Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. V. Greshnov, Hyperspaces that satisfy cc -homogeneous cone condition on canonical Heisenberg and Engel groups, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 938–948

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.062>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.80.181.102

April 26, 2023, 13:26:28

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 938–948 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.062

УДК 517.518

MSC 43A80

ГИПЕРПРОСТРАНСТВА, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ УСЛОВИЮ cc-ОДНОРОДНОГО КОНУСА, НА КАНОНИЧЕСКИХ ГРУППАХ ГЕЙЗЕНБЕРГА И ЭНГЕЛЯ

А.В. ГРЕШНОВ

ABSTRACT. We get a new proof that hyperspace $\{(x, y, t) \mid t > 0\}$ of canonical Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ satisfies inner and outer continuously deformable *cc*-homogeneous cone conditions and *cc*-uniformity condition. By means of that we prove that hyperspace $\{(x, y, t, z) \mid t > 0\}$ of canonical Engel group $\mathbb{E}_{\alpha, \beta}$ satisfies inner and outer continuously deformable *cc*-homogeneous cone conditions.

Keywords: Carnot-Carathéodory metric, *cc*-homogeneous cone, Heisenberg group, Engel group, inner cone, outer cone, *cc*-uniform domain, hyperspace.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим некоторую гиперплоскость $A_1x_1 + \dots + A_nx_n + D = 0$ в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем неограниченные множества вида

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid A_1x_1 + \dots + A_nx_n + D > 0\}, \{(x_1, \dots, x_n) \mid A_1x_1 + \dots + A_nx_n + D < 0\}$$

мы будем называть гиперпространствами.

Каноническая одномерная группа Гейзенберга $\mathbb{H}^1$ определяется в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с системой координат (x, y, t) , индуцированной координатным репером (O, e_1, e_2, e_3) (здесь e_1, e_2, e_3 — стандартные орты

GRESHNOV, A.V., HYPERSPACES THAT SATISFY *cc*-HOMOGENEOUS CONE CONDITION ON CANONICAL HEISENBERG AND ENGEL GROUPS.

© 2019 ГРЕШНОВ А.В.

Публикация выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Проект № 1.3087.2017/4.6).

Поступила 23 мая 2019 г., опубликована 28 июня 2019 г.

$\mathbb{R}^3$), при помощи таблицы коммутаторов

$$(1) \quad \begin{cases} [e_1, e_2] = \alpha e_3, \\ [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0. \end{cases} \quad \alpha > 0,$$

Используя формулу Кэмпбелла — Хаусдорфа, при помощи (1) мы получаем аналитическую запись операции левого сдвига произвольного элемента $w' = (x', y', t') \in \mathbb{H}^1$ на произвольный элемент $w = (x, y, t) \in \mathbb{H}^1$:

$$(2) \quad L_w w' = w \cdot w' = \left(x + x', y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y) \right).$$

Используя (2), мы получаем выражения для базисных левоинвариантных векторных полей группы $\mathbb{H}^1$ в любой точке (x, y, t) :

$$X = (1, 0, -\frac{\alpha}{2}y) = e_1 - \frac{\alpha y}{2} \cdot e_3, \quad Y = (0, 1, \frac{\alpha}{2}x) = e_2 + \frac{\alpha x}{2} \cdot e_3, \quad T = (0, 0, 1) = e_3.$$

Каноническая группа Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha, \beta}$ определяется в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ с системой координат (x, y, t, z) , индуцированной координатным репером (O, e_1, e_2, e_3, e_4) (здесь e_1, e_2, e_3, e_4 — стандартные орты $\mathbb{R}^4$), при помощи таблицы коммутаторов

$$(3) \quad \begin{cases} [e_1, e_2] = \alpha e_3, \\ [e_1, e_3] = \beta e_4, \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha > 0, \\ \beta > 0; \end{matrix}$$

все остальные возможные коммутаторы e_1, e_2, e_3, e_4 равны 0. Пусть $v = (x, y, t, z)$, $w' = (x', y', t', z')$. Тогда, используя формулу Кэмпбелла — Хаусдорфа, при помощи (3) мы получаем аналитическую запись операции левого сдвига произвольного элемента $w' = (x', y', t', z') \in \mathbb{E}_{\alpha, \beta}$ на произвольный элемент $w = (x, y, t, z) \in \mathbb{E}_{\alpha, \beta}$:

$$(4) \quad L_w w' = w \cdot w' = \left(x + x', y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y), \right. \\ \left. z + z' + \frac{\beta}{2}(xt' - x't) + \frac{\alpha\beta}{12}(x - x')(xy' - x'y) \right).$$

Используя (4), мы получаем выражения для базисных левоинвариантных векторных полей группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha, \beta}$ в любой точке (x, y, t, z) :

$$X = (1, 0, -\frac{\alpha}{2}y, -\frac{\beta t}{2} - \frac{\alpha\beta xy}{12}) = e_1 - \frac{\alpha y}{2} \cdot e_3 - \left(\frac{\beta t}{2} + \frac{\alpha\beta xy}{12} \right) \cdot e_4, \\ Y = (0, 1, \frac{\alpha x}{2}, \frac{\alpha\beta x^2}{12}) = e_2 + \frac{\alpha x}{2} \cdot e_3 + \frac{\alpha\beta x^2}{12} \cdot e_4, \\ T = (0, 0, 1, \frac{\beta x}{2}) = e_3 + \frac{\beta x}{2} \cdot e_4, \quad Z = e_4.$$

Несложно видеть, что между каноническими группами $\mathbb{H}^1$ и $\mathbb{E}_{\alpha, \beta}$ существует взаимосвязь.

