Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. A. Kirov, Analytic embedding of some two-dimensional geometries of maximal mobility, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 916–937

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.061>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.82.47.9

April 26, 2023, 13:38:38

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 916–937 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.061

УДК 514.1,517.912

MSC 53D05,39B22

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЛОЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ПОДВИЖНОСТИ

В.А. КЫРОВ

ABSTRACT. In this paper, we solve the problem of embedding two-dimensional geometries: simplicial, dual-gelmgoltz, Helmholtz proper and pseudohelmholtz, into three-dimensional geometries. This problem is solved by an analytical method. The functions defining these geometries are found. Basic operators of Lie algebras of groups of motions are calculated.

Keywords: geometry of maximum mobility, Lie transformation group, functional equation, differential equation, Lie algebra.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известными примерами двумерных геометрий локальной максимальной подвижности являются: евклидова, псевдоевклидова, симплектическая, сферическая, Лобачевского. Например, метрическая функция плоскости Евклида записывается так:

$$g = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2.$$

Группы движений всех этих геометрий имеют размерность три. Другими примерами двумерных геометрий локальной максимальной подвижности являются геометрии, задаваемые функциями:

$$(1) \quad g = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j};$$

$$(2) \quad g = (x_i - x_j)^2 e^{\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}};$$

KYROV, V.A., ANALYTIC EMBEDDING OF SOME TWO-DIMENSIONAL GEOMETRIES OF MAXIMAL MOBILITY.

© 2019 Кыров В.А.

Поступила 26 августа 2018 г., опубликована 28 июня 2019 г.

$$(3) \quad g = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] e^{\frac{2\gamma \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}{x_i - x_j}};$$

$$(4) \quad g = \frac{(y_i - y_j)^\beta}{x_i - x_j},$$

где, например, (x_i, y_i) — координаты точки i , причем $\gamma, \beta = \text{const}$, $\gamma \neq 0$, $\beta \neq -1, 0, 1$. Геометрия с функцией (1) называется симплицальной, с функцией (2) — дуальногельмгольцевой, с функцией (3) — собственно гельмгольцевой, и, наконец, с функцией (4) — псевдогельмгольцевой. Заметим, что функция (4) получается из функции

$$q = [(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2] e^{\frac{2\alpha \text{Ar}(c) \text{th} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}{x_i - x_j}}$$

заменой координат: $x = u + v$, $y = u - v$ и преобразованием $g = (q/4)^{\frac{-1}{1+\alpha}}$, $\beta = (\alpha - 1)/(\alpha + 1)$.

Геометрии с функциями (1) — (4) впервые появились при классификации феноменологически симметричных двумерных геометрий [1, 2], хотя собственно гельмгольцева геометрия упоминается еще в работе Г. Гельмгольца [3] при анализе оснований геометрии. Феноменологическая симметрия для двумерных геометрий с функциями (1) — (4), заданными на двумерном многообразии означает существование функциональной связи между шестью значениями функции g для произвольных четырех точек $\langle i, j, k, l \rangle$ двумерного многообразия: $\Phi(g(i, j), g(i, k), g(i, l), g(j, k), g(j, l), g(k, l)) = 0$, где Φ — некоторая дифференцируемая функция. Отметим, что для геометрии (1) такая функциональная связь явно найдена и записывается так [1]:

$$\begin{vmatrix} g(i, j) - g(j, k) & g(j, k) - g(i, k) & 0 \\ g(i, j) - g(j, l) & 0 & g(i, l) - g(j, l) \\ 0 & g(i, k) - g(k, l) & g(i, l) - g(k, l) \end{vmatrix} = 0.$$

Для геометрий (2) — (4) явная запись функциональной связи пока ещё неизвестна. Г.Г. Михайличенко доказано, теорема об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий [1], согласно которой вместо феноменологической симметрии двумерной геометрии можно говорить о групповой симметрии степени три, то есть о трехпараметрической группе движений двумерного многообразия. Ниже даются точные определения, в которых вместо аксиомы феноменологической симметрии приводится аксиома максимальной подвижности.

Локальные действия групп движений геометрий (1) — (4) задаются так:

$$(5) \quad x' = xe^a + b, y' = ye^a + c;$$

$$(6) \quad x' = xe^{-a/2} + b, y' = xae^{-a/2} + ye^{-a/2} + c;$$

$$(7) \quad x' = xe^{-\gamma a} \cos a - ye^{-\gamma a} \sin a + b, y' = xe^{-\gamma a} \sin a + ye^{-\gamma a} \cos a + c;$$

$$(8) \quad x' = xe^{\beta a} + b, y' = ye^a + c.$$

Базисные операторы алгебр Ли данных групп движений следующие [1]:

$$(9) \quad X^1 = \partial_x, X^2 = \partial_y, X^3 = x\partial_x + y\partial_y;$$

$$(10) \quad X^1 = \partial_x, X^2 = \partial_y, X^3 = x\partial_x + (y - 2x)\partial_y;$$

$$(11) \quad X^1 = \partial_x, X^2 = \partial_y, X^3 = -(\gamma x + y)\partial_x + (x - \gamma y)\partial_y;$$

$$(12) \quad X^1 = \partial_x, X^2 = \partial_y, X^3 = \beta x\partial_x + y\partial_y.$$

Несложно заметить, что параметрические группы групп движений (5) – (8) локально изоморфны следующим матричным группам:

$$\begin{pmatrix} e^a & 0 & b \\ 0 & e^a & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-a/2} & 0 & b \\ ae^{-a/2} & e^{-a/2} & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} e^{-\gamma a} \cos a & -e^{-\gamma a} \sin a & b \\ e^{-\gamma a} \sin a & e^{-\gamma a} \cos a & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{\beta a} & 0 & b \\ 0 & e^a & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как было сказано выше, примером двумерной геометрии локальной максимальной подвижности является евклидова плоскость, группа движений которой, как известно, имеет размерность 3. Также известно, что трехмерные евклидова и псевдоевклидова геометрии с метрическими функциями

$$f = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2,$$

$$f = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (z_i - z_j)^2,$$

имеют группы движений размерности 6, т.е. допускают максимальную подвижность. Заметим, что эти метрические функции можно представить в виде:

$$f = g + (z_i - z_j)^2, f = g - (z_i - z_j)^2.$$

Возникает естественная задача о нахождении всех трехмерных геометрий с функциями вида:

$$f = \chi(g, z_i, z_j),$$

где g — метрическая функция из списка (1) — (4), допускающих группы движений размерности 6. Решению этой задачи и посвящена данная работа.

Отметим, что задача с подобной постановкой решалась в работах [4]–[8].

1. Точные определения и основные результаты

Рассмотрим трехмерное аналитическое многообразие M , которое локально диффеоморфно прямому произведению двумерного аналитического многообразия N и одномерного аналитического многообразия L . Локальный диффеоморфизм осуществляет аналитическое отображение $h : M \rightarrow N \times L$. Пусть $\pi_1 : N \times L \rightarrow N$ и $\pi_2 : N \times L \rightarrow L$ — проекции. Рассмотрим функции $g : N \times N \rightarrow R$, с открытой и плотной областью определения S_g в N^2 , и $\chi : R \times L \times L \rightarrow R$. Построим функцию $f : M \times M \rightarrow R$ по следующей формуле:

$$f = \chi(g(\pi_1(h), \pi_1(h)), \pi_2(h), \pi_2(h)),$$

область определения S_f которой открыта и плотна в M^2 . На точках эта функция выглядит так:

$$(13) \quad f(i, j) = \chi(g(\pi_1(h(i)), \pi_1(h(j))), \pi_2(h(i)), \pi_2(h(j))),$$

где i, j — произвольные две точки из M , причем $\langle i, j \rangle \in S_f$.

Для произвольной точки из M рассмотрим координатную окрестность $U \subset M$, в которой h является диффеоморфизмом и для любых точек $i, j \in U$, $\langle i, j \rangle \in$

S_f , существуют окрестности $U(i) \subset U$, $U(j) \subset U$ такие, что $\langle i', j' \rangle \in S_f$, $\forall i' \in U(i)$, $\forall j' \in U(j)$. Из выше сказанного имеем диффеоморфизм окрестностей $h : U \rightarrow V \times W$, где V , W — некоторые координатные окрестности в N и L соответственно. Координаты в окрестности V обозначим (x, y) , а координату в окрестности W — (z) . Тогда в локальных координатах функция (13) принимает следующий вид:

$$(14) \quad f = f(i, j) = \chi(\theta, z_i, z_j),$$

где $g(\pi_1(h(i)), \pi_1(h(j))) = \theta = \theta(x_i, y_i, x_j, y_j)$ — метрическая функция геометрии с максимальной подвижностью из списка (1) — (4), $\pi_2(h(i)) = z_i$, $\pi_2(h(j)) = z_j$. Пусть выполняются аксиомы.

Аксиома аналитичности. Функция $\chi : R \times L \times L \rightarrow R$ аналитическая во всех точках области определения.

Аксиома невырожденности. Для функции (14) в произвольной точке окрестности $U(i) \times U(j) \subset M^2$ справедливы неравенства

$$(15) \quad \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \neq 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial z_i} \neq 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial z_j} \neq 0.$$

Пусть группа Ли G действует эффективно и аналитично в $U \subset M$ [9, 1]. Это означает, что задано аналитическое инъективное отображение (эффективное действие)

$$\lambda : U \times G \rightarrow U',$$

где $U' \subset M$ — открытая область, причем выполняются свойства:

- 1). $\lambda(i, e) = i$, $e \in G$ — единица, $i \in U$;
- 2). $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ab)$, для любых $a, b \in G$ и $i \in U$;
- 3). Для любого $i \in U$ $\lambda(i, a) = i$, только если $a = e$.

