Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. P. Golubyatnikov, Automorphisms of small graphs with intersection array $\{nm - 1, nm - n + m - 1, n - m + 1; 1, 1, nm - n + m - 1\}$, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1245–1253

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.086>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.80.97.219

April 26, 2023, 13:04:00

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1245–1253 (2019)

УДК 519.17+512.54

DOI 10.33048/semi.2019.16.086

MSC 05C25

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ НЕБОЛЬШИХ ДИСТАНЦИОННО
РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ С МАССИВАМИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{nm - 1, nm - n + m - 1, n - m + 1; 1, 1, nm - n + m - 1\}$

М.П. ГОЛУБЯТНИКОВ

ABSTRACT. Let Γ be a distance regular graph of diameter 3 for which the graph Γ_3 is a pseudo-network.

Previously, A.A. Makhnev, M.P. Golubyatnikov, Wenbin Guo found infinite series of admissible arrays of intersections of such graphs. In the case of $c_2 = 1$, we have the two-parameter series $\{nm - 1, nm - n + m - 1, n - m + 1; 1, 1, nm - n + m - 1\}$.

Possible automorphisms of such graphs were found by A.A. Makhnev, M.P. Golubyatnikov.

In this paper the author found automorphism groups of distance regular graphs with intersection arrays $\{90, 84, 7; 1, 1, 84\}$ ($n = 13, m = 7$), $\{220, 216, 5; 1, 1, 216\}$ ($n = 17, m = 13$), $\{272, 264, 9; 1, 1, 264\}$ ($n = 21, m = 13$). In particular, this graphs are not arc transitive.

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a . Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины a* и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован.

GOLUBYATNIKOV, M.P., AUTOMORPHISMS OF SMALL GRAPHS WITH INTERSECTION ARRAY $\{nm - 1, nm - n + m - 1, n - m + 1; 1, 1, nm - n + m - 1\}$.

© 2019 Голубятников М.П.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10067).

Поступила 27 августа 2019 г., опубликована 17 сентября 2019 г.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i (см. [1]). Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u).

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется α -частичной геометрией порядка (s, t) , если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a , не лежащей на прямой L , найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). Если $\alpha = t + 1$, то геометрия называется двойственной 2-схемой.

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = (s - 1) + (\alpha - 1)t$, $\mu = \alpha(t + 1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры, называется псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(s, t)$. В таких графах граница Хофмана для клик равна $s + 1$ и каждая вершина вне $(s + 1)$ -клики L смежна с α вершинами из L .

В работе [2] изучены массивы пересечений дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для сети $pG_t(l, t)$. В [2, теорема 2] найдены бесконечные серии допустимых массивов пересечений таких графов. В случае $c_2 = 1$ имеем двупараметрическую серию $\{nt - 1, nt - n + t - 1, n - t + 1; 1, 1, nt - n + t - 1\}$, $t < n$. Так как окрестность любой вершины является объединением изолированных $(a_1 + 1)$ -клик, то $n - t$ делит $nt - 1$ и $n - t + 1$ делит $(nt - 1)n^2t^2$.

В [3, теорема 2] найдены простые порядки автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{nt - 1, nt - n + t - 1, n - t + 1; 1, 1, nt - n + t - 1\}$. С помощью этого результата в работе найдены автоморфизмы дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{90, 84, 7; 1, 1, 84\}$ ($n = 13, t = 7$), $\{220, 216, 5; 1, 1, 216\}$ ($n = 17, t = 13$) и $\{272, 264, 9; 1, 1, 264\}$ ($n = 21, t = 13$).

Теорема 1. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{90, 84, 7; 1, 1, 84\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 7, 13\}$, 13 делит $\alpha_0(g)$ и $\alpha_3(g)$, и верно одно из утверждений:

(1) Ω — пустой граф, $p = 13$ или $p = 7$, $\alpha_3(g) = 91pl$ и $\alpha_1(g) = 7pl + 20ps + 49 \cdot 13 \cdot 103$;

(2) Ω является 91-кокликой, расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из Ω равно 3 и $p = 2$.