Канонические группы (по-другому, группалгебы [1]) Гейзенберга и Энгеля являются частными случаями канонических групп Карно, см., например, [2, 3]; здесь мы не будем приводить определение групп Карно, все необходимые сведения по этому вопросу (в том числе и о метрике Карно — Каратеодори) читатель может найти, например, в книге [4].

Расстояние Карно — Каратеодори $d_{cc}(u, v)$ между двумя произвольными точками u, v как группы $\mathbb{H}^1$, так и группы $\mathbb{E}_{\alpha, \beta}$, определяется как точная нижняя грань длин $l(\gamma)$ всех абсолютно непрерывных горизонтальных путей $\gamma = \gamma(s)$, определенных на некотором отрезке $[0, s_0]$, соединяющих точки u, v , т. е. таких, что $u = \gamma(0)$, $v = \gamma(s_0)$,

$$\dot{\gamma}(s) = \alpha(s)X(\gamma(s)) + \beta(s)Y(\gamma(s)) \quad \text{п. в. } s \in [0, s_0],$$

где $\alpha(s), \beta(s)$ — некоторые интегрируемые функции. Длина кривой здесь определяется при помощи стандартной формы скалярного произведения, индуцированного базисными левоинвариантными векторными полями рассматриваемой канонической группы. В дальнейшем символом $B_{cc}(x, r)$ мы будем обозначать открытый шар в метрике Карно — Каратеодори с центром в точке x радиуса r , символом $S_{cc}(x, r)$ — сферу в метрике Карно — Каратеодори с центром в точке x радиуса r ($S_{cc}(x, r) = \partial B_{cc}(x, r)$).

На любой группе Карно определена однопараметрическая подгруппа растяжений (дилатаций) δ_ε , $\varepsilon > 0$, которая для $\mathbb{H}^1$ определяется как

$$\delta_\varepsilon(x, y, t) = (\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon^2 t),$$

для $\mathbb{E}_{\alpha, \beta}$ — как

$$\delta_\varepsilon(x, y, t, z) = (\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon^2 t, \varepsilon^3 z).$$

Известно, что метрика Карно — Каратеодори инвариантна относительно действий δ_ε и левых сдвигов, т. е.

$$d_{cc}(\delta_\varepsilon u, \delta_\varepsilon v) = \varepsilon d_{cc}(u, v), \quad d_{cc}(L_u v, L_u w) = d_{cc}(v, w).$$

В ряде случаев полезно использовать билипшицево эквивалентную d_{cc} квазиметрику, например, Вох-квазиметрику, см., например, [3].

В настоящей работе мы изучаем вопросы, связанные с задачей о существовании областей, удовлетворяющих условиям внутреннего и внешнего ss -однородных конусов на $\mathbb{H}^1$ и $\mathbb{E}_{\alpha, \beta}$. Эти области имеют важное значение для теории квазиконформных отображений и пространств Соболева, см., например, [2, 6, 7], в гармоническом анализе, см., например, [5, 8, 9].

В дальнейшем символом O (в зависимости от контекста) мы обозначаем начало координат соответствующего рассмотрению евклидова пространства. Отметим, что O является единичным элементом любой канонической группы Карно: $L_O u = u$.

Определение 1 (ср. с [5]). *Множество*

$$K_\infty(M, X, r) = \bigcup_{\varepsilon \geq 0} M \cdot \delta_\varepsilon B_{cc}(X, r), \quad d_{cc}(O, X) = 1 > r,$$

группы Карно будем называть ss -однородным конусом с вершиной в точке M , осью $M \cdot \delta_\varepsilon X$ и раствором r . Множество

$$K_{\varepsilon_0}(M, X, r) = \bigcup_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]} M \cdot \delta_\varepsilon B_{cc}(X, r), \quad d_{cc}(O, X) = 1 > r,$$

будем называть усеченным ss -однородным конусом с вершиной в точке M , осью $M \cdot \delta_\varepsilon X$ и раствором r .

Определение 2 (ср. с [5]). *Говорим, что неограниченная область $\mathcal{D}$ группы Карно удовлетворяет условию внутреннего cc -однородного конуса, если существует r такое, что для каждой точки $M \in \partial\mathcal{D}$ найдется cc -однородный конус $K_\infty(M, X, r)$, $X = X(M)$, такой, что $(K_\infty(M, X, r) \setminus M) \subset \mathcal{D}$, где r не зависит от выбора M .*

Аналогично определению 2 определяется понятие ограниченной области, удовлетворяющей условию cc -внутреннего однородного конуса, однако в таком определении мы должны рассматривать усеченные конуса с фиксированным параметром ε_0 (ср. с [5]). Условие внешнего cc -однородного конуса для области $\mathcal{D}$ — это условие cc -однородного конуса для внешней к $\mathcal{D}$ области (в ряде задач при определении области, удовлетворяющей условию внешнего cc -однородного конуса, достаточно ограничиться усеченными конусами).