Действие λ_a , определяемое произвольным элементом $a \in G$, называется *движением*, если для любых точек $i, j \in U$ таких, что $\langle i, j \rangle \in S_f$, $\langle \lambda_a(i), \lambda_a(j) \rangle \in S_f$, выполняется равенство

$$f(\lambda_a(i), \lambda_a(j)) = f(i, j).$$

Действия группы G можно определить в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j , причем если эти окрестности пересекаются, то действия в пересечении совпадают. Множество всех движений образует группу движений.

Аксиома максимальной подвижности. Размерность группы Ли G максимальная и равна 6.

Основная задача этой работы — поиск всех функций вида (14), являющихся двухточечными инвариантами некоторой шестимерной группы движений.

Алгебра Ли действия группы Ли G состоит из операторов

$$(16) \quad X = X_1 \partial_x + X_2 \partial_y + X_3 \partial_z,$$

где $X_\alpha = X_\alpha(x, y, z)$ — аналитическая функция в U , $\alpha = 1, 2, 3$ [9, 1]. Через операторы (1.4) записывается условие локальной инвариантности [10, 1, 11]:

$$(17) \quad X(i)f(i, j) + X(j)f(i, j) = 0,$$

которое выполняется в окрестностях $U(i) \subset U$ и $U(j) \subset U$ точек i и j .

Ниже ищем все функции вида (14), являющиеся двухточечными инвариантами шестипараметрической группы движений, причем θ — функция из списка (1) — (4).

Пусть $k \in U \subset M$ — начало некоторой системы координат в U , в которой эта точка имеет нулевые координаты $(0, 0, 0)$. В такой системе координат справедливы разложения в ряд Тейлора для компонент оператора (16) и функции (14) [12]:

$$(18) \quad \begin{cases} X_1 = X_1(z) + D_1(X_1)(z)x + D_2(X_1)(z)y + \\ + \frac{1}{2}D_{1,1}(X_1)(z)x^2 + D_{1,2}(X_1)(z)xy + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_1)(z)y^2 + \dots, \\ X_2 = X_2(z) + D_1(X_2)(z)x + D_2(X_2)(z)y + \\ + \frac{1}{2}D_{1,1}(X_2)(z)x^2 + D_{1,2}(X_2)(z)xy + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_2)(z)y^2 + \dots, \\ X_3 = X_3(z) + D_1(X_3)(z)x + D_2(X_3)(z)y + \\ + \frac{1}{2}D_{1,1}(X_3)(z)x^2 + D_{1,2}(X_3)(z)xy + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_3)(z)y^2 + \dots, \end{cases}$$

$$(19) \quad f(\theta, z_i, z_j) = f(z_i, z_j) + D_1(f)(z_i, z_j)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f)(z_i, z_j)\theta^2 + \dots,$$

где, например, $X_1(z) = X_1(0, 0, z)$, $D_1(X_1)(z) = \frac{\partial X_1(x, y, z)}{\partial x}|_{x=y=0}$, $D_2(X_1)(z) = \frac{\partial X_1(x, y, z)}{\partial y}|_{x=y=0}$, $D_{1,2}(X_2)(z) = \frac{\partial^2 X_2(x, y, z)}{\partial x \partial y}|_{x=y=0}$, $f(z_i, z_j) = f(0, z_i, z_j)$, $D_1(f)(z_i, z_j) = \frac{\partial f(\theta, z_i, z_j)}{\partial \theta}|_{\theta=0}$. Основные результаты работы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Рассмотрим произвольную точку $k \in M$ и ее координатную окрестность U . Возьмем также две точки $i, j \in U$ с окрестностями $U(i)$ и $U(j)$ такие, что

$$U(i) \cup U(j) \subset U, \text{ причем } \langle i, j \rangle, \langle i', j' \rangle \in S_f, \forall i' \in U(i), \forall j' \in U(j).$$

Тогда функция (14) в аналитическом многообразии M , являющаяся двухточечным инвариантом шестипараметрической группы движений, в окрестности $U(i) \times U(j)$ в подходящих локальных координатах и масштабном преобразовании ($\varphi(f) \rightarrow f$) имеет один из следующих видов:

$$(20) \quad f(i, j) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j;$$

$$(21) \quad f(i, j) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} e^{z_i + z_j};$$

$$(22) \quad f(i, j) = \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j;$$

$$(23) \quad f(i, j) = (x_i - x_j)^2 e^{\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j};$$

$$(24) \quad f(i, j) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] e^{2\gamma \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j};$$

$$(25) \quad f(i, j) = \frac{(y_i - y_j)^\beta}{x_i - x_j} e^{z_i + z_j},$$

где $\gamma, \beta = \text{const}$, $\gamma \neq 0$, $\beta \neq -1, 0, 1$.

Заметим, что (20) — функция трехмерной симплицальной геометрии первого типа, (21) — функция трехмерной симплицальной геометрии второго типа, (22) — функция трехмерной симплицальной геометрии третьего типа, (23) — функция трехмерной дуальногельмгольцевой геометрии, (24) — функция трехмерной собственно гельмгольцевой геометрии, и, наконец, (25) — функция трехмерной псевдогельмгольцевой геометрии. В процессе доказательства теоремы применяется лемма.

Лемма 1. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \chi}{\partial z_i} = \varphi(z_i)(p + q\theta + r\theta^2) \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial z_j} = \varphi(z_j)(p + q\theta + r\theta^2) \frac{\partial \chi}{\partial \theta},$$

где $\chi = \chi(\theta, z_i, z_j)$, φ — аналитические функции, $p^2 + q^2 + r^2 \neq 0$, в окрестности $U(i) \times U(j) \subset M$ имеет решение:

при $r = q = 0$:

$$(26) \quad \chi = \psi(\theta/p + K(z_i) + K(z_j)),$$

при $r = 0, q \neq 0$:

$$(27) \quad \chi = \psi(\ln(p + q\theta)/q + K(z_i) + K(z_j)),$$

при $r \neq 0, q^2 - 4pr = 0$:

$$(28) \quad \chi = \psi(-2/(2r\theta + q) + K(z_i) + K(z_j)),$$

при $r \neq 0, q^2 - 4pr > 0$:

$$(29) \quad \chi = \psi \left(\ln \frac{2r\theta + q - \sqrt{q^2 - 4pr}}{2r\theta + q + \sqrt{q^2 - 4pr}} + K(z_i) + K(z_j) \right),$$

при $r \neq 0, q^2 - 4pr < 0$:

$$(30) \quad \chi = \psi \left(\frac{2}{\sqrt{4pr - q^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2r}{\sqrt{4pr - q^2}} \left(\theta + \frac{q}{2r} \right) \right) + K(z_i) + K(z_j) \right),$$

причем $K = \int \varphi(z) dz$.

Доказательство. Записываются уравнения характеристик по исходным дифференциальным уравнениям [13] $d\theta/(p + q\theta + r\theta^2) = -\varphi(z_i)dz_i, d\theta/(p + q\theta + r\theta^2) = -\varphi(z_j)dz_j$. Интегрируя которые, приходим к утверждению леммы 1. $\square$

Как сказано выше, функция (14) является двухточечным инвариантом действия шестимерной группы Ли G , поэтому условие локальной инвариантности (17) в явном виде, для различных значений аргумента θ из списка (1) — (4), записывается так:

$$(31) \quad \begin{cases} [(x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) - (y_i - y_j)(X_1(i) - X_1(j))] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \\ + (x_i - x_j)^2 \left(X_3(i) \frac{\partial \chi}{\partial z_i} + X_3(j) \frac{\partial \chi}{\partial z_j} \right) = 0; \end{cases}$$

$$(32) \quad \begin{cases} [(2(x_i - x_j) - (y_i - y_j))(X_1(i) - X_1(j)) + (x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j))] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \\ + e \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \left(X_3(i) \frac{\partial \chi}{\partial z_i} + X_3(j) \frac{\partial \chi}{\partial z_j} \right) = 0; \end{cases}$$

$$(33) \quad \begin{cases} 2[(x_i - x_j) - \gamma(y_i - y_j))(X_1(i) - X_1(j)) \\ + ((y_i - y_j) + \gamma(x_i - x_j))(X_2(i) - X_2(j))] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \\ + e^{-2\gamma \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}} \left(X_3(i) \frac{\partial \chi}{\partial z_i} + X_3(j) \frac{\partial \chi}{\partial z_j} \right) = 0; \end{cases}$$

$$(34) \quad \begin{cases} [\beta(x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) - (y_i - y_j)(X_1(i) - X_1(j))] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \\ + (x_i - x_j)^2 (y_i - y_j)^{1-\beta} \left(X_3(i) \frac{\partial \chi}{\partial z_i} + X_3(j) \frac{\partial \chi}{\partial z_j} \right) = 0, \end{cases}$$

где X_1, X_2, X_3 — компоненты оператора (16). Заметим, что выражения (31) — (34) выполняются тождественно по координатам точек i и j из окрестностей $U(i)$ и $U(j)$, причем $U(i) \cup U(j) \subset U$, U — координатная окрестность.

Затем находятся базисные операторы алгебр Ли групп движений.