(3) Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c , если Δ — связная компонента графа Ω , содержащая вершину a , то либо $p = 2$, либо диаметр Δ равен 3 и $p = 7$ или $p = 13$.

Следствие 1. Пусть группа $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ с массивом пересечений $\{90, 84, 7; 1, 1, 84\}$. Тогда G — разрешимая $\{2, 7, 13\}$ -группа и Γ не является реберно симметричным графом.

Теорема 2. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{220, 216, 5; 1, 1, 216\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g – элемент простого порядка p из G и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 7, 13, 17\}$, 17 делит $\alpha_0(g)$ и $\alpha_3(g)$, и верно одно из утверждений:

(1) Ω – пустой граф, $p = 17$ или $p = 13$, $\alpha_3(g) = 221pl$ и $\alpha_1(g) = 13lp + 30ps + 169 \cdot 17 \cdot 237$;

(2) Ω является 221-кликкой, расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из Ω равно 3 и $p = 2$.

(3) Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c , если Δ – связная компонента графа Ω , содержащая вершину a , то либо $p = 2$, либо диаметр Δ равен 3 и $p \in \{2, 3, 7\}$.

Следствие 2. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{220, 216, 5; 1, 1, 216\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$. Тогда $|G|$ не делится на 13^2 и на 17^2 . В частности, Γ не является вершинно симметричным графом.

Теорема 3. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{272, 264, 9; 1, 1, 264\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g – элемент простого порядка p из G и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 7, 11, 13\}$, 21 делит $\alpha_0(g)$ и $\alpha_3(g)$, и верно одно из утверждений:

(1) Ω – пустой граф, $p \in \{3, 7, 13\}$, $\alpha_3(g) = 273pl$ и $\alpha_1(g) = 13pl + 34ps + 13^2 \cdot 21 \cdot 293$;

(2) Ω является 7-кликкой, $p = 2$, $\alpha_3(g) = 21(26l + 16)$ и $\alpha_1(g) = 26l + 34r + 24$;

(3) Ω является 273-кликкой, расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из Ω равно 3 и $p = 2$.

(4) Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c , если Δ – связная компонента графа Ω , содержащая вершину a , то либо $p = 2$, либо диаметр Δ равен 3 и $p = 3$.

Следствие 3. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{272, 264, 9; 1, 1, 264\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$. Тогда $|G|$ не делится на 17. В частности, Γ не является реберно симметричным графом.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе приведены некоторые вспомогательные результаты, используемые в доказательстве теорем 1–3.

Предложение 1. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{nt - 1, nt - n + t - 1, n - t + 1; 1, 1, nt - n + t - 1\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g – элемент простого порядка p из G и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \pi(mn) \cup \pi((m - 1)(n + 1)) \cup \pi(m^2 - mn + t + n^2 - n - 2)$, n делит $(m - 1)\alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, $2(m - 1)\alpha_0(g)$ и $2\alpha_3(g)$, и верно одно из утверждений:

(1) Ω – пустой граф, p делит mn , $\alpha_3(g) = mnpl$ и $\alpha_1(g) = mpl + m^2n(mn + n - 1) + (m + n)ps$;

(2) Ω является t -кликкой, $t > 1$, p делит $(n + 1)(m - 1)$, $(mn - 1)(n - t + 1)$ и $n - t + 1 - t$, $\alpha_3(g) = (n - t + 1)(t + mn) + mnpl$, $2(m - 1)t = sn$ и $\alpha_1(g) = -(mt + s) + (t + mn + t + mpl) + (m + n)r$;

(3) Ω является l -кликкой, $l > 1$, расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из Ω равно 3, $p = 2$, числа m, n нечетны и $l = mn$.