Кривую вида

$$M \cdot \delta_\varepsilon X, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0), \quad \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+,$$

где M — некоторая точка группы Карно, X — некоторая точка группы Карно такая, что $d_{cc}(O, X) = 1$, мы будем называть дилатацией.

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая область группы Карно. Каждому $M \in \mathcal{M}$ сопоставим некоторое множество $\mathcal{X}_M \subset S_{cc}(O, 1)$. Обозначим $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_M\}$. Введем рассмотрение совокупность дилатаций

$$(5) \quad \Gamma_{\mathcal{M}, \mathcal{X}} = \{M \cdot \delta_\varepsilon X \mid M \in \mathcal{M}, X \in \mathcal{X}_M, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0), \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+\}.$$

Говорим, что дилатации $M_i \cdot \delta_\varepsilon X_i \in \Gamma_{\mathcal{M}, \mathcal{X}}$, $i = 1, 2$, можно непрерывно деформировать друг в друга в семействе дилатаций $\Gamma_{\mathcal{M}, \mathcal{X}}$, если найдется кривая

$$M(s) : [s_1, s_2] \rightarrow \mathcal{M}, \quad M(s_i) = M_i, \quad i = 1, 2,$$

(вырожденная в случае $M_1 = M_2$) такая, что **найдется** множество

$$\lambda(s) = \bigcup_{s \in [s_1, s_2]} X(s), \quad M(s) \cdot \delta_\varepsilon X(s) \in \Gamma_{\mathcal{M}, \mathcal{X}} \quad \forall s \in [s_1, s_2],$$

представляющее из себя кривую

$$\lambda(s) : [s_1, s_2] \rightarrow \bigcup_M \mathcal{X}_M, \quad X(s_i) = X_i, \quad i = 1, 2.$$

(Отметим, что $M(s)$ и $\lambda(s)$ могут определяться неединственным образом.) В этом случае каждую дилатацию $M(s) \cdot \delta_\varepsilon X(s)$ мы будем называть элементом деформации дилатаций $M_i \cdot \delta_\varepsilon X_i \in \Gamma_{\mathcal{M}, \mathcal{X}}$, $i = 1, 2$.

Если любые две дилатации семейства $\Gamma_{\mathcal{M}, \mathcal{X}}$ можно непрерывно деформировать друг в друга в $\Gamma_{\mathcal{M}, \mathcal{X}}$, то говорим, что семейство дилатаций $\Gamma_{\mathcal{M}, \mathcal{X}}$ обладает свойством непрерывной деформируемости.

Определение 3. *Если область $\mathcal{D}$ группы Карно удовлетворяет условию внутреннего cc -однородного конуса и при этом оси cc -однородных конусов области $\mathcal{D}$ образуют непрерывно деформируемое семейство, то говорим, что область $\mathcal{D}$ группы Карно удовлетворяет условию непрерывно деформируемого внутреннего cc -однородного конуса*

Определение 4 (ср. с [2, 5, 6, 7]). *Говорим, что область $\mathcal{D}$ группы Карно является cc -равномерной, если для каждой пары точек $x, y \in \mathcal{D}$ найдется*

абсолютно непрерывный горизонтальный путь $\gamma = \gamma(s) \subset \mathcal{D}$, определенный на $[0, s_0]$, соединяющий точки x, y , такой, что

$$\begin{cases} l(\gamma) \leq ad_{cc}(x, y), \\ \min\{l(\gamma_{x,z}), l(\gamma_{y,z})\} \leq bd_{cc}(z, \partial\mathcal{D}), \end{cases}$$

где $z \in \gamma$ — текущая точка, $\gamma_{y,z}$ — участок кривой γ от точки y до точки z , $\gamma_{x,z}$ — участок кривой γ от точки x до точки z , и константы a, b не зависят от выбора $x, y \in \mathcal{D}$.

Главным результатом настоящей работы является доказательство того, что неограниченная область

$$\Pi_{E_{\alpha,\beta}}^{t+} = \{(x, y, t, z) \mid t > 0\} \subset E_{\alpha,\beta}$$

удовлетворяет условиям непрерывно деформируемых внутреннего (теорема 3) и внешнего (следствие 2) cc -однородных конусов.

Отметим, что из [2, Теорема 1] следует, что неограниченные области

$$\Pi_{E_{\alpha,\beta}}^{x+} = \{(x, y, t, z) \mid x > 0\}, \quad \Pi_{E_{\alpha,\beta}}^{y+} = \{(x, y, t, z) \mid y > 0\} \subset E_{\alpha,\beta}$$

являются cc -равномерными областями, а из вычислений, проделанных в [10, 3008–3009], следует, что неограниченная область

$$\Pi_{E_{\alpha,\beta}}^{z+} = \{(x, y, t, z) \mid z > 0\} \subset E_{\alpha,\beta}$$

не удовлетворяет условию внутреннего cc -однородного конуса. При этом неограниченная область $\Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+}$ является cc -равномерной областью (см. [2, 5]).

Далее мы будем использовать следующие обозначения

$$\Pi_{\mathbb{H}^1}^{t-} = \{(x, y, t) \mid t < 0\}, \quad \Pi_{E_{\alpha,\beta}}^{t-} = \{(x, y, t, z) \mid t < 0\}.$$

Для произвольного множества A некоторого метрического пространства символом $[A]$ обозначаем его замыкание.