Теорема 2. *Базис алгебр Ли групп движений геометрий максимальной подвижности с функциями (20) — (25) составляют операторы $X^1, X^2, X^3, X^4, X^5, X^6$, которые в координатной окрестности U имеют соответственный вид:*

для (20):

$$(35) \quad \partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y, -2x\partial_y + \partial_z, -x^2\partial_y + x\partial_z, -x^2\partial_x - 2xy\partial_y + y\partial_z;$$

для (21):

$$(36) \quad \partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y, x\partial_x - y\partial_y + \partial_z, x^2\partial_x + x\partial_z, -y^2\partial_y + y\partial_z;$$

для (22):

$$(37) \quad \begin{cases} \partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y, 2y\partial_x - 2x\partial_y + \partial_z, \\ 2xy\partial_x + (y^2 - x^2)\partial_y + x\partial_z, (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y - y\partial_z; \end{cases}$$

для (23):

$$(38) \quad \begin{cases} \partial_x, \partial_y, x\partial_x + (y - 2x)\partial_y, -2x\partial_y + \partial_z, \\ -x^2\partial_y + x\partial_z, -x^2\partial_x + 2(x^2 - xy)\partial_y + y\partial_z; \end{cases}$$

для (24):

$$(39) \quad \begin{cases} \partial_x, \partial_y, -(y + \gamma x)\partial_x + (x - \gamma y)\partial_y, (\gamma y - x)\partial_x - (y + \gamma x)\partial_y + (1 + \gamma^2)\partial_z, \\ (-x^2 + y^2 + 2\gamma xy)\partial_x - (\gamma(x^2 - y^2) + 2xy)\partial_y + 2(1 + \gamma^2)x\partial_z, \\ (\gamma(-x^2 + y^2) - 2xy)\partial_x + (x^2 - y^2 - 2\gamma xy)\partial_y + 2(1 + \gamma^2)y\partial_z; \end{cases}$$

для (25):

$$(40) \quad \partial_x, \partial_y, \beta x\partial_x + y\partial_y, \beta x\partial_x - y\partial_y + \beta\partial_z, x^2\partial_x + x\partial_z, -y^2\partial_y + \beta y\partial_z,$$

где $\gamma, \beta = \text{const}$, $\gamma \neq 0$, $\beta \neq -1, 0, 1$.

Отметим, что операторы (36), (38) и (39) приводятся в работе [14].

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 2. В окрестности $U(i) \times U(j)$ для тождеств (31) – (34) выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} (x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) - (y_i - y_j)(X_1(i) - X_1(j)) &\neq 0; \\ (2(x_i - x_j) - (y_i - y_j))(X_1(i) - X_1(j)) + (x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) &\neq 0; \\ ((x_i - x_j) - \gamma(y_i - y_j))(X_1(i) - X_1(j)) + ((y_i - y_j) + \gamma(x_i - x_j))(X_2(i) - X_2(j)) &\neq 0; \\ \beta(x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) - (y_i - y_j)(X_1(i) - X_1(j)) &\neq 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Подробно докажем первые два неравенства. Остальные неравенства доказываются аналогично. Метод, применяемый при доказательстве этой леммы, впервые апробирован в работе [15].

I. Предположим, что первое неравенство не выполняется в $U(i) \times U(j)$, т.е. справедливо равенство

$$(41) \quad (x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) - (y_i - y_j)(X_1(i) - X_1(j)) = 0.$$

Продифференцируем равенство (41) дважды по: x_i и x_j , y_i и y_j , x_i и y_j , z_i и x_j , z_i и y_j

$$\begin{aligned} X'_{2x}(j) + X'_{2x}(i) &= 0, \quad X'_{1y}(j) + X'_{1y}(i) = 0, \\ X'_{2y}(j) - X'_{1x}(i) &= 0, \quad X'_{2z}(i) = 0, \quad X'_{1z}(i) = 0. \end{aligned}$$

Затем разделяем переменные:

$$X'_{1x} = c = \text{const}, \quad X'_{2y} = c, \quad X'_{2x} = 0, \quad X'_{1y} = 0, \quad X'_{1z} = 0, \quad X'_{2z} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения и подставляя результат в (41), получаем первые две компоненты оператора (16) алгебры Ли группы движений:

$$X_1 = cx + a, \quad X_2 = cy + b,$$

причем $a, b = \text{const}$.

В тождестве (31), с учетом (41), возможны два случая: либо $X_3 = 0$, либо $X_3 \neq 0$.

Если $X_3 = 0$, то произвольный оператор алгебры Ли группы движений, оставляющий функцию (14) инвариантной, имеет вид:

$$X = (cx + a)\partial_x + (cy + b)\partial_y.$$

Придавая произвольным постоянным (a, b, c) значения $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, получаем три базисных оператора (9), а их должно быть шесть. Противоречие.

Пусть теперь $X_3 \neq 0$. Тогда

$$(42) \quad X_3(i) \frac{\partial \chi}{\partial z_i} + X_3(j) \frac{\partial \chi}{\partial z_j} = 0.$$

От выражения (42) переходим к тождеству

$$(43) \quad \frac{X_3(i)}{X_3(j)} = \varphi(\theta, z_i, z_j),$$

для чего левую и правую части делим на ненулевое произведение $X_3(j) \frac{\partial \chi}{\partial z_i}$ и вводим обозначение $\varphi(\theta, z_i, z_j) = -\frac{\partial \chi}{\partial z_j} / \frac{\partial \chi}{\partial z_i}$. В (43) аргумент θ принимает вид (1). Дифференцируем (43) по x_i и по x_j :

$$\frac{X'_{3x}(i)}{X_3(j)} = -\frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2} \varphi'_\theta, \quad -\frac{X_3(i)X'_{3x}(j)}{X_3^2(j)} = \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2} \varphi'_\theta,$$

затем полученное складываем и разделяем переменные:

$$\frac{X'_{3x}(i)}{X_3(i)} = \frac{X'_{3x}(j)}{X_3(j)} = \alpha = \text{const.}$$

Уравнение (43) теперь дифференцируем по y_i и y_j , затем поступаем как в предыдущем случае:

$$\frac{X'_{3y}(i)}{X_3(i)} = \frac{X'_{3y}(j)}{X_3(j)} = \beta = \text{const.}$$

И, наконец, дифференцируем (43) по x_i и по y_j , после преобразований получаем:

$$\frac{(x_i - x_j)X'_{3x}(i)}{X_3(i)} + \frac{(y_i - y_j)X'_{3y}(j)}{X_3(j)} = 0.$$

Таким образом,

$$X'_{3x} = \alpha X_3, X'_{3y} = \beta X_3, \alpha(x_i - x_j) + \beta(y_i - y_j) = 0.$$

Значит $\alpha = \beta = 0$. Тогда

$$X_3 = a(z) \neq 0.$$

Подставляя найденное в (42), имеем

$$a(z_i) \frac{\partial \chi}{\partial z_i} + a(z_j) \frac{\partial \chi}{\partial z_j} = 0.$$

Вводим замену: $\int \frac{dz}{a(z)} = \bar{z}$. Тогда в новых координатах $X_3 = 1$.

Таким образом, произвольный оператор алгебры Ли группы движений трехмерного пространства сохраняющей функцию (16), имеет вид:

$$X = (cx + a)\partial_x + (cy + b)\partial_y + \partial_{\bar{z}}.$$

Придавая постоянным (a, b, c) значения $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 0, 0)$, получаем базисные операторы $\partial_x + \partial_{\bar{z}}$, $\partial_y + \partial_{\bar{z}}$, $x\partial_x + y\partial_y + \partial_{\bar{z}}$, $\partial_{\bar{z}}$. Видно, что таких операторов четыре, а должно быть шесть. Противоречие.

II. Приступим теперь к доказательству второго неравенства. Предположим, что оно не выполняется в $U(i) \times U(j)$, т.е. справедливо равенство

$$(44) \quad (2(x_i - x_j) - (y_i - y_j))(X_1(i) - X_1(j)) + (x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) = 0.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущим, поэтому частично они будут опускаться. Продифференцируем тождество (44) дважды по x_i и x_j , y_i и y_j , x_i и y_j , z_i и x_j , z_i и y_j :

$$2X'_{1x}(j) + 2X'_{1x}(i) + X'_{2x}(j) + X'_{2x}(i) = 0, X'_{1y}(j) + X'_{1y}(i) = 0,$$

$$2X'_{1y}(j) + X'_{2y}(j) - X'_{1x}(i) = 0, 2X'_{1z}(i) + X'_{2z}(i) = 0, X'_{1z}(i) = 0.$$

Затем разделяем переменные:

$$X'_{1x} = c = \text{const}, X'_{2y} = c, X'_{2x} = -2c, X'_{1y} = 0, X'_{1z} = 0, X'_{2z} = 0.$$

Интегрируя последние уравнения и возвращаясь в (44), получаем первые две компоненты оператора (16):

$$X_1 = cx + a, X_2 = c(y - 2x) + b,$$

причем $a, b = \text{const}$.

В тождестве (44), как и в первом случае, возможно, либо $X_3 = 0$, либо $X_3 \neq 0$.

Если $X_3 = 0$, то имеем следующий оператор алгебры Ли группы движений:

$$X = (cx + a)\partial_x + (c(y - 2x) + b)\partial_y.$$

Тогда получаем три базисных оператора (10), а должно быть шесть. Противоречие.

Пусть теперь $X_3 \neq 0$. Тогда решаем уравнение (43), причем аргумент θ принимает значение (2). Рассуждая как и выше, получаем произвольный оператор алгебры Ли группы движений трехмерного пространства:

$$X = (cx + a)\partial_x + (c(y - 2x) + b)\partial_y + \partial_{\bar{z}}.$$

Придавая постоянным (a, b, c) значения $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 0, 0)$, имеем базисные операторы $\partial_x + \partial_{\bar{z}}$, $\partial_y + \partial_{\bar{z}}$, $x\partial_x + (y - 2x)\partial_y + \partial_{\bar{z}}$, $\partial_{\bar{z}}$. Видно, что таких операторов четыре, а должно быть шесть. Противоречие.