(4) Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c , если Δ – связная компонента графа Ω , содержащая вершину a , то либо $p = 2$, либо

(i) диаметр Δ равен 3 и p делит $p_{33}^3 = m^2 - mn + m + n^2 - n - 2$, либо
 (ii) диаметр Δ равен 2, Δ — сильно регулярный граф с $\mu = 1$, p делит $n - m + 1$, mn , $|\Omega|$, $|\Delta|$, окрестность любой вершины в графе Δ состоит из r изолированных s -клик, $s > 1$, $s + 1$ делит $r(r - 1)^2$, p делит $s + 1$ и $r - 1$.

Доказательство. Это теорема из [3]. $\square$

Лемма 1.1. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) и вторым собственным значением r . Если g — автоморфизм Γ и $\Delta = \text{Fix}(g)$, то $|\Delta| \leq v \cdot \max\{\lambda, \mu\}/(k - r)$.

Доказательство. Это теорема 3.2 из [4]. $\square$

В этом разделе Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{nt - 1, nt - n + m - 1, n - m + 1; 1, 1, nt - n + m - 1\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \text{Fix}(g)$.

Лемма 1.2. Числа пересечений графа Γ равны

- (1) $p_{11}^1 = n - m - 1$, $p_{12}^1 = (m - 1)(n + 1)$, $p_{22}^1 = (m - 1)(n + 1)(m - n + mn - 3)$,
 $p_{23}^1 = (m - 1)(n + 1)(n - m)$, $p_{33}^1 = (n - m)(n - m + 1)$;
- (2) $p_{11}^2 = 1$, $p_{12}^2 = m - n + mn - 3$, $p_{13}^2 = n - m + 1$, $p_{22}^2 = m^2n^2 + 2m^2n + m^2 - 2mn^2 - 6mn - 5m + n^2 + 5n + 5$, $p_{23}^2 = (n - m + 1)(m - n + mn - 2)$,
 $p_{33}^2 = (n - m)(n - m + 1)$;
- (3) $p_{12}^3 = (m - 1)(n + 1)$, $p_{13}^3 = n - m$, $p_{22}^3 = (m - 1)(n + 1)(m - n + mn - 2)$,
 $p_{23}^3 = (n - m)(m - 1)(n + 1)$, $p_{33}^3 = m^2 - mn + m + n^2 - n - 2$.

Доказательство. Прямые вычисления. $\square$

Лемма 1.3. Граф Γ имеет спектр $\theta_0 = nt - 1$ кратности 1, $\theta_1 = n - 1$ кратности $m^2(mn - 1)(n + 1)/(m + n)$, $\theta_2 = -1$ кратности $(mn - 1)(n - m + 1)$, $\theta_3 = -(m + 1)$ кратности $n^2(mn - 1)(m - 1)/(m + n)$.

Доказательство. Результат получен с помощью компьютерного упрощения формул из [1, лемма 2.2.6]. $\square$

Лемма 1.4 (лемма 2.3 из [3]). Пусть $G = \text{Aut}(\Gamma)$, $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности $m^2(mn - 1)(n + 1)/(m + n)$, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности $(mn - 1)(n - m + 1)$. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l , взаимно простого с $|g|$, $\chi_1(g) = ((nt + m - 1)\alpha_0(g) + n\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/(m + n)n - m^2/(m + n)$. $\chi_2(g) = ((n - m + 1)\alpha_0(g) - \alpha_3(g))/(mn) - (m - n - 1)$. $\chi_1(g) - m^2(mn - 1)(n + 1)/(m + n)$ и $\chi_2(g) - (mn - 1)(n - m + 1)$ делятся на p .

Лемма 1.5 (лемма 2.4 из [3]). Выполняются следующие утверждения:

- (1) n делит $(m - 1)\alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, $2(m - 1)\alpha_0(g)$ и $2\alpha_3(g)$;
- (2) если p делит mn , $m + n - 1$ и $\alpha_0(g)$, то p^2 делит $\alpha_3(g)$;
- (3) если p делит $(n + 1, m)$, то для $ny = (m - 1)\alpha_0(g) - \alpha_3(g)$ число y делится на p .