Для доказательств теоремы 3 и следствия 2 мы разработали новые методы доказательств (по сравнению с методами работы [2]) того, что гиперпространство $\Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+}$ удовлетворяет условию внутреннего cc -однородного конуса и является cc -равномерной областью. Суть методов работы [2] основывалась на использовании в качестве подходящих кривых ломаные, состоящие из отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей X, Y , что было оправдано тем, что такие отрезки с геометрической точки зрения действительно являются обычными с точки зрения евклидовой геометрии отрезками. Однако на канонической группе Энгеля $E_{\alpha,\beta}$ таких свойств нет, что делает технически трудным прямолинейное обобщение доказательств из [2].

Следует отметить, что в работе [9] доказано, что любая область произвольной 2-ступенчатой группы Карно (к таковым относится $\mathbb{H}^1$) с достаточно гладкой в обычном смысле границей является cc -равномерной, в частности, cc -равномерной является и область $\Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+}$. В отличие от [9], наши построения подходящих горизонтальных путей, удовлетворяющих условиям равномерности, основаны на том, что оси внутренних и внешних cc -однородных конусов образуют непрерывно деформируемые семейства, и не используют цепочки Гарнака. Также отметим, что наши методы основаны на геометрических свойствах канонических групп $\mathbb{H}^1$, $E_{\alpha,\beta}$, и отличаются от методов работы [10].

Мы уверены, что, используя методы настоящей работы, возможно доказать, что гиперпространство $\Pi_{E_{\alpha,\beta}}^{t+}$ является cc -равномерной областью, а гиперпространство $\Pi_{E_{\alpha,\beta}}^{z+}$ не является cc -равномерной областью, и эти результаты могут быть перенесены на произвольные 3-ступенчатые группы Карно.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. Пусть $K_{\infty}(M, X, r) \subset (\mathcal{D} \setminus M)$, где $\mathcal{D}$ — область группы Карно. Тогда

1^0 найдется константа $\kappa > 0$ такая, что

$$\frac{d_{cc}(M, M \cdot \delta_{\varepsilon} X)}{d_{cc}(M \cdot \delta_{\varepsilon} X, \partial \mathcal{D})} \leq \kappa \quad \forall \varepsilon > 0;$$

2^0 зафиксируем некоторое число $\epsilon \in (0, 1)$, и рассмотрим последовательность точек $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $A_0 = X$, $A_n = \delta_{\epsilon} A_{n-1}$, группы Карно, $r_0 = d_{cc}(A_0, A_1)$. Всегда можно выбрать $r_0 < r$ таким образом, что для любых точек x, y , таких, что

$$x \in B_{cc}(A_m, \epsilon^m r_0), \quad y \in B_{cc}(A_n, \epsilon^n r_0), \quad n \geq m,$$

существует горизонтальный путь $\gamma_{x,y} = \gamma_{x,y}(s)$, $s \in [0, l(\gamma_{x,y})]$, такой, что

$$\gamma_{x,y}(0) = x, \quad \gamma(l(\gamma_{x,y})) = y,$$

$$\begin{cases} l(\gamma) \leq \kappa_1 r_0 (\epsilon^n + \epsilon^{n-1} + \dots + \epsilon^m), \\ l(\gamma(s)) \leq \kappa_2 d_{cc}(\gamma_{x,y}(s), \partial \mathcal{D}), \quad \forall s \in [0, l(\gamma_{x,y})], \end{cases}$$

для некоторых констант κ_1, κ_2 , не зависящих от выбора s, n, m .

Доказательство. П. 1^0 вытекает из инвариантности метрики Карно — Каратеодори под действием группы растяжений.

П. 2^0 Пусть $r_0 = \frac{r}{10}$. Мы имеем $K_{\infty}(M, X, r_0) \subset K_{\infty}(M, X, r)$. Тогда в случае $n = m$ кривая $\gamma_{x,y}$ — объединение двух cc -кратчайших, соединяющих каждую из точек x, y с точкой A_n ; если $n > m$, то

$$\gamma_{x,y} = \gamma(x, A_m) \cup \gamma(A_m, A_{m+1}) \cup \dots \cup \gamma(A_{n-1}, A_n) \cup \gamma(A_n, y),$$

где $\gamma(C_1, C_2)$ — cc -кратчайшая, соединяющая точки C_1, C_2 . $\square$

Лемма 2 (см. [2], Лемма 1). Пусть S — связное множество, принадлежащее области $\mathcal{D}$ группы Карно, обладающее следующими свойствами

- (1) $x_1 \in S, x_2 \in S$,
- (2) существует константа $\beta > 0$ такая, что для любой точки $x \in S$ выполняется $d_{cc}(x, \partial \mathcal{D}) \geq \beta d_{cc}(x_1, x_2)$,
- (3) $S \subset B_{cc}(z, \alpha \rho_c(x_1, x_2))$, где z — некоторая точка группы Карно, α — некоторая положительная константа.

Тогда для точек x_1, x_2 найдется горизонтальная кривая $\gamma \subset \mathcal{D}$, соединяющая x_1, x_2 , такая, что для нее выполняются условия равномерности в области $\mathcal{D}$ с некоторыми константами, зависящими только от α, β .