Таким образом, первые два неравенства в $U(i) \times U(j)$, верны. Аналогично доказывается справедливость неравенств (33) и (34). Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. В окрестности $U(i) \times U(j)$ для тождеств (31) — (34) справедливо неравенство $X_3 \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное, пусть в окрестности $U(i) \times U(j)$ для тождеств (31) — (34) выполняется равенство $X_3 = 0$. Тогда из леммы 2 и этих тождеств следует $\partial\chi/\partial\theta = 0$, что противоречит неравенствам (15). $\square$

Лемма 4. В окрестности $U(i) \times U(j)$ функция $X_3(x, y, z)$, входящая в тождества (31) — (34), зависит либо от x , либо от y , т. е.

$$\left(\frac{\partial X_3(x, y, z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_3(x, y, z)}{\partial y}\right)^2 \neq 0.$$

Доказательство. Эта лемма сформулирована сразу для четырех тождеств. Случаи для всех этих тождеств проверяются аналогично, поэтому подробно мы остановимся на случаях (33) и (34). Доказательство проводится методом от противного. Согласно лемме 3 тогда в тождествах (31) — (34) будем иметь $X_3 = X_3(z) \neq 0$.

I. Тождество (33) в окрестности $U(i) \times U(j)$ представим в виде:

$$(45) \quad \begin{cases} ((x_i - x_j) - \gamma(y_i - y_j))(X_1(i) - X_1(j)) + \\ ((y_i - y_j) + \gamma(x_i - x_j))(X_2(i) - X_2(j)) = F(u, v, z_i, z_j), \end{cases}$$

где введены обозначения

$$F(\theta, z_i, z_j) = e^{-2\gamma \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}} \bar{F}(\theta, z_i, z_j),$$

$$\bar{F}(\theta, z_i, z_j) = -\frac{1}{2} \left(X_3(z_i) \frac{\partial \chi}{\partial z_i} + X_3(z_j) \frac{\partial \chi}{\partial z_j} \right) / \frac{\partial \chi}{\partial \theta},$$

$u = x_i - x_j$, $v = y_i - y_j$, причем аргумент θ имеет вид (3). Продифференцируем равенство (45) по переменным x_i, x_j, y_i, y_j :

$$\begin{aligned} X_1(i) - X_1(j) + \gamma(X_2(i) - X_2(j)) + (u - \gamma v)X'_{1x}(i) + (v + \gamma u)X'_{2x}(i) &= F'_u, \\ X_1(i) - X_1(j) + \gamma(X_2(i) - X_2(j)) + (u - \gamma v)X'_{1x}(j) + (v + \gamma v)X'_{2x}(j) &= F'_u, \\ -\gamma(X_1(i) - X_1(j)) + X_2(i) - X_2(j) + (u - \gamma v)X'_{1y}(i) + (v + \gamma u)X'_{2y}(i) &= F'_v, \\ -\gamma(X_1(i) - X_1(j)) + X_2(i) - X_2(j) + (u - \gamma v)X'_{1y}(j) + (v + \gamma u)X'_{2y}(j) &= F'_v, \end{aligned}$$

где $u = x_i - x_j$, $v = y_i - y_j$. Далее комбинируем первое и второе, а также третье и четвертое равенства:

$$(46) \quad \begin{cases} (u - \gamma v)X'_{1x_i} + (v + \gamma u)X'_{2x_i} = (u - \gamma v)X'_{1x_j} + (v + \gamma u)X'_{2x_j}, \\ (u - \gamma v)X'_{1y_i} + (v + \gamma u)X'_{2y_i} = (u - \gamma v)X'_{1y_j} + (v + \gamma u)X'_{2y_j}. \end{cases}$$

Затем уравнения в системе (46) дифференцируем по x_i и x_j ; по x_i и y_j ; по y_i и y_j , после чего производим разделение переменных:

$$X'_{2xx} = X'_{2xy} = X'_{2yy} = X'_{1xx} = X'_{1xy} = X'_{1yy} = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$X_1 = q_1(z)x + q_2(z)y + q(z), \quad X_2 = p_1(z)x + p_2(z)y + p(z).$$

Далее найденное подставляем в систему (46)

$$\begin{aligned} (u - \gamma v)q_1(z_i) + (v + \gamma u)p_1(z_i) &= (u - \gamma v)q_1(z_j) + (v + \gamma u)p_1(z_j), \\ (u - \gamma v)q_2(z_i) + (v + \gamma u)p_2(z_i) &= (u - \gamma v)q_2(z_j) + (v + \gamma u)p_2(z_j). \end{aligned}$$

Сравнивая, имеем $p_1, p_2, q_1, q_2 = \text{const}$. Тогда

$$X_1 = q_1x + q_2y + q(z), \quad X_2 = p_1x + p_2y + p(z).$$

Полученное подставляем в (45)

$$\begin{aligned} [(u - \gamma v)(q_1u + q_2v + q(z_i) - q(z_j)) + (v + \gamma u)(p_1u + p_2v + p(z_i) - p(z_j))]e^{\frac{2\gamma \arctg v}{u}} &= \\ &= \bar{F}(\theta, z_i, z_j). \end{aligned}$$

Далее полученное равенство дифференцируем по u и по v , после чего сократим на общий множитель $e^{\frac{2\gamma \arctg v}{u}}$:

$$\begin{aligned} [(q_1u + q_2v + q(z_i) - q(z_j)) + \gamma(p_1u + p_2v + p(z_i) - p(z_j)) + q_1(u - \gamma v) + p_1(v + \gamma u)] - \\ - \frac{2\gamma v}{u^2 + v^2} [(u - \gamma v)(q_1u + q_2v + q(z_i) - q(z_j)) + (v + \gamma u)(p_1u + p_2v + p(z_i) - p(z_j))] = \\ = 2(u - \gamma v)\bar{F}'_{\theta}(\theta, z_i, z_j), \\ [-\gamma(q_1u + q_2v + q(z_i) - q(z_j)) + (p_1u + p_2v + p(z_i) - p(z_j)) + q_2(u - \gamma v) + p_2(v + \gamma u)] + \\ + \frac{2\gamma u}{u^2 + v^2} [(u - \gamma v)(q_1u + q_2v + q(z_i) - q(z_j)) + (v + \gamma u)(p_1u + p_2v + p(z_i) - p(z_j))] = \\ = 2(v + \gamma u)\bar{F}'_{\theta}(\theta, z_i, z_j). \end{aligned}$$

Потом из первого равенства, умноженного на $v + \gamma u$, вычтем второе, умноженное на $u - \gamma v$:

$$\begin{aligned} (v + \gamma u)[(q_1u + q_2v + q(z_i) - q(z_j)) + \gamma(p_1u + p_2v + p(z_i) - p(z_j)) + q_1(u - \gamma v) + p_1(v + \gamma u)] - \\ - (u - \gamma v)[- \gamma(q_1u + q_2v + q(z_i) - q(z_j)) + \\ + (p_1u + p_2v + p(z_i) - p(z_j)) + q_2(u - \gamma v) + p_2(v + \gamma u)] - \\ - 2\gamma[(u - \gamma v)(q_1u + q_2v + q(z_i) - q(z_j)) + (v + \gamma u)(p_1u + p_2v + p(z_i) - p(z_j))] = 0. \end{aligned}$$

Приводя подобные, получаем: $p_1 = -q_2 = w$, $p_2 = q_1 = r$, $p(z) = p = \text{const}$, $q(z) = q = \text{const}$. Тогда произвольный оператор (16) алгебры Ли группы движений примет вид:

$$X = (rx - wy + q)\partial_x + (wx + ry + p)\partial_y + X_3(z)\partial_z.$$

Далее поступаем как в конце доказательства леммы 2: вводим замену $\int \frac{dz}{X_3(z)} = \bar{z}$, после чего приходим к базисным операторам $\partial_x + \partial_{\bar{z}}$, $\partial_y + \partial_{\bar{z}}$, $\partial_x + y\partial_y + \partial_{\bar{z}}$, $-y\partial_x + x\partial_y + \partial_{\bar{z}}$, $\partial_{\bar{z}}$, которых пять, а должно быть шесть. Противоречие.

II. Тожество (34) в окрестности $U(i) \times U(j)$ можно представить в виде:

$$(47) \quad \beta(x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) - (y_i - y_j)(X_1(i) - X_1(j)) = F(x_i - x_j, y_i - y_j, z_i, z_j),$$

где введены обозначения

$$F(x_i - x_j, y_i - y_j, z_i, z_j) = (x_i - x_j)(y_i - y_j)\bar{F}(\theta, z_i, z_j),$$

$$\bar{F}(\theta, z_i, z_j) = -\frac{1}{\theta} \left(X_3(z_i) \frac{\partial \chi}{\partial z_i} + X_3(z_j) \frac{\partial \chi}{\partial z_j} \right) / \frac{\partial \chi}{\partial \theta},$$

$u = x_i - x_j$, $v = y_i - y_j$.