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

В этом разделе Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{90, 84, 7; 1, 1, 84\}$. $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \text{Fix}(g)$. По предложению 1 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 7, 13\}$.

Пусть Ω – пустой граф. Тогда p делит $13 \cdot 7$, по предложению 1 имеем $\alpha_3(g) = 91pl$ и $\alpha_1(g) = 7pl + 20ps + 49 \cdot 13 \cdot 103$

Пусть Ω является t -кликкой, $1 < t \leq 7$. По предложению 1 число p делит $2^2 \cdot 3 \cdot 7$, $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ и $7 - t$, и $12t = 13s$, противоречие.

Пусть Ω является l -коккликой, $l > 1$. Тогда расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из Ω равно 3, $p = 2$ и $l = 91$.

Пусть Ω содержит геодезический 2-путь и Δ – связная компонента графа Ω . Если диаметр Δ равен 3, то p делит $p_{33}^3 = m^2 - mn + m + n^2 - n - 2 = 7 \cdot 13$.

Если диаметр Δ равен 2, то p делит $n - m + 1 = 7$ и $mn = 7 \cdot 13$, отсюда $p = 7$. Далее, Δ – сильно регулярный граф с $\mu = 1$, $p = 7$ делит $|\Omega|$ и $|\Delta|$, окрестность любой вершины в графе Δ состоит из r изолированных s -клик, $s > 1$, $s + 1$ делит $r(r - 1)^2$, 7 делит $s + 1$ и $r - 1$. По лемме 1.1 имеем $|\Delta| \leq 1956$. $|\Delta| = 1 + rs + r(r - 1)s^2$, $s \geq 6$ и $r \geq 8$, далее $|\Delta| \geq 2065$, противоречие. Теорема 1 доказана.

Перейдем к доказательству следствия 1. Пусть группа $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ . Тогда для вершины $a \in \Gamma$ имеем $|G : G_a| = 7^2 \cdot 13^2$. Ввиду [5, таблица 1] группа G разрешима. Далее, G является 3'-группой и граф Γ не может быть реберно симметричным.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

В этом разделе Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{220, 216, 5; 1, 1, 216\}$. $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g – элемент простого порядка p из G и $\Omega = \text{Fix}(g)$. По предложению 1 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 7, 11, 13, 17\}$.

Пусть Ω – пустой граф. Тогда p делит $13 \cdot 17$ и по предложению 1 имеем $\alpha_3(g) = 221pl$ и $\alpha_1(g) = 13lp + 30ps + 169 \cdot 17 \cdot 237$.

Пусть Ω является t -кликкой, $1 < t \leq 5$. По предложению 1 число p делит $2^3 \cdot 3^3$, $2^2 \cdot 5^2 \cdot 11$, $5 - t$ и $24t = 17s$, противоречие.

Пусть Ω является l -коккликой, $l > 1$. Тогда расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из Ω равно 3, $p = 2$ и $l = 221$.

Пусть Ω содержит геодезический 2-путь и Δ – связная компонента графа Ω тогда, если диаметр Δ равен 3, то p делит $p_{33}^3 = m^2 - mn + m + n^2 - n - 2 = 3 \cdot 7 \cdot 11$.

Если диаметр Δ равен 2, то p делит $n - m + 1 = 5$ и $mn = 13 \cdot 17$, противоречие. Теорема 2 доказана.

Пусть группа $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ . Тогда для вершины $a \in \Gamma$ имеем $|G : G_a| = 13^2 \cdot 17^2$, $|G|$ не делится на 13^3 и на 17^3 . Далее, $\chi_1(1) = 6 \cdot 22 \cdot 13^2$ и $\chi_2(1) = 5 \cdot 220$.