3. СПЕЦИАЛЬНОЕ СЛОЕНИЕ ДИЛАТАЦИЙ НА $\mathbb{H}^1$

В плоскости XOY рассмотрим единичную окружность

$$S(1) = \{(x_1, y_1, 0) \mid x_1^2 + y_1^2 = 1\}.$$

Горизонтальная плоскость Π_{x_1, y_1} , проходящая через точку $(x_1, y_1, 0) = M_1 \in S(1)$, состоит из точек (x, y, t) таких, что

$$\frac{\alpha y_1}{2}x - \frac{\alpha x_1}{2}y + t = 0.$$

Отметим, что косинус угла между Π_{x_1, y_1} и координатной плоскостью XOY равен

$$(6) \quad \frac{2}{\sqrt{4 + \alpha^2}}.$$

Рассмотрим дилатацию

$$\tau_{M_1}^+ = \tau_{M_1}^+(\varepsilon) = (x_1, y_1, 0) \cdot (\varepsilon(-y_1), \varepsilon x_1, \varepsilon^2 \cdot 1) = (x_1 - \varepsilon y_1, y_1 + \varepsilon x_1, \frac{\alpha}{2}\varepsilon + \varepsilon^2), \quad \varepsilon \geq 0.$$

Отметим, что найдется число $\kappa > 0$ такое, что

$$(7) \quad \frac{d_{cc}(M_1, \tau_{M_1}^+(\varepsilon))}{d_{cc}(\tau_{M_1}^+(\varepsilon), \partial\Pi_t^+)} \leq \kappa \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Оценка (7) вытекает из элементарных геометрических построений, основанных на (6), и леммы 1.

Рассмотрим пучок дилатаций

$$(8) \quad \begin{aligned} \tau_{M_1, b}^+ &= \tau_{M_1, b}^+(\varepsilon) = (x_1, y_1, 0) \cdot \delta_\varepsilon(-y_1 - b_1, x_1 + b_2, 1 + b_3) \\ &= (x_1, y_1, 0) \cdot (-\varepsilon(y_1 + b_1), \varepsilon(x_1 + b_2), \varepsilon^2(1 + b_3)) \\ &= (x_1 - \varepsilon(y_1 + b_1), y_1 + \varepsilon(x_1 + b_2), \frac{\alpha}{2}\varepsilon + \frac{\alpha}{2}\varepsilon(x_1 b_2 + y_1 b_1) + \varepsilon^2(1 + b_3)), \quad \varepsilon \geq 0. \end{aligned}$$

Понятно, что если вектор $b = (b_1, b_2, b_3) \in B_e(k) = \bigcup_{x^2 + y^2 + t^2 < k^2} (x, y, t)$, где k достаточно мало, то, см. (8),

$$\frac{\alpha}{2}\varepsilon + \frac{\alpha}{2}\varepsilon(x_1 b_2 + y_1 b_1) + \varepsilon^2(1 + b_3) > 0,$$

вне зависимости от выбора $M_1 \in S(1)$, откуда вытекает, что

$$(9) \quad \tau_{M_1, b}^+(\varepsilon) \subset \Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+}, \quad \varepsilon > 0 \quad \forall b \in B_e(k).$$

Включение (9) говорит нам о том, что в каждой точке $M_1 \in \partial\Pi_{\mathbb{H}^1}$ мы построили cc -однородный конус $K_\infty(M_1, X_{M_1}, r_{M_1})$ для области $\Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+}$ с осью

$$\tau_{M_1}^+ = \tau_{M_1}^+(\varepsilon) = M_1 \cdot \delta_\varepsilon(-y_1, x_1, 1), \quad X_{M_1} \in \tau_{M_1}^+, \quad d_{cc}(X_{M_1}, O) = 1,$$

причем r_{M_1} не зависит от выбора $M_1 \in S(1)$.

Несложно видеть, что для любых различных точек $M_1, M'_1 \in S(1)$ мы имеем

$$\tau_{M_1}^+ \cap \tau_{M'_1}^+ = \emptyset.$$

Понятно, что множество $\Gamma_1 = \bigcup_{M_1 \in S(1), \varepsilon > 0} \tau_{M_1}^{1,+}(\varepsilon)$ образует поверхность вращения, разделяющую положительное полупространство $\Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+}$ на две неограниченных множества (внутреннее и внешнее).

При любом $r > 0$ множество $\delta_r \Gamma_1 = \Gamma_r$, $r > 0$, является объединением дилатаций

$$\tau_{M_r}^+(\varepsilon) = M_r \cdot (-\varepsilon y_1, \varepsilon x_1, \varepsilon^2) = (x_r - \varepsilon y_1, y_r + \varepsilon x_1, \frac{\alpha}{2} r \varepsilon + \varepsilon^2), \quad \varepsilon \geq 0,$$

где $M_r = (rx_1, ry_1, 0) = \delta_r M_1$, $M_1 \in S(1)$, — произвольная точка множества

$$S(r) = \{(x_r, y_r, 0) \mid x_r^2 + y_r^2 = r^2\}, \quad r > 0.$$

Учитывая инвариантность расстояния Карно — Каратеодори при действии растяжения δ_r и (7), мы имеем

$$(10) \quad \frac{d_{cc}(M_r, \tau_{M_r}^+(\varepsilon))}{d_{cc}(\tau_{M_r}^+(\varepsilon), \partial \Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+})} \leq \kappa \quad \forall r, \varepsilon > 0.$$

Отметим, что для любой точки M_r выполняется

$$\tau_{M_r}^+(\varepsilon) \subset p(x_r, y_r),$$

где плоскость $p(x_r, y_r)$ определяется уравнением $x_r x + y_r y - (x_r)^2 - (y_r)^2 = 0$.

