, являющимся 3D представлением решения на двух из трех сечений, изображенных на рисунке 4. Как хорошо видно из рисунка, вытесняющая фаза распространяется в виде разрывной функции без осцилляций за

Рис. 5. Водонасыщенность в плоскости yz при $x = 25$ м

фронтом и перед фронтом разрыва. Видно существенное различие поведения численного решения по сравнению с решением, представленным на рисунке 2.

Далее, на рисунке 7 приведено давление на тех же сечениях, что и водонасыщенность на рисунке 6. Хорошо видно повышенное давление на нагнетательной скважине при $z = 10$ м и повышенное отрицательное давление (всасывание жидкости) на добывающей скважине при $z = 0$. При этом давление довольно слабо зависит от времени, что позволяет экономично осуществлять итерационное решение седловой системы (35) на каждом шаге по времени – имеется хорошее начальное приближение.

И, наконец, на рисунке 8 приведена чрезвычайно важная для практики характеристика – доля воды в добывающей скважине, характеризующая степень заводнения. Данная характеристика вычисляется как отношение объемного дебита воды в добывающей скважине к суммарному дебиту: $q_{pr,1}^{(w)}/q_{pr,1}$, где в соответствии с (18)

$$q_{pr,1}^{(w)} = \sum_{e_k \in \Gamma_{pr,1}} \int_{e_k} \tilde{\sigma}_{e_k} \mathbf{v} d\gamma \cdot \mathbf{n}_{e_k} = \sum_{e_k \in \Gamma_{pr,1}} |e_k| \tilde{\sigma}_{e_k} \mathbf{v}_{e_k} \cdot \mathbf{n}_{e_k}.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен вычислительный алгоритм реализации трехмерной модели Баклея—Левретта фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости на

Рис. 6. 3D изображение водонасыщенности в плоскостях xy при $z = 0$ и $z = 10$ м

основе комбинации смешанного метода конечных элементов и противопоточковой аппроксимации уравнения для насыщенности методом конечных объемов. Численные эксперименты продемонстрировали ожидаемое отсутствие осцилляций на фронте разрыва водонасыщенности, имеющего место в модели Баклея—Леверетта. Особое внимание в работе уделено решению вырожденной задачи Неймана, возникающей при условиях непроницаемости коллектора на внешних границах и заданиях дебитов нагнетательных и добывающих скважин. По данной тематике предполагается публикация результатов вне контекста задачи двухфазной фильтрации.

Рис. 7. Давление в плоскостях xy при $z = 0$ и $z = 10$ м

Рис. 8. Динамика заводнения добывающей скважины: зависимость доли воды в добывающей скважине от времени

REFERENCES

- [1] S.N. Antontsev, *On the solvability of boundary value problems for degenerate two-phase porous flow equations*, *Dinamika Sploshnoy Sredy*, **10** (1972), 28–53 (in Russian).
- [2] T.J. Arbogast, *The existence of weak solutions to single porosity and simple dual-porosity models of two-phase incompressible flow*, *Nonlinear Anal.*, bf 19 (1992), 1009–1031. Zbl 0783.76090
- [3] T.J. Arbogast, M. Wheeler, and N. Zhang, *A nonlinear mixed finite element method for a degenerate parabolic equation arising in flow in porous media*, *SIAM J. Numer. Anal.*, **33**:4 (1996), 1669–1687. Zbl 0856.76033
- [4] K. Aziz and A. Settari, *Petroleum Reservoir Simulation*, Applied Science Publishers, 1979.
- [5] J. Bear, *Dynamics of Fluids in Porous Media*, New York: Dover Publications, 1988. Zbl 1191.76002