Если $g \in G$ и $|g| = 17^2$, то $\chi_2(1) - \chi_2(g^{17}) = 5 \cdot 220 + \alpha_3(g))/(17 \cdot 13) - 5$ делится на 17^2 , противоречие. Если $g \in G$ и $|g| = 13^2$, то $\chi_2(1) - \chi_2(g^{13}) = 5 \cdot 220 + \alpha_3(g))/(17 \cdot 13) - 5$ делится на 13^2 , противоречие. Значит, G не содержит элементов порядка 13^2 и 17^2 .

Пусть G делится на 17^2 . Если $g \in G$ и $|g| = 17$, то $\chi_2(1) - \chi_2(g) = 5 \cdot 219 + \alpha_3(g))/(17 \cdot 13)$ делится на 17, причем $\alpha_3(g)$ делится на 17^2 , противоречие.

Пусть G делится на 13^2 . Если $g \in G$ и $|g| = 13$, то $\chi_2(1) - \chi_2(g) = 5 \cdot 219 + \alpha_3(g))/(17 \cdot 13)$ делится на 13, причем $\alpha_3(g)$ делится на 13^2 , противоречие.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

В этом разделе Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{272, 264, 9; 1, 1, 264\}$. $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \text{Fix}(g)$. По лемме 1 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 7, 11, 13, 109\}$.

Докажем теорему 3.

Пусть Ω — пустой граф. Тогда p делит $3 \cdot 7 \cdot 13$ и по лемме 1 имеем $\alpha_3(g) = 273pl$ и $\alpha_1(g) = 13pl + 34ps + 13^2 21293$.

Пусть Ω является t -кликкой, $1 < t \leq 9$. По лемме 1 число p делит $2^3 \cdot 3 \cdot 11$, $2^4 \cdot 3^2 \cdot 17$ и $9 - t$, причем $24t = 21s$. Отсюда $t = 7$, $s = 8$ и $p = 2$.

Пусть Ω является l -коккликкой, $l > 1$. Тогда расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из Ω равно 3, $p = 2$ и $l = 273$.

Пусть Ω содержит геодезический 2-путь и Δ связная компонента графа Ω . Если диаметр Δ равен 3, то p делит $p_{33}^3 = m^2 - mn + m + n^2 - n - 2 = 3 \cdot 109$.

Если диаметр Δ равен 2, то p делит $n - m + 1 = 3^2$ и $mn = 3 \cdot 7 \cdot 13$, отсюда $p = 3$. По лемме 1.1 имеем $|\Delta| \leq 11153$. Далее, Δ — сильно регулярный граф с $\mu = 1$, $p = 3$ делит $|\Omega|$ и $|\Delta|$, окрестность любой вершины в графе Δ состоит из r изолированных s -клик, $s > 1$, $s + 1$ делит $r(r - 1)^2$, 3 делит $s + 1$ и $r - 1$. Так как $|\Delta| = 1 + rs + r(r - 1)s^2$, то в случае $s = 5$ получим $25r^2 - 20r + 1 \leq 11153$ и $r \leq 21$. По [3, лемма 1.2] имеем $r = 5t(t + c) + 1$ и $2t + c$ делит $R(5)$, где $R(s) = cs(s - 4)(s^2 - 2s - 4)$. Отсюда $r = 21$, $t = 1$, $c = 3$, поэтому $k(\Delta) = 105$, противоречие с тем, что 3 не делит $272 - 105$.

В случае $s = 8$ получим $64r^2 - 56r + 1 \leq 11153$ и $r \leq 13$. По [3, лемма 1.2] получим $r = 2t(t + c) + 1$ и $2t + c$ делит $168c$. Если $r = 13$, то $t = 1$, $c = 5$, Δ имеет параметры $(9569, 104, 7, 1)$ и $36 + 412$ не является квадратом, противоречие.

Для доказательства теоремы 3 осталось установить, что $|G|$ не делится на 109.