Переходя к пределу, мы получим

$$\lim_{r \rightarrow 0} \delta_r \Gamma_1 = \Gamma_0 = \bigcup_{x_1^2 + y_1^2 = 1} \delta_\varepsilon(x_1, y_1, 1), \quad \varepsilon \geq 0.$$

Пусть $\Gamma' = \bigcup_{\substack{0 \leq (x')^2 + (y')^2 = k^2 \leq 1 \\ \varepsilon \geq 0}} \delta_\varepsilon(x', y', 1)$. Понятно, что $\Gamma_0 \subset \Gamma'$. Несложно

проверить, что константа κ может быть выбрана таким образом, что для любой дилатации $\delta_\varepsilon(x', y', 1) \in \Gamma'$ будет выполняться оценка

$$(11) \quad \frac{d_{cc}(O, \delta_\varepsilon(x', y', 1))}{d_{cc}(\delta_\varepsilon(x', y', 1), \partial \Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+})} \leq \kappa \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Обозначим

$$\Gamma^+ = \Gamma' \cup \bigcup_{r \in [0, \infty)} \Gamma_r.$$

Теорема 1. Область $\Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+}$ удовлетворяет условию непрерывно деформируемого внутреннего cc -однородного конуса.

Доказательство. Условие внутреннего cc -однородного конуса для $\Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+}$ вытекает из оценок (10), (11). Условие непрерывной деформируемости осей внутренних cc -однородного конусов области $\Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+}$ вытекает из способа построения семейств Γ_r , $r \geq 0$, и Γ' . □

Используя дилатации вида

$$\tau_{M_1}^-(\varepsilon) = (x_1, y_1, 0) \cdot (\varepsilon y_1, \varepsilon \cdot (-x_1), (-1) \cdot \varepsilon^2) = (x_1 + \varepsilon y_1, y_1 - \varepsilon x_1, -\frac{\alpha}{2} \varepsilon - \varepsilon^2), \quad \varepsilon \geq 0,$$

также, как и выше, построим множество Γ^- , представляющее из себя семейство непрерывно деформируемых дилатаций, начинающихся в точках $M_1 \in \partial \Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+}$, принадлежащих отрицательному гиперпространству $\bar{\Pi}_{\mathbb{H}^1}^{t-}$.

Следствие 1. Гиперпространство $\Pi_{\mathbb{H}^1}^{t-}$ удовлетворяет условию непрерывно деформируемого внутреннего cc -однородного конуса. Следовательно, гиперпространство $\Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+}$ удовлетворяет условию непрерывно деформируемого внешнего cc -однородного конуса.

Доказательство. Очевидно, семейство Γ^- обладает по отношению к $\Pi_{\mathbb{H}^1}^{t-}$ теми же свойствами, что и Γ^+ обладает по отношению к $\Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+}$. $\square$

Каждой дилатации $\tau_{M_1}^+(\varepsilon)$ сопоставим дилатацию $\tau_{M_1}^-(\varepsilon)$, их объединение обозначим

$$\tau_{M_1}(\varepsilon) = \begin{cases} \tau_{M_1}^-(\varepsilon), & \varepsilon < 0, \\ \tau_{M_1}^+(\varepsilon), & \varepsilon \geq 0. \end{cases}$$

Каждой дилатации $\delta_\varepsilon(x', y', 1)$, $(x')^2 + (y')^2 = k^2 \leq 1$, $\varepsilon > 0$, поставим в соответствие дилатацию $\delta_\varepsilon(-x', -y', -1)$, $\varepsilon > 0$, их объединение обозначим

$$\delta_{(x', y')}(\varepsilon) = \begin{cases} (\varepsilon x', \varepsilon y', -\varepsilon^2), & \varepsilon < 0, \\ (\varepsilon x', \varepsilon y', \varepsilon^2), & \varepsilon \geq 0. \end{cases}$$

Совокупность всевозможных кривых $\tau_{M_1}(\varepsilon)$, $\delta_{(x', y')}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, обозначим через $\Gamma = \{\omega_G\}$, $\omega_G = \omega_G(\varepsilon)$, где индекс G обозначает

- или некоторую точку $M_1 \in \partial\Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+}$, $M_1 \neq O$, (тогда $\omega_G = \tau_{M_1}(\varepsilon)$),
- или некоторый вектор (x', y') (тогда $\omega_G = \delta_{(x', y')}(\varepsilon)$).

По построению мы имеем $\bigcup_{\omega_G \in \Gamma} \omega_G = \mathbb{R}^3$.

В дальнейшем, если $u \in \omega_G$ для некоторой точки u , то мы будем писать $G(u)$, тем самым подчеркивая, что по точке u мы определяем $G = G(u)$ подходящим (в зависимости от контекста построения) способом.

Так же, как и для (5), для Γ можно ввести понятие непрерывной деформируемости.