Продифференцируем равенство (47) по переменным x_i , x_j , y_i , y_j :

$$\begin{aligned} \beta(X_2(i) - X_2(j)) + \beta u X'_{2x_i} - v X'_{1x_i} &= F'_u, \\ \beta(X_2(i) - X_2(j)) + \beta u X'_{2x_j} - v X'_{1x_j} &= F'_u, \\ \beta u X'_{2y_i} - X_1(i) + X_1(j) - (y_i - y_j) X'_{1y_i} &= F'_v, \\ \beta u X'_{2y_j} - X_1(i) + X_1(j) - (y_i - y_j) X'_{1y_j} &= F'_v. \end{aligned}$$

Далее комбинируем первое и второе, а также третье и четвертое равенства:

$$(48) \quad \beta u X'_{2x_i} - v X'_{1x_i} = \beta u X'_{2x_j} - v X'_{1x_j}, \quad \beta u X'_{2y_i} - v X'_{1y_i} = \beta u X'_{2y_j} - v X'_{1y_j}.$$

Затем уравнения (48) дифференцируем по x_i и x_j ; по x_i и y_j ; по y_i и y_j , после чего производим разделение переменных, потом интегрируем и возвращаемся в (48), в результате получим:

$$X_1 = q_1 x + q_2 y + q(z), \quad X_2 = p_1 x + p_2 y + p(z).$$

Найденное подставляем в (47)

$$[-v(q_1 u + q_2 v + q(z_i) - q(z_j)) + \beta u(p_1 u + p_2 v + p(z_i) - p(z_j))] \frac{1}{uv} = \bar{F}(\theta, z_i, z_j).$$

Далее дифференцируем по u и по v , после чего сократим на общий множитель $e^{\frac{2\gamma \arctg v}{u}}$:

$$\begin{aligned} &v[\beta(p_1 u + p_2 v + p(z_i) - p(z_j)) - q_1 v + p_1 \beta u] - \\ &- [-v(q_1 u + q_2 v + q(z_i) - q(z_j)) + \beta u(p_1 u + p_2 v + p(z_i) - p(z_j))] = \\ &= -v^2 \bar{F}'_{\theta}(\theta, z_i, z_j), \\ &u[-(q_1 u + q_2 v + q(z_i) - q(z_j)) - q_2 v + p_2 \beta u] - \\ &- [-v(q_1 u + q_2 v + q(z_i) - q(z_j)) + \beta u(p_1 u + p_2 v + p(z_i) - p(z_j))] = \\ &= \beta u^2 \bar{F}'_{\theta}(\theta, z_i, z_j). \end{aligned}$$

Потом первое равенство, умноженное на βu^2 , сложим со вторым, умноженным на v^2 :

$$\begin{aligned} &\beta u^2[v[\beta(p_1 u + p_2 v) - q_1 v + p_1 \beta u] - [-v(q_1 u + q_2 v) + \beta u(p_1 u + p_2 v)]] + \\ &+ v^2[u[-(q_1 u + q_2 v) - q_2 v + p_2 \beta u] - [-v(q_1 u + q_2 v) + \beta u(p_1 u + p_2 v)]] = 0. \end{aligned}$$

Приводя подобные, получаем: $p_1 = q_2 = 0$, $p_2 = r$, $q_1 = \beta r$, $p(z) = p = \text{const}$, $q(z) = q = \text{const}$. Тогда произвольный оператор (16) алгебры Ли группы движений примет вид:

$$X = (\beta r x + q) \partial_x + (r y + p) \partial_y + X_3(z) \partial_z.$$

Потом, как и выше, вводим замену $\int \frac{dz}{X_3(z)} = \bar{z}$, после чего приходим к базисным операторам $\partial_x + \partial_{\bar{z}}$, $\partial_y + \partial_{\bar{z}}$, $\beta x \partial_x + y \partial_y + \partial_{\bar{z}}$, $\partial_{\bar{z}}$, которых четыре, а должно быть шесть. Противоречие. Лемма доказана. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Функциональные уравнения (31) – (34) в окрестности $U(i) \times U(j)$ удобно переписать в виде:

$$(49) \quad \begin{aligned} & (x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) - (y_i - y_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \\ & + (x_i - x_j)^2(X_3(i)F_1 + X_3(j)F_2) = 0, \\ & (2(x_i - x_j) - (y_i - y_j))(X_1(i) - X_1(j)) + (x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) + \end{aligned}$$

$$(50) \quad \begin{aligned} & - \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} (X_3(i)F_1 + X_3(j)F_2) = 0, \\ & ((x_i - x_j) - \gamma(y_i - y_j))(X_1(i) - X_1(j)) + ((y_i - y_j) + \gamma(x_i - x_j))(X_2(i) - X_2(j)) + \end{aligned}$$

$$(51) \quad \begin{aligned} & + e^{-2\gamma \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}} (X_3(i)F_1 + X_3(j)F_2) = 0, \\ & \beta(x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) - (y_i - y_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \\ (52) \quad & + (x_i - x_j)^2(y_i - y_j)^{1-\beta}(X_3(i)F_1 + X_3(j)F_2) = 0, \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$(53) \quad F_1(\theta, z_i, z_j) = \frac{\partial \chi}{\partial z_i} / \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad F_2(\theta, z_i, z_j) = \frac{\partial \chi}{\partial z_j} / \frac{\partial \chi}{\partial \theta}.$$

Из аксиом аналитичности и невырожденности, очевидно, следуют аналитичность функций (53) в окрестности $U(i) \times U(j)$ и справедливость неравенств $F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$. Тогда, учитывая (19), имеем разложения в ряд Тейлора [12]

$$(54) \quad \begin{cases} F_1 = f_1(z_i, z_j) + D_1(f_1)(z_i, z_j)\theta + 1/2 D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j)\theta^2 + \dots, \\ F_2 = f_2(z_i, z_j) + D_1(f_2)(z_i, z_j)\theta + 1/2 D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j)\theta^2 + \dots. \end{cases}$$

Далее разложения (18) и (54) подставляем в тождества (49) – (52) и рассматриваем четыре случая.

I. Разложения (18) и (54) подставляем в тождество (49), в котором аргумент θ имеет вид (1), затем сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных x_i, y_i, x_j, y_j , а также перед отрицательными степенями $(x_i - x_j)^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Отметим, что отрицательные степени $(x_i - x_j)^{-n}$, входящие в тождество (49), в окрестности нуля в ряд Тейлора не разлагаются, поэтому коэффициенты перед ними обращаются в нуль. Эта задача существенно упрощается с применением математического пакета программ MAPLE 15 [16].

Сравнивая коэффициенты перед отрицательными степенями $(x_i - x_j)^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, имеем

$$D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3)(z_i) \overline{F_1}(z_i, z_j) = 0, \quad D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3)(z_j) \overline{F_2}(z_i, z_j) = 0,$$

причем $\alpha_n = 1, 2, n = 1, 2, 3, 4, \dots$,

$$\overline{F_1} = (D_{1,1,1}(f_1), D_{1,1,1,1}(f_1), \dots), \quad \overline{F_2} = (D_{1,1,1}(f_2), D_{1,1,1,1}(f_2), \dots).$$

Поэтому из леммы 4 следует $\overline{F_1} = \overline{F_2} = 0$. Значит

$$F_1 = f_1(z_i, z_j) + D_1(f_1)(z_i, z_j)\theta + 1/2D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j)\theta^2 \neq 0,$$

$$F_2 = f_2(z_i, z_j) + D_1(f_2)(z_i, z_j)\theta + 1/2D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j)\theta^2 \neq 0,$$

следовательно

$$\begin{cases} (f_1(z_i, z_j))^2 + (D_1(f_1)(z_i, z_j))^2 + (D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j))^2 \neq 0, \\ (f_2(z_i, z_j))^2 + (D_1(f_2)(z_i, z_j))^2 + (D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j))^2 \neq 0. \end{cases}$$

Далее сравниваем все коэффициенты со степенями выше 4 при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j , получаем

$$D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0,$$

$$D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3)(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0, D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3)(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = 0,$$

$$D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3)(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j) = 0, D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3)(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j) = 0,$$

причем $\alpha_n = 1, 2, n = 3, 4, 5, \dots$ Из предыдущего тогда будет следовать:

$$D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3) = 0,$$

где $\alpha_n = 1, 2, n = 3, 4, 5, \dots$ Из сравнения этих же степеней также получаем

$$D_{\beta_1, \beta_2, \dots}(X_1) = 0, D_{\beta_1, \beta_2, \dots}(X_2) = 0,$$

где $\beta_n = 1, 2, n = 4, 5, 6, \dots$

Потом сравниваем коэффициенты со степенями 4 при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j :

$$D_{1,1,1}X_1 = D_{1,1,2}X_1 = D_{1,2,2}X_1 = D_{2,2,2}X_1 = 0,$$

$$D_{1,1,1}X_2 = D_{1,1,2}X_2 = D_{1,2,2}X_2 = D_{2,2,2}X_2 = 0,$$

$$D_{1,1}X_3 = D_{1,2}X_3 = D_{2,2}X_3 = 0.$$

Сравниваем коэффициенты со степенями 1:

$$X_1(z) = \alpha = \text{const}, X_2(z) = \beta = \text{const}.$$

Затем сравниваем все коэффициенты перед степенями 2 и записываем явные выражения:

$$-D_1(X_1)(z_i) + D_2(X_2)(z_i) + X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) + X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0;$$

$$-D_1(X_2)(z_j) - D_1(X_2)(z_i) - 2X_3(z_i)f_1(z_i, z_j) - 2X_3(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0;$$

$$D_1(X_1)(z_i) - D_2(X_2)(z_j) - X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) - X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0;$$

$$D_1(X_1)(z_j) - D_2(X_2)(z_i) - X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) - X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0;$$

$$D_2(X_1)(z_i) + D_2(X_1)(z_j) - X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j) - X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j) = 0;$$

$$-D_1(X_1)(z_j) + D_2(X_2)(z_j) + X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) + X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0;$$

$$D_1(X_2)(z_i) + X_3(z_i)f_1(z_i, z_j) + X_3(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0;$$

$$-2D_2(X_1)(z_i) + X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j) + X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j) = 0;$$

$$D_1(X_2)(z_j) + X_3(z_i)f_1(z_i, z_j) + X_3(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0;$$

$$-2D_2(X_1)(z_j) + X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j) + X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j) = 0.$$

Комбинируем уравнения и разделяем переменные:

$$D_1(X_2) = a = \text{const}, D_2(X_1) = b = \text{const},$$

$$D_1(X_1) = c = \text{const}, D_2(X_2) = d = \text{const},$$

$$X_3(z_i)f_1(z_i, z_j) + X_3(z_j)f_2(z_i, z_j) = -a,$$

$$\begin{aligned} X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) + X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) &= c - d, \\ X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j) + X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j) &= 2b. \end{aligned}$$