- [6] P. Bochev and R. B. Lehoucq, *On the finite element solution of the pure Neumann problem*, SIAM Review, **47**:1 (2005), 50–66. Zbl 1084.65111
- [7] F. Brezzi and M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, New York: Springer–Verlag, 1991. Zbl 0788.73002
- [8] A.N. Brooks and T.J.R. Hughes, *Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **32** (1982), 199–259. Zbl 0497.76041
- [9] G. Chavent and J. Jaffre, *Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation*, Amsterdam: Elsevier, 1986. Zbl 0603.76101
- [10] G. Chavent, J. Jaffre, and J.E. Roberts, *Generalized cell-centered finite volume methods: application to two-phase flow in porous media*, in Computational Science for the 21st Century, Wiley, 1997, 231–241. Zbl 0919.76065
- [11] Z. Chen, *Degenerate two-phase incompressible flow I: Existence, uniqueness and regularity of a weak solution*, J. Diff. Equations, **171**:2 (2001), 203–232. Zbl 0991.35047
- [12] Z. Chen and R. Ewing, *Mathematical analysis for reservoir models*, SIAM J. Math. Anal., **30** (1999), 431–453.
- [13] Z. Chen, G. Huan, and B. Li, *An improved IMPES method for two-phase flow in porous media*, Transport in Porous Media, **54**:3 (2004), 361–376.
- [14] Z. Chen, G. Huan, and Y. Ma, *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2006. Zbl 1092.76001
- [15] C.N. Dawson, H. Klie, M.F. Wheeler, and C.S. Woodward, *A parallel, implicit, cell-centered method for two-phase flow with a preconditioned Newton-Krylov solver*, Comput. Geosci., **1**:3–4 (1997), 215–249. Zbl 0941.76062
- [16] J. Donea and A. Huerta, *Finite Element Methods for Flow Problems*, John Wiley & Sons, Ltd, 2003.
- [17] L.J. Durlowski, *A triangle based mixed finite element – finite volume technique for modeling two phase flow through porous media*, J. Comp. Physics, **105**:2 (1993), 252–266. Zbl 0768.76046
- [18] A. Elakkad, N. Guessous, and A. Elkhalfi, *Combined mixed hybrid finite element and finite volume method for flow in porous media*, International Journal of Mathematics and Statistics, **7**:W10 (2010), 24–31.
- [19] Y. Epshteyn and B. Riviere, *Fully implicit discontinuous finite element methods for two-phase flow*, Appl. Numer. Math., **57**:4 (2007), 383–401. Zbl 1370.76085
- [20] V.M. Goloviznin and S.A. Karabasov, *Nonlinear correction of the Cabaret scheme*, Matem. Model., **10**:12 (1998), 107–123 (in Russian).
- [21] V.M. Goloviznin and A.A. Samarskii, *Difference approximation of convective transfer with spatial splitting of the time derivative*, Matem. Model., **10**:1 (1998), 86–100 (in Russian). Zbl 1189.76364
- [22] T.J.R. Hughes, *A simple scheme for developing “upwind” finite elements*, Intern. J. Numer. Meths. Eng., **12** (1978), 1359–1365. Zbl 0393.65044
- [23] T.J.R. Hughes, M. Mallet, and A. Mizukami, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics: II. Beyond SUPG*, Comp. Methods Appl. Mech. Eng. **54** (1986), 341–355. Zbl 0622.76074
- [24] A. Iserles, *Generalized leapfrog methods*, IMA J. Numer. Anal., **6**:3 (1986), 381–392. Zbl 0637.65089
- [25] R. Juanes, *A variational multiscale finite element method for multiphase flow in porous media*, Finite Elements in Analysis and Design, **41** (2005), 763–77.
- [26] W. Klieber and B. Riviere, *Adaptive simulations of two-phase flow by discontinuous Galerkin methods*, Comp. Methods in Applied Mech. and Eng., **196** (2006), 404–419. Zbl 1120.76327
- [27] A.N. Konovalov, *Problems of Multiphase Fluid Filtration*, Singapore: World Scientific, 1994. Zbl 0837.76002
- [28] S.N. Kružkov and S.M. Sukorjanskii, *Boundary value problems for systems of equations of two-phase porous flow type; statement of the problems, questions of solvability, justification of approximate methods*, Mathematics of the USSR-Sbornik, **33**:1 (1977), 62–80. Zbl 0398.35039
- [29] Yu.M. Laevsky and T.A. Kandryukova, *On approximation of discontinuous solutions to the Buckley-Leverett equation*, Numerical Analysis and Applications, **5**:3 (2012), 222–230. Zbl 1299.65189

- [30] Yu.M. Laevsky, P.E. Popov, and A.A. Kalitkin, *Simulation of the filtration of a two-phase fluid by a mixed finite element method*, Matem. Model., **22**:3 (2010), 74–90 (in Russian). Zbl 1201.76278
- [31] P. Lax and B. Wendroff, *Systems of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math., **13** (1960), 217–237. Zbl 0152.44802
- [32] A. Michel, *A finite volume scheme for the simulation of two-phase incompressible flow in porous media*, SIAM J. Numer. Anal., **41** (2003), 1301–1317.
- [33] K.D. Nikitin, *Nonlinear finite volume method for two-phase flows*, Matem. Model., **22**:11 (2010), 131–147 (in Russian). Zbl 1224.76149
- [34] D.W. Peaceman, *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*, Amsterdam: Elsevier, 1977.
- [35] P.E. Popov, *Mathematical Modeling of Filtration Processes of Two-Phase Incompressible Fluid on Parallel Computing Systems*, PhD theses, Novosibirsk, 2011 (in Russian).
- [36] B. Riviere and M.F. Wheeler, *Discontinuous Galerkin methods for flow and transport problems in porous media*, Commun. Numer. Meth. Eng., **18** (2002), 63–68. Zbl 0996.76056
- [37] P.A. Raviart and J.M. Thomas, *A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. Mathematical aspects of finite element methods*, Lecture Notes in Mathematics, **606** (1977), 292–315. Zbl 0362.65089
- [38] G. Scovazzi, M.F. Wheeler, A. Mikelic, S. Lee, *Analytical and variational numerical methods for unstable miscible displacement flows in porous media*, J. Comp. Physics, **335** (2017), 444–496. Zbl 1375.76188
- [39] J.W. Sheldon, B. Zondek, and W.T. Cardwell, *One-dimensional, incompressible, noncapillary, two-phase fluid flow in a porous medium*, Petroleum Transactions, AIME, **216** (1959), 290–296.
- [40] S. Sun and M.F. Wheeler, *Symmetric and nonsymmetric discontinuous Galerkin methods for reactive transport in porous media*, SIAM J. Numer. Anal., **43** (2005), 195–219. Zbl 1086.76043
- [41] V.I. Vasilev, M.V. Vasileva, Yu.M. Laevsky, and T.S. Timofeeva, *Numerical simulation of the two-phase fluid filtration in heterogeneous media*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **11**:2 (2017), 289–295.

MAXIM I. IVANOV

INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL GEOPHYSICS SB RAS,
6, AKAD. LAVRENT'eva AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA

IGOR A. KREMER

INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL GEOPHYSICS SB RAS,
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
2, PIROGOVA STR.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA

YURI M. LAEVSKY

INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL GEOPHYSICS SB RAS,
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY
E-mail address: laev@labchem.sbcc.ru