Лемма 4.1. Число $|G|$ не делится на 109.

Доказательство. Пусть f — элемент порядка 109 из G , a — вершина из $\text{Fix}(f)$. Тогда $[a]$ является объединением 34 изолированных 8-клик. Из действия f на $[a]$ следует, что $[a]$ содержится в $\text{Fix}(f)$. Теперь по связности Γ имеем $\Gamma \subseteq \text{Fix}(f)$, противоречие. $\square$

До конца параграфа будем предполагать, что неразрешимая группа $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ , $\bar{T}$ — цокль группы $\bar{G} = G/S(G)$ и L — компонента из $\bar{T}$. Ввиду теоремы 3 и леммы 4.1 порядок группы G делит $2^{\beta} 3^{\gamma} 7^2 13^2$, $\gamma \geq 2$.

Лемма 4.2. Выполняется одно из утверждений:

- (1) либо $L \cong L_2(13)$ и L_a — подгруппа индекса 91 или 273, либо $L \cong L_3(3)$ и $L_a \cong E_9.GL_2(3)$ — подгруппа индекса 13;
- (2) либо $L \cong L_2(7)$ и L_a — подгруппа индекса 7 или 21, либо $L \cong L_2(8)$ и L_a — подгруппа индекса 63, либо $L \cong U_3(3)$ и L_a — подгруппа индекса 63.

Доказательство. Если 13 делит $|\bar{T}|$, то по [5, таблица 1] в $\bar{T}$ существует компонента L , изоморфная одной из следующих групп: $L_2(13)$, $L_2(27)$, $L_3(3)$, $G_2(3)$, ${}^3D_4(2)$. Далее, $[L : L_a]$ делит $13^2 21^2$, поэтому либо $L \cong L_2(13)$ и L_a — подгруппа индекса 91 или 273, либо $L \cong L_3(3)$ и $L_a \cong E_9.GL_2(3)$ — подгруппа индекса

13, либо $L \cong^3 D_4(2)$ и L_a — подгруппа индекса $9 \cdot 91$. В последнем случае 7 делит $|L_a|$, противоречие.

Если 11 делит $|\bar{T}|$, то по [5, таблица 1] $|\bar{T}|$ делится на 5, противоречие.

Если 11 и 13 не делят $|\bar{T}|$, то по [5, таблица 1] в $\bar{T}$ существует компонента L , изоморфная одной из следующих групп: $L_2(7)$, $L_2(8)$, $U_3(3)$. Далее, $|L : L_a|$ делит $13^2 21^2$, поэтому либо $L \cong L_2(7)$ и L_a — подгруппа индекса 7 или 21, либо $L \cong L_2(8)$ и L_a — подгруппа индекса 63, либо $L \cong U_3(3)$ и L_a — подгруппа индекса 63. $\square$

Подробно рассмотрим случаи, когда $|L : L_a|$ делится на 3 и компонента L не изоморфна $L_2(7)$.

Лемма 4.3. Пусть $\bar{T}$ содержит компоненту L , изоморфную $L_2(13)$, и $|L : L_a| = 273$. Тогда выполняется одно из утверждений:

- (1) $T = L \times M$, $M \cong L_2(13)$;
- (2) $T = L \times M \times N$, $M \cong L_3(3)$, $N \cong L_2(7)$ и N_a — подгруппа индекса 21;
- (3) $\bar{T} = L \times M \times N$, $M \cong L_3(3)$, $N \cong L_2(7)$, N_a — подгруппа индекса 7 и $|S(G) : S(G)_a| = 3$;
- (4) $\bar{T} = L \times M$, $M \cong L_3(3)$, M_a — подгруппа индекса 13 и $|S(G) : S(G)_a| = 21$;
- (5) $T = L \times M \times N$, $M \cong L_2(7)$, M_a — подгруппа индекса 21 и $N \cong Z_{13}$;
- (6) $\bar{T} = L \times M$, $M \cong L_2(7)$, M_a — подгруппа индекса 7, и $|S(G) : S(G)_a| = 39$;
- (7) $\bar{T} = L$ и $|S(G) : S(G)_a| = 273$.