И, наконец, сравниваем коэффициенты перед степенями 3, комбинируем и разделяем переменные:

$$\begin{aligned} D_{1,1}X_1 &= a_1, D_{1,2}X_1 = a_2, D_{2,2}X_1 = a_3, \\ D_{1,1}X_2 &= b_1, D_{1,2}X_2 = b_2, D_{2,2}X_2 = b_3, \\ D_1X_3(z_i)f_1(z_i, z_j) &= D_1X_3(z_j)f_2(z_i, z_j) = -b_1/2, \\ D_2X_3(z_i)f_1(z_i, z_j) + D_2X_3(z_j)f_2(z_i, z_j) &= -b_2, \\ D_1X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) + D_1X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) &= a_1 - b_2, \\ D_2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) + D_2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) &= a_2 - b_3, \\ D_1X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j) + D_1X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j) &= 2a_2, \\ D_2X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j) &= D_2X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j) = a_3, \\ D_1X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j) + 2D_2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) &= -b_3 + 2a_2, \\ D_1X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j) - 2D_2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) &= b_3, \\ D_1X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j) + 2D_2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) &= 2a_2 - b_3, \\ D_1X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j) - 2D_2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) &= b_3, \\ 2D_2X_3(z_i)f_1(z_i, z_j) - 2D_1X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) &= -a_1, \\ 2D_2X_3(z_i)f_1(z_i, z_j) + 2D_1X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) &= a_1 - 2b_2, \\ 2D_2X_3(z_j)f_2(z_i, z_j) - 2D_1X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) &= -a_1, \\ 2D_2X_3(z_j)f_2(z_i, z_j) + 2D_1X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) &= -2b_2 + a_1, \end{aligned}$$

где $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 = \text{const.}$

Из этих равенств вытекает:

$$\begin{aligned} f_1(z_i, z_j) &= f_1(z_i), f_2(z_i, z_j) = f_2(z_j), \\ D_1(f_1)(z_i, z_j) &= D_1(f_1)(z_i), D_1(f_2)(z_i, z_j) = D_1(f_2)(z_j), \\ D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j) &= D_{1,1}(f_1)(z_i), D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j) = D_{1,1}(f_2)(z_j). \end{aligned}$$

Тогда в предыдущей системе можно провести разделение переменных:

$$\begin{aligned} D_1X_3(z_i)f_1(z_i) &= D_1X_3(z_j)f_2(z_j) = -b_1/2, \\ D_2X_3(z_i)f_1(z_i) &= D_2X_3(z_j)f_2(z_j) = -b_2/2, \\ D_1X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i) &= D_1X_3(z_j)D_1(f_2)(z_j) = (a_1 - b_2)/2, \\ D_2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i) &= D_2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_j) = (a_2 - b_3)/2, \\ D_1X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i) + D_1X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_j) &= a_2, \\ D_2X_3(z_i)D_{1,1}(f_1)(z_i) &= D_2X_3(z_j)D_{1,1}(f_2)(z_j) = a_3/2, \end{aligned}$$

Из последней системы следует:

$$\begin{aligned} f_1(z_i) &= p\varphi(z_i), D_1(f_1)(z_i) = q\varphi(z_i), D_{1,1}(f_1)(z_i) = r\varphi(z_i), \\ f_2(z_j) &= p\varphi(z_j), D_1(f_2)(z_j) = q\varphi(z_j), D_{1,1}(f_2)(z_j) = r\varphi(z_j), \end{aligned}$$

где введены сокращающие обозначения: $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{(D_1X_3(z))^2 + (D_2X_3(z))^2}} \neq 0$, $p = -\sqrt{b_1^2 + b_2^2}/2$, $q = \sqrt{(a_1 - b_2)^2 + (a_2 - b_3)^2}/2$, $r = \sqrt{4a_2^2 + a_3^2}/2$. Тогда будем иметь:

$$(55) \quad F_1 = \varphi(z_i)(p + q\theta + r\theta^2) \neq 0, F_2 = \varphi(z_j)(p + q\theta + r\theta^2) \neq 0.$$

Далее учитываем лемму 4, из которой следует, что $(D_1(X_3))^2 + (D_2(X_3))^2 \neq 0$. Поэтому выражения (55) примут вид:

$$(56) \quad \varphi(z_i)(p + q\theta + r\theta^2) = \frac{\partial\chi}{\partial z_i} / \frac{\partial\chi}{\partial\theta}, \quad \varphi(z_j)(p + q\theta + r\theta^2) = \frac{\partial\chi}{\partial z_j} / \frac{\partial\chi}{\partial\theta}.$$

Приводя к общему знаменателю, приходим к уравнениям:

$$(p + q\theta + r\theta^2) \frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \frac{1}{\varphi(z_i)} \frac{\partial\chi}{\partial z_i} = 0, \quad (p + q\theta + r\theta^2) \frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \frac{1}{\varphi(z_j)} \frac{\partial\chi}{\partial z_j} = 0.$$

Получена система уравнения, ранее решенная в лемме 1. Применяя эту лемму, учитывая явное выражение (1) для аргумента θ , после чего вводим новые координаты. Тогда для функции f будем иметь:

для (25): $\bar{x} = px, \bar{y} = y, \bar{z} = K(z)$,

$$f = \bar{\psi}(\bar{\theta} + \bar{z}_i + \bar{z}_j), \quad p \neq 0, \quad \bar{\psi}(u) = \psi(u),$$

для (26): $\bar{x} = x, \bar{y} = px + qy, \bar{z} = qK(z)$,

$$f = \bar{\psi}(\ln \bar{\theta} + \bar{z}_i + \bar{z}_j), \quad \bar{\psi}(u) = \psi(qu),$$

для (27): $\bar{y} = -2x, \bar{x} = qx + 2ry, \bar{z} = K(z)$,

$$f = \bar{\psi}(\bar{\theta} + \bar{z}_i + \bar{z}_j), \quad \bar{\psi}(u) = \psi(u),$$

для (28): $\bar{x} = 2ry + (q + \sqrt{q^2 - 4pr})x, \bar{y} = 2ry + (q - \sqrt{q^2 - 4pr})x, \bar{z} = K(z)$,

$$f = \bar{\psi}(\ln \bar{\theta} + \bar{z}_i + \bar{z}_j), \quad \bar{\psi}(u) = \psi(u),$$

для (29): $\bar{x} = 2rx, \bar{y} = (2qx + 4ry)/\sqrt{4pr - q^2}, \bar{z} = \sqrt{4pr - q^2}K(z)/2$,

$$f = \bar{\psi}(\arctg \bar{\theta} + \bar{z}_i + \bar{z}_j), \quad \bar{\psi}(u) = \psi(\sqrt{4pr - q^2}u/2),$$

где $\bar{\theta} = \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_j}{\bar{x}_i - \bar{x}_j}$. Далее переходя к прежним обозначениям координат, получаем функции (20), (21) и (10).

II. Теперь, как и в первой части, разложения (18) и (54) подставляем в тождество (50) и сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных x_i, y_i, x_j, y_j , а также перед степенями $e^{-\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}, e^{\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}, e^{\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Заметим, что выражения $e^{-\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}, e^{\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}, e^{\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}$, входящие в тождество (50), в окрестности нуля в ряд Тейлора не разлагаются, поэтому коэффициенты перед ними обращаются в нуль. Задача перебора коэффициентов существенно упрощается с применением математического пакета программ MAPLE 15 [16].

Сначала сравниваем коэффициенты перед степенями $e^{-\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}, e^{\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}, e^{\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}$ и приравняем их к нулю, где $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3)(z_i) \overline{F_1}(z_i, z_j) = 0, \quad D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3)(z_j) \overline{F_2}(z_i, z_j) = 0,$$

причем $\alpha_n = 1, 2, n = 1, 2, 3, 4, \dots$,

$$\overline{F_1} = (f_1, D_{1,1}(f_1), D_{1,1,1}(f_1), D_{1,1,1,1}(f_1), \dots),$$

$$\overline{F_2} = (f_2, D_{1,1}(f_2), D_{1,1,1}(f_2), D_{1,1,1,1}(f_2), \dots).$$

По лемме 4, будем иметь $\overline{F_1} = \overline{F_2} = 0$. Тогда

$$F_1 = D_1(f_1)(z_i, z_j)\theta \neq 0, F_2 = D_1(f_2)(z_i, z_j)\theta \neq 0,$$

следовательно

$$D_1(f_1)(z_i, z_j) \neq 0, D_1(f_2)(z_i, z_j) \neq 0.$$

Далее сравниваем все коэффициенты со степенями выше 3 при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j , получаем

$$D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3)(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0, D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3)(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = 0,$$

причем $\alpha_n = 1, 2, n = 2, 3, 4, 5, \dots$. Из предыдущих равенств тогда будет следовать:

$$D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3) = 0, D_{\beta_1, \beta_2, \dots}(X_1) = 0, D_{\beta_1, \beta_2, \dots}(X_2) = 0,$$

где $\alpha_n, \beta_m = 1, 2, n = 2, 3, 4, 5, \dots, m = 3, 4, 5, 6, \dots$

Сравниваем коэффициенты перед степенями 1 и разделяем переменные:

$$X_1(z) = c = \text{const}, X_2(z) = d = \text{const}.$$

Теперь сравниваем коэффициенты перед степенями 2, затем комбинируем уравнения с разделением переменных:

$$D_1(X_2) = b = \text{const}, D_2(X_1) = 0, D_1(X_1) = a = \text{const}, D_2(X_2) = a,$$

$$X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) + X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = -2a - b.$$

И, наконец, сравниваем коэффициенты со степенями 3 при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j , затем комбинируем и разделяем переменные:

$$D_{1,1}X_1 = a_1, D_{1,2}X_1 = 0, D_{2,2}X_1 = 0,$$

$$D_{1,1}X_2 = a_2, D_{1,2}X_2 = a_1, D_{2,2}X_2 = 0,$$

$$D_1X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = -a_1 - a_2/2, D_1X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = -a_1 - a_2/2,$$

$$D_2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = -a_1/2, D_2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = -a_1/2,$$

где $a_1, a_2 = \text{const}$.