Теорема 2. Область $\Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+}$ является *сс-равномерной*.

Доказательство. Отметим, что кривые из Γ обладают следующим **свойством непрерывности**, вытекающим из способ построения семейства Γ . Рассмотрим (не обязательно горизонтальную) кривую $\gamma : [0, s_0] \rightarrow \mathbb{H}^1$, соединяющую произвольные точки $u, v \in \Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+}$, тогда кривые $\omega_{G(u)}$, $\omega_{G(v)}$ всегда можно непрерывно деформировать друг в друга в семействе кривых Γ вдоль γ (т.е. для каждого $s \in (0, s_0)$ найдется кривая $\omega_{G(\gamma(s))}$, являющаяся элементом деформации).

Поверхность, которая получается как объединение всех кривых $\omega_{G(\gamma(s))}$, мы будем обозначать символом $\Sigma(u, v)$.

Рассмотрим произвольные точки $u, v \in \Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+}$. Соединим их кратчайшей Карно — Каратеодори $\sigma(s)$, $s \in [0, s_1]$. Предположим, что $O \notin \sigma(s)$. (В противном случае рассмотрим некоторый шар $B_{cc}(0, \delta)$, где δ — достаточно малое число; всегда можно соединить точки $\sigma(s) \cap \partial B_{cc}(0, \delta) = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ горизонтальной кривой, которой не принадлежит точка O и длина которой не превосходит величины $cd_{cc}(\sigma_1, \sigma_2)$ для некоторой константы c , не зависящей от выбора δ .) Рассмотрим поверхность $\Sigma(u, v)$. Используя п. 2⁰ леммы 1, учитывая при этом теорему 1, мы всегда можем найти на $\omega_{G(\sigma(s))} = \omega_{G(\sigma(s))}(\varepsilon)$ точку $p(s)$ такую, что

$$\begin{cases} C_1 d_{cc}(u, v) \leq d_{cc}(p(s), \partial\Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+}) \leq C_2 d_{cc}(u, v), \\ d_{cc}(\sigma(s), p(s)) \leq C_3 d_{cc}(u, v), \end{cases}$$

где C_1, C_2, C_3 — некоторые константы, зависящие от раствора конусов из теоремы 1, и константы ϵ из п. 2⁰ леммы 1, и не зависящие от выбора точки $\sigma(s)$, а также выбора точек u, v .

Рассмотрим множество $[P] \subset \Sigma(u, v)$, являющееся замыканием множества

$$P = \bigcup_{s \in [0, s_1]} p(s).$$

Множество $[P]$ может и не быть связным, в таком случае у нас должны найтись хотя бы две точки $A_1, A_2 \in [P]$, принадлежащие некоторой кривой $\omega_G = \omega_G(\varepsilon)$, $G = G(A_i)$, $A_i = \omega_G(\varepsilon_i)$, $i = 1, 2$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, и при этом $[P] \cap \bigcup_{\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \omega_G(\varepsilon) = \emptyset$.

Для всех таких точек A_1, A_2 мы добавим множество $\bigcup_{\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \omega_G(\varepsilon)$ к множеству

$[P]$. Используя инвариантность метрики Карно — Каратеодори относительно действия группы растяжений и неравенство треугольника, мы получаем, что для любой точки $X \in \bigcup_{\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \omega_G(\varepsilon)$ выполняется $d_{cc}(A_1, X) \leq C_4 d_{cc}(u, v)$, где

константа C_4 не зависит от выбота точек u, v . В результате мы получим связное множество S , удовлетворяющее условиям леммы 2 (вместо точек x_1, x_2 рассматриваем точки u, v , константы α, β зависят только от C_1, C_2, C_3), и поэтому теорема 2 доказана. $\square$

4. ГИПЕРПРОСТРАНСТВО $\Pi_{\mathbb{E}, \beta}^{t+}$

Используя (4), мы получаем

$$(12) \quad w = v \cdot \delta_\varepsilon w' = (x, y, t, z) \cdot (\varepsilon x', \varepsilon y', \varepsilon^2 t', \varepsilon^3 z') \\ = \left(x + \varepsilon x', y + \varepsilon y', t + \varepsilon^2 t' + \frac{\alpha \varepsilon}{2} (xy' - x'y), \right. \\ \left. z + \varepsilon^3 z' + \frac{\beta \varepsilon}{2} (x \varepsilon t' - x't) + \frac{\alpha \beta \varepsilon}{12} (x - x' \varepsilon)(xy' - x'y) \right).$$

Теорема 3. Гиперпространство $\Pi_{\mathbb{E}, \beta}^{t+}$ удовлетворяет условию непрерывно деформируемого внутреннего cc -однородного конуса.