Доказательство. Пусть $\bar{T}$ содержит компоненту L , изоморфную $L_2(13)$ и $|L : L_a| = 273$. Тогда либо $\bar{T}$ содержит еще одну компоненту M , изоморфную $L_2(13)$, либо $\bar{T}$ содержит компоненту M , изоморфную $L_3(3)$ и M_a — подгруппа индекса 13, либо $\bar{T}$ содержит компоненту M , изоморфную $L_2(7)$ и L_a — подгруппа индекса 7 или 21, либо $\bar{T}$ не содержит других компонент.

В первом случае $S(G) = S(G)_a = 1$, $T = L \times M$ и выполняется утверждение (1).

Пусть $\bar{T}$ содержит компоненту M , изоморфную $L_3(3)$, и компоненту N , изоморфную $L_2(7)$. Если N_a — подгруппа индекса 21 из N , то $S(G) = S(G)_a = 1$, $T = L \times M \times N$ и выполняется утверждение (2). Если N_a — подгруппа индекса 7 из N , то $|S(G) : S(G)_a| = 3$ и выполняется утверждение (3).

Пусть $\bar{T}$ содержит компоненту M , изоморфную $L_3(3)$, и не содержит компонент, изоморфных $L_2(7)$. Тогда выполняется утверждение (4).

Пусть $\bar{T}$ содержит компоненту M , изоморфную $L_2(7)$, и не содержит компонент, изоморфных $L_3(3)$. Тогда выполняется утверждение (5) или (6).

Если $\bar{T}$ не содержит компонент, отличных от L , то выполняется утверждение (7). $\square$

Лемма 4.4. Пусть $\bar{T}$ не содержит компонент, изоморфных $L_2(13)$, но содержит компоненту L , изоморфную $L_2(8)$, и $|L : L_a| = 63$. Тогда выполняется одно из утверждений:

- (1) $\bar{T}$ содержит компоненту M , изоморфную $L_2(7)$, $|L : L_a| = 7$ и либо
 - (i) $T = L \times M \times N_1 \times N_2$, $N_1 \cong N_2 \cong L_3(3)$, либо
 - (ii) $T = L \times M \times N_1 \times N_2$, $N_1 \cong L_3(3)$, $N_2 \cong Z_{13}$, либо
 - (iii) $T = L \times M$, $|M| = 169$, либо
- (2) $\bar{T}$ не содержит компонент, изоморфных $L_2(7)$, и либо
 - (i) $T = L \times M \times N_1 \times N_2$, $M \cong Z_7$, $N_1 \cong N_2 \cong L_3(3)$, либо
 - (ii) $T = L \times M \times N_1$, $|M| = 91$ и $N_1 \cong L_3(3)$, либо

(iii) $T = L \times M$, $|M| = 169 \cdot 7$.

Доказательство. Пусть $\bar{T}$ содержит компоненту L , изоморфную $L_2(8)$ и $|L : L_a| = 63$.

Допустим, что $\bar{T}$ содержит компоненту M , изоморфную $L_2(7)$ и $|L : L_a| = 7$. Тогда либо $\bar{T}$ содержит две компоненты N_1, N_2 , изоморфных $L_3(3)$, либо $\bar{T}$ содержит компоненту N , изоморфную $L_3(3)$ и $|S(G) : S(G)_a| = 13$, либо $|S(G) : S(G)_a| = 169$. В этом случае выполняется одно из утверждений ($i - iii$) из (1).