Из последней системы равенств следует:

$$D_1(f_1)(z_i) = q\varphi(z_i), D_1(f_2)(z_j) = q\varphi(z_j),$$

где введены сокращающие обозначения: $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{(D_1X_3(z))^2 + (D_2X_3(z))^2}} \neq$

0, $q = \pm\sqrt{(a_1)^2 + (2a_1 + a_2)^2}/2$. Тогда будем иметь:

$$(57) \quad F_1 = \varphi(z_i)q\theta \neq 0, F_2 = \varphi(z_j)q\theta \neq 0.$$

Далее учитываем лемму 4, из которой следует, что $(D_1(X_3))^2 + (D_2(X_3))^2 \neq 0$. Тогда выражения (57) примут вид:

$$(58) \quad \varphi(z_i)q\theta = \frac{\partial\chi}{\partial z_i} / \frac{\partial\chi}{\partial\theta}, \varphi(z_j)q\theta = \frac{\partial\chi}{\partial z_j} / \frac{\partial\chi}{\partial\theta}.$$

Приводя к общему знаменателю, приходим к уравнениям:

$$q\theta \frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \frac{1}{\varphi(z_i)} \frac{\partial\chi}{\partial z_i} = 0, q\theta \frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \frac{1}{\varphi(z_j)} \frac{\partial\chi}{\partial z_j} = 0.$$

Получена система уравнения, решение которой находим по лемме 1 при $p = r = 0$. Затем учитываем явное выражение (2) для аргументы θ , после чего

вводим новые координаты, потом записываем явное выражение для функции f :

$$f = \bar{\psi}(\ln \theta + \bar{z}_i + \bar{z}_j), \bar{\psi}(u) = \psi(u/q), \bar{z} = qK(z),$$

где аргумент θ задается выражением (2). Далее переходя к прежним обозначениям координат, получаем функцию (23), задающую геометрию максимальной подвижности.

III. Разложения (18) и (54) подставляем в (51) и сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных $x_i, y_i,$

x_j, y_j , а также перед степенями $e^{-2\gamma \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}, e^{n2\gamma \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}, n = 1, 2, 3, \dots$

Заметим, что выражения $e^{-2\gamma \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}, e^{n2\gamma \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}$, входящие в тождество (51), в окрестности нуля в ряд Тейлора не разлагаются, поэтому коэффициенты перед ними обращаются в нуль. Как и выше, задача перебора коэффициентов, существенно упрощается с применением математического пакета программ MAPLE 15 [16].

Сравнивая коэффициенты перед $e^{-2\gamma \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}$ и $e^{n2\gamma \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, имеем

$$D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3)(z_i) \bar{F}_1(z_i, z_j) = 0, D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3)(z_j) \bar{F}_2(z_i, z_j) = 0,$$

причем $\alpha_n = 1, 2, n = 1, 2, 3, 4, \dots$,

$$\bar{F}_1 = (f_1, D_{1,1}(f_1), D_{1,1,1}(f_1), D_{1,1,1,1}(f_1), \dots),$$

$$\bar{F}_2 = (f_2, D_{1,1}(f_2), D_{1,1,1}(f_2), D_{1,1,1,1}(f_2), \dots).$$

Поэтому из леммы 4 следует $\bar{F}_1 = \bar{F}_2 = 0$. Значит

$$D_1(f_1)(z_i, z_j) \neq 0, D_1(f_2)(z_i, z_j) \neq 0.$$

Далее поступаем как и выше, сравнивая коэффициенты при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j , затем комбинируя и разделяя переменные, имеем:

$$D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3) = 0, D_{\beta_1, \beta_2, \dots}(X_1) = 0, D_{\beta_1, \beta_2, \dots}(X_2) = 0,$$

$$D_{1,1}X_1 = a_1, D_{1,2}X_1 = -b_1, D_{2,2}X_1 = -a_1,$$

$$D_{1,1}X_2 = b_1, D_{1,2}X_2 = a_1, D_{2,2}X_2 = -b_1,$$

$$D_1X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = D_1X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = -(\gamma b_1 + a_1)/2,$$

$$D_2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = D_2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = (b_1 - \gamma a_1)/2,$$

где $\alpha_n, \beta_m = 1, 2, n = 2, 3, 4, 5, \dots, m = 3, 4, 5, 6, \dots, a_1, a_2 = \text{const.}$

Из последней системы следует:

$$D_1(f_1)(z_i) = q\varphi(z_i), D_1(f_2)(z_j) = q\varphi(z_j),$$

где введены сокращающие обозначения: $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{(D_1X_3(z))^2 + (D_2X_3(z))^2}} \neq$

0, $q = \pm \sqrt{(a_1 + \gamma b_1)^2 + (b_1 - \gamma a_1)^2}/2 \neq 0$. Тогда, как и выше, будем иметь систему уравнений (58), решением которой является функция:

$$f = \bar{\psi}(\ln \theta + \bar{z}_i + \bar{z}_j), \bar{z} = qK(z), \bar{\psi}(u) = \psi(u/q),$$

причем аргумент θ имеет явное выражение (3). Далее переходя к прежним обозначениям координат, получаем функцию (24).

IV. И, наконец, разложения (18) и (54) подставляем в (52) и сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных x_i, y_i, x_j, y_j , а также перед степенями $\frac{x_i - x_j}{(y_i - y_j)^\beta}, \frac{(y_i - y_j)^{n\beta}}{(x_i - x_j)^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Выражения $\frac{x_i - x_j}{(y_i - y_j)^\beta}, \frac{(y_i - y_j)^{n\beta}}{(x_i - x_j)^n}$, входящие в тождество (52), в окрестности нуля в ряд Тейлора не разлагаются, поэтому коэффициенты перед ними обращаются в нуль.

Сравнивая коэффициенты перед $\frac{x_i - x_j}{(y_i - y_j)^\beta}$ и $\frac{(y_i - y_j)^{n\beta}}{(x_i - x_j)^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, имеем

$$\overline{F_1} = (f_1, D_{1,1}(f_1), D_{1,1,1}(f_1), D_{1,1,1,1}(f_1), \dots) = 0,$$

$$\overline{F_2} = (f_2, D_{1,1}(f_2), D_{1,1,1}(f_2), D_{1,1,1,1}(f_2), \dots) = 0.$$

Значит

$$D_1(f_1)(z_i, z_j) \neq 0, D_1(f_2)(z_i, z_j) \neq 0.$$

Далее, сравниваем коэффициенты при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j , затем комбинируем и разделяем переменные:

$$D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3) = 0, D_{\beta_1, \beta_2, \dots}(X_1) = 0, D_{\beta_1, \beta_2, \dots}(X_2) = 0,$$

$$D_{1,1}X_1 = a_1, D_{1,2}X_1 = 0, D_{2,2}X_1 = 0, D_{1,1}X_2 = 0, D_{1,2}X_2 = 0, D_{2,2}X_2 = a_2,$$

$$D_1X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = D_1X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = a_1/2,$$

$$D_2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = D_2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = -\beta a_2/2,$$

где $\alpha_n, \beta_m = 1, 2, n = 2, 3, 4, 5, \dots, m = 3, 4, 5, 6, \dots, a_1, a_2 = \text{const.}$

Из последней системы следует:

$$D_1(f_1)(z_i) = q\varphi(z_i), D_1(f_2)(z_j) = q\varphi(z_j),$$

где введены сокращающие обозначения: $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{(D_1X_3(z))^2 + (D_2X_3(z))^2}} \neq 0$,

$0, q = \pm\sqrt{(a_1^2 + (\beta a_2)^2)/2} \neq 0$. Тогда, как и выше, справедлива система уравнений (58), решением которой является функция:

$$f = \overline{\psi}(\ln \theta + \overline{z}_i + \overline{z}_j), \overline{z} = qK(z), \overline{\psi}(u) = \psi(u/q),$$

где аргумент θ имеет явное выражение (4). Потом переходя к прежним обозначениям координат, получаем (25). Теорема 1 полностью доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Подробно вычислим базисные операторы (35), (37) и (40). Операторы (36), (38) и (39) уже вычислены в работе [15]. Все вычисления ведутся в окрестности $U(i) \times U(j)$, а базисные операторы записываются в подходящей системе координат окрестности $U(i)$.

I. Согласно критерию локальной инвариантности (17) записывается функциональное уравнение на операторы алгебры Ли группы движений с двухточечным инвариантом (20):

$$(59) \quad \begin{cases} (x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) - (y_i - y_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \\ + (x_i - x_j)^2(X_3(i) + X_3(j)) = 0. \end{cases}$$

Дифференцируем данное уравнение по x_i, y_i, z_i , а результаты — по x_j, y_j, z_j :

$$\begin{aligned} -X'_{2x}(j) - X'_{2x}(i) + 2(x_i - x_j)(X'_{3x}(j) - X'_{3x}(i)) - 2(X_3(i) + X_3(j)) &= 0, \\ -X'_{2y}(j) + X'_{1x}(i) + 2(x_i - x_j)X'_{3y}(j) &= 0, \\ -X'_{2z}(j) + 2(x_i - x_j)X'_{3z}(j) &= 0, -X'_{2z}(i) - 2(x_i - x_j)X'_{3z}(i) = 0, \\ -X'_{2y}(i) + X'_{1x}(j) - 2(x_i - x_j)X'_{3y}(i) &= 0, X'_{1y}(i) + X'_{1y}(j) = 0, \\ X'_{1z}(j) &= 0, X'_{1z}(i) = 0. \end{aligned}$$

В полученной системе дифференцируем, разделяем переменные, а затем интегрируем:

$$X_1 = -ax^2 + cx + d, X_2 = -2axy - tx^2 + cy - 2nx + l, X_3 = ay + mx + n.$$

Несложно установить, что полученные выражения обращают равенство (59) в тождество. Далее постоянным a, b, c, d, m, n придавая значений 0 и 1, приходим к базисным операторам (35).