Доказательство. Из (12) следует, что

$$(13) \quad (x, y, 0, z) \cdot (\varepsilon x', \varepsilon y', \varepsilon^2 t', \varepsilon^3 z') \\ = \left(x + \varepsilon x', y + \varepsilon y', \varepsilon^2 t' + \frac{\alpha \varepsilon}{2} (xy' - x'y), z + \varepsilon^3 z' + \frac{\beta \varepsilon^2}{2} x + \frac{\alpha \beta \varepsilon}{12} (x - x' \varepsilon)(xy' - x'y) \right).$$

Рассмотрим множество $S^{1,t}$ точек $\tilde{M}_r = (x_r, y_r, 0, z_{1-r})$, где

$$x_r^2 + y_r^2 + z_{1-r}^2 = 1, \quad x_r = r x_1, \quad y_r = r y_1, \quad x_1^2 + y_1^2 = 1, \quad r \in [0, 1].$$

Для каждой точки из $S^{1,t}$ такой, что $r \in (0, 1]$, рассмотрим кривую

$$\tilde{\tau}_{\tilde{M}_r}^+(\varepsilon) = \tilde{M}_r \cdot (-\varepsilon y_1, \varepsilon x_1, \varepsilon^2, 0) = (r x_1 - \varepsilon y_1, r y_1 + \varepsilon x_1, \frac{\alpha}{2} r \varepsilon + \varepsilon^2, \\ z_{1-r} + \frac{\beta}{2} \varepsilon^2 r x_1 + \frac{\alpha \beta \varepsilon r}{12} (x_1 r + y_1 \varepsilon)), \quad \varepsilon \geq 0.$$

Используя те же аргументы, что и при построении cc -однородного конуса для $\Pi_{\mathbb{H}^1}^{t+}$, мы получаем, что для каждой точки $\tilde{M}_r \in S^{1,t}$ существует cc -однородный конус

$$K_\infty(\tilde{M}_r, X_{\tilde{M}_r}, r_{\tilde{M}_r}) \subset (\Pi_{\mathbb{E}, \beta}^{t+} \setminus \tilde{M}_r)$$

с осью

$$\tilde{\tau}_{\tilde{M}_r}^+ = \tilde{\tau}_{\tilde{M}_r}^+(\varepsilon) = \tilde{M}_r \cdot \delta_\varepsilon(-y_1, x_1, 1, 0), \quad X_{\tilde{M}_r} \in \tau_{\tilde{M}_r}^+, \quad d_{cc}(X_{\tilde{M}_r}, O) = 1,$$

где $r_{\tilde{M}_r}$ не зависит от выбора точки $\tilde{M}_r \in S^{1,t}$. При этом точки $M_{\pm 1}$ с координатами $(0, 0, 0, \pm 1)$, также, как и в случае с началом координат на $\mathbb{H}^1$, являются вершинами неограниченного числа cc -однородных конусов с осями $M_{\pm 1} \cdot (\varepsilon x', \varepsilon y', \varepsilon^2, 0)$, $(x')^2 + (y')^2 \leq 1$.

Далее рассмотрим всевозможные конусы

$$\delta_s K_\infty(\tilde{M}_r, X_{\tilde{M}_r}, r_{\tilde{M}_r}), \quad s \in [0, \infty).$$

Так как точки $\delta_s \tilde{M}_r$, $s \in [0, \infty)$, $r \in [0, 1]$, образуют всю плоскость $t = 0$, то теорема 3 доказана. $\square$

Следствие 2. *Гиперпространство $\Pi_{\mathbb{E}_{\alpha,\beta}}^{t-}$ удовлетворяет условию непрерывно деформируемого внутреннего cc -однородного конуса. Следовательно, гиперпространство $\Pi_{\mathbb{E}_{\alpha,\beta}}^{t+}$ удовлетворяет условию непрерывно деформируемого внешнего cc -однородного конуса.*

Доказательство. Доказательство следствия 2 получается теми же аргументами, что и доказательство следствия 1. $\square$

REFERENCES

- [1] Postnikov M. M., *Lie groups and algebras, Lectures in geometry, Semester V*, «Nauka», Moscow, 1982. MR0685757
- [2] Greshnov A. V., *On uniform and NTA-domains on Carnot groups*, Siberian Math. J., **42**:5 (2001), 851–864. MR1861631
- [3] Greshnov A. V., Tryamkin M. V., *Exact values of constants in the generalized triangle inequality for some $(1, q_2)$ -quasimetrics on canonical Carnot groups*, Mathematical Notes, **98**:3–4 (2015), 694–698. MR3438519
- [4] Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F., *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacian*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2007. MR2363343
- [5] Capogna L., Garofalo N., *Non tangentially accassible domains for Carnot-Carathéodory metrics and a Fatou type theorem*, C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math., **321**:12 (1995), 1565–1570. MR1367808
- [6] Jones P., *Extension theorems for BMO*, Indiana Univ. Math., **29**:1 (1980), 41–66. MR0554817
- [7] Jones P., *Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces*, Acta Math., **147** (1981), 71–88. MR0631089
- [8] Greshnov, A. V. *On the existence of domains that satisfy inner and outer spiral conditions*, Mat. Tr. **5**:2 (2002), 138–154 (in Russian). MR1944068
- [9] Capogna L., Garofalo N., *Boundary behavior of non-negative solutions of subelliptic equations in NTA-domains for Carnot-Carathéodory metrics*, J. Fourier Anal. Appl., **4**:4–5 (1998), 403–432. MR1658616
- [10] Monti R., Morbidelli D., *Regular domains in homogeneous groups*, TAMS, **357**:8 (2005), 2975–3011. MR2135732

ALEXANDR VALER'YEVICH GRESHNOV
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 1, PIROGOVA STR.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA,
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 4, KOPTYUGA AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: greshnov@math.nsc.ru