Допустим, что $\bar{T}$ не содержит компонент, изоморфных $L_2(7)$. Тогда либо $\bar{T}$ содержит две компоненты N_1, N_2 , изоморфных $L_3(3)$ и $|S(G) : S(G)_a| = 7$, либо $\bar{T}$ содержит компоненту N , изоморфную $L_3(3)$ и $|S(G) : S(G)_a| = 91$, либо $|S(G) : S(G)_a| = 169 \cdot 7$. В этом случае выполняется одно из утверждений ($i - iii$) из (2). $\square$

Лемма 4.5. Пусть $\bar{T}$ не содержит компонент, изоморфных $L_2(13)$ и $L_2(8)$, но содержит компоненту L , изоморфную $U_3(3)$, и $|L : L_a| = 63$. Тогда выполняется одно из утверждений:

- (1) $\bar{T}$ содержит компоненту M , изоморфную $L_2(7)$, $|L : L_a| = 7$ и либо
 - (i) $T = L \times M \times N_1 \times N_2$, $N_1 \cong N_2 \cong L_3(3)$, либо
 - (ii) $T = L \times M \times N_1 \times N_2$, $N_1 \cong L_3(3)$, $N_2 \cong Z_{13}$, либо
 - (iii) $T = L \times M$, $|M| = 169$, либо
- (2) $\bar{T}$ не содержит компонент, изоморфных $L_2(7)$, и либо
 - (i) $T = L \times M \times N_1 \times N_2$, $M \cong Z_7$, $N_1 \cong N_2 \cong L_3(3)$, либо
 - (ii) $T = L \times M \times N_1$, $|M| = 91$ и $N_1 \cong L_3(3)$, либо
 - (iii) $T = L \times M$, $|M| = 169 \cdot 7$.

Доказательство. Пусть $\bar{T}$ содержит компоненту L , изоморфную $U_3(3)$ и $|L : L_a| = 63$.

Допустим, что $\bar{T}$ содержит компоненту M , изоморфную $L_2(7)$ и $|L : L_a| = 7$. Тогда либо $\bar{T}$ содержит две компоненты N_1, N_2 , изоморфных $L_3(3)$, либо $\bar{T}$ содержит компоненту N , изоморфную $L_3(3)$ и $|S(G) : S(G)_a| = 13$, либо $|S(G) : S(G)_a| = 169$. В этом случае выполняется одно из утверждений ($i - iii$) из (1).

Допустим, что $\bar{T}$ не содержит компонент, изоморфных $L_2(7)$. Тогда либо $\bar{T}$ содержит две компоненты N_1, N_2 , изоморфных $L_3(3)$ и $|S(G) : S(G)_a| = 7$, либо $\bar{T}$ содержит компоненту N , изоморфную $L_3(3)$ и $|S(G) : S(G)_a| = 91$, либо $|S(G) : S(G)_a| = 169 \cdot 7$. В этом случае выполняется одно из утверждений ($i - iii$) из (2). $\square$

REFERENCES

- [1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1989. Zbl 0747.05073
- [2] A.A. Makhnev, M.P. Golubyatnikov, Wenbin Guo, *Inverse problems in distance-regular graphs: nets*, Comm. in Math. and Statistic, **7**:1 (2019), 69–83. Zbl 1414.05142
- [3] A.A. Makhnev, M.P. Golubyatnikov, *On automorphisms of distance-regular graph with intersection array $\{nm - 1, nm - n + m - 1, n - m + 1; 1, 1, nm - n + m - 1\}$* , Algebra, Number Theory and Math. Modelling of Dynamic Systems, Abstracts, Nalchik, 2019, 86.
- [4] M. Behbahani, C. Lam, *Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms*, Discrete Math., **311**:2–3 (2011), 132–144. Zbl 1225.05248

- [5] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Sibirian Electr. Math. Reports, **6** (2009), 1–12. Zbl 1289.20021

MICHAIL PETROVICH GOLUBYATHIKOV
 KRASOVSKII INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,
 16, S.KOVALEVSKAYA STR.
 YEKATERINBURG, 620990, RUSSIA.
E-mail address: mike_ru1@mail.ru