II. По критерию локальной инвариантности (17) записывается функциональное уравнение на операторы алгебры Ли группы движений с функцией (22):

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} &(x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) - (y_i - y_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \\ &+ [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2](X_3(i) + X_3(j)) = 0. \end{aligned} \right.$$

Дифференцируем данное уравнение по x_i, y_i, z_i , а результаты — по x_j, y_j, z_j :

$$\begin{aligned} -X'_{2x}(j) - X'_{2x}(i) + 2(x_i - x_j)(X'_{3x}(j) - X'_{3x}(i)) - 2(X_3(i) + X_3(j)) &= 0, \\ -X'_{2y}(j) + X'_{1x}(i) - 2(y_i - y_j)X'_{3x}(i) + 2(x_i - x_j)X'_{3y}(j) &= 0, \\ -X'_{2z}(j) + 2(x_i - x_j)X'_{3z}(j) &= 0, -X'_{2z}(i) - 2(x_i - x_j)X'_{3z}(i) = 0, \\ -X'_{2y}(i) + X'_{1x}(j) - 2(x_i - x_j)X'_{3y}(i) + 2(y_i - y_j)X'_{3x}(j) &= 0, \\ X'_{1y}(i) + X'_{1y}(j) + 2(y_i - y_j)(X'_{3y}(j) - X'_{3y}(i)) - 2(X_3(i) + X_3(j)) &= 0, \\ X'_{1z}(j) + 2(y_i - y_j)X'_{3z}(j) &= 0, X'_{1z}(i) - 2(y_i - y_j)X'_{3z}(i) = 0. \end{aligned}$$

Полученную систему дифференцируем по координатам точек i и j , а затем разделяем переменные:

$$\begin{aligned} X_{1z} = X_{2z} = X_{3z} &= 0, X'_{3xx} = X'_{3yy} = X'_{3xy} = 0, X_3 = ax + by + c, \\ X'_{1x} &= 2ay - 2bx + d, X'_{1y} = 2ax + 2by + 2c, \\ X'_{2x} &= -2ax - 2by - 2c, X'_{2y} = 2ay - 2bx + d, \end{aligned}$$

где $a, b, c, d, m, n = \text{const}$. Интегрируя найденное, получаем

$$\begin{aligned} X_1 &= 2axy - b(x^2 - y^2) + dx + 2cy + m, \\ X_2 &= -2bxy - a(x^2 - y^2) - 2cx + dy + n, X_3 = ax + by + c. \end{aligned}$$

Найденные выражения обращают равенство (60) в тождество. Далее постоянным a, b, c, d, m, n придавая значений 0 и 1, приходим базисным операторам (37).

III. Критерий локальной инвариантности (17) приводит к функциональному уравнению на операторы для алгебры Ли группы движений с двухточечным инвариантом (25):

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} &\beta(x_i - x_j)(X_2(i) - X_2(j)) - (y_i - y_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \\ &+ (x_i - x_j)(y_i - y_j)(X_3(i) + X_3(j)) = 0. \end{aligned} \right.$$

Далее как и выше, дифференцируем уравнение (61) по x_i, y_i, z_i , а результаты — по x_j, y_j, z_j :

$$\begin{aligned} -\beta(X'_{2x}(i) + X'_{2x}(j)) + (y_i - y_j)(X'_{3x}(j) - X'_{3x}(i)) &= 0, \\ -\beta X'_{2y}(j) + X'_{1x}(i) + (y_i - y_j)X'_{3y}(j) - (x_i - x_j)X'_{3x}(i) - (X_3(i) + X_3(j)) &= 0, \\ -\beta X'_{2z}(j) + (y_i - y_j)X'_{3z}(j) &= 0, \\ -\beta X'_{2y}(i) + X'_{1x}(j) - (y_i - y_j)X'_{3y}(i) + (x_i - x_j)X'_{3x}(j) - (X_3(i) + X_3(j)) &= 0, \\ X'_{1y}(i) + X'_{1y}(j) + (x_i - x_j)(X'_{3y}(j) - X'_{3y}(i)) &= 0, \\ X'_{1z}(j) + (x_i - x_j)X'_{3z}(j) &= 0. \end{aligned}$$

Далее поступаем как и выше, получаем:

$$\begin{aligned} X_{1z} = X_{2z} = X_{3z} = 0, \quad X'_{3xx} = X'_{3yy} = X'_{3xy} = 0, \quad X_3 = ax + by + c, \\ X'_{1x} = -2ax + c + d, \quad X'_{1y} = 0, \quad X'_{2x} = 0, \quad \beta X'_{2y} = -2by - c + d, \end{aligned}$$

где $a, b, c, d, m, n = \text{const}$. Интегрируя найденное, получаем

$$X_1 = -ax^2 + (c + d)x + m, \quad X_2 = -by^2/\beta + (d - c)y/\beta + n, \quad X_3 = ax + by + c.$$

Полученные выражения равенство (61) обращают в тождество. Далее, в предыдущих выражениях, постоянным a, b, c, d, m, n придавая значения 0, 1 и β , получаем базисные операторы (40). Теорема 2 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, выше поставленная задача об аналитическом вложении геометрий максимальной подвижности с метрическими функциями (1) — (4) полностью решена. В результате получились трехмерные геометрии максимальной подвижности с функциями (20) — (25). Оказалось, что функция (22) трехмерной симплицальной геометрии третьего типа не содержится в классификации В.Х. Лева [17], которая, построена совершенно другим методом и ранее считалась *полной*. В работе также найдены базисные операторы (35) — (40) алгебр Ли групп движений этих геометрий.

Аналогично можно поставить и решить задачу об аналитическом вложении пространства со скалярным произведением, то есть найти все функции вида:

$$f(i, j) = f(x_i y_j + y_i y_j + z_i z_j, w_i, w_j),$$

являющиеся двухточечными инвариантами группы преобразований размерности три. Задачу о вложении можно также поставить и для трехмерной геометрии, то есть когда функции четырехмерных геометрий ищутся в виде:

$$f = \chi(g(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j), w_i, w_j),$$

где g — метрические функции известных трехмерных геометрий.

Также можно поставить задачу вложения для геометрий двух множеств, одна из которых решена в работах [18, 19].

Выражаю благодарность профессору Михайличенко Геннадию Григорьевичу за обсуждение полученных результатов.

REFERENCES

- [1] G.G. Mikhailichenko, *The mathematical basics and results of the theory of physical structures*, <https://arxiv.org/pdf/1602.02795>, 2012.
- [2] G.G. Mikhailichenko, *Two-dimensional geometry*, Soviet Math. Doklady, **24**:2 (1981), 346–348. MR0631804
- [3] H. Helmholtz, *Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen*, Nachr. Konigl. Ges. Wiss. und Georg-Augusts-Univ. Gottingen, 1868, 19.
- [4] V.A. Kyrov, *Functional equations in pseudo-Euclidean geometry*, Sib. Zn. Ind. Mat, **13**:4 (2010), 38–51. (in Russian). MR2841212
- [5] V.A. Kyrov, G.G. Mikhailichenko, *An analytic method for the embedding of the Euclidean and pseudo-Euclidean geometries*, Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk, **23**:2 (2017), 167–181 (in Russian).
- [6] V.A. Kyrov, *Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений*, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, **26**:1 (2012), 31–38 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu986
- [7] V.A. Kyrov, G.G. Mikhailichenko, *The analytic method of embedding symplectic geometry*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 657–672 (in Russian). Zbl 1372.53081
- [8] V.A. Kyrov, *The analytical method for embedding multidimensional pseudo-Euclidean geometries*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 741–758 (in Russian). Zbl 1396.53024
- [9] G.G. Mikhailichenko, *On group and phenomenological symmetry in geometry*, Siberian Mathematical Journal, **25**:5 (1984), 99–113. MR0762243
- [10] L.V. Ovsiannikov, *A group analysis of differential equation*, Nauka, M., 1978. MR0511921
- [11] V.A. Kyrov, *The geometry of Helmgolz*, LAP, Saarbrücken, 2011.
- [12] G.M. Fichtengolz, *A course of differential and integral calculus. T. 2*, M.: Phismhatgis, 1963.
- [13] L.E. Elsgoltz, *Differential equations and calculus of variations*, M.: Nauka, 1969.
- [14] V.A. Kyrov, R.A. Bogdanova *The groups of motions of some three-dimensional maximal mobility geometries*, Siberian Mathematical Journal, **59**:2 (2018), 323–331 (in Russian). Zbl 1406.51014
- [15] V.A. Kyrov, *Six-dimensional lie algebras of groups of motions of Tree-dimensional phenomenologically symmetric geometries*, Polymetric geometries, Novosibirsk State University, Novosibirsk, 2001, 116–143.
- [16] V. Dyakonov, *Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations*, M.: DMS, 2014.
- [17] V.H. Lev, *Three-dimensional geometries in the theory of physical structures*, Vychisl. Sistemy, **125** (1988), 90–103. (in Russian). MR1002931
- [18] V.A. Kyrov, *Embedding of phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank $(N, 2)$ into phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank $(N + 1, 2)$* , Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, **26**:3 (2016), 312–323 (in Russian). Zbl 1367.51009
- [19] V.A. Kyrov, *Embedding of phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank (N, M) into phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank $(N + 1, M)$* , Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, **27**:1 (2017), 42–53 (in Russian). Zbl 1376.51005

VLADIMIR ALEXANDROVICH KYROV
 GORNO-ALTAISK STATE UNIVERSITY,
 1, LENKINA STR.,
 GORNO-ALTAISK, 649000, RUSSIA
 E-mail address: kyrovVA@yandex.ru