Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. S. Arkashov, The principle of invariance in the Donsker form to the partial sum processes of finite order moving averages, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1276–1288

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.088>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.205.225.156

April 26, 2023, 16:09:56

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1276–1288 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.088

УДК 519.214

MSC 60F17

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ В ФОРМЕ ДОНСКЕРА ДЛЯ
ПРОЦЕССОВ ЧАСТНЫХ СУММ СКОЛЬЗЯЩИХ СРЕДНИХ
КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Н.С. АРКАШОВ

ABSTRACT. We consider the process of partial sums of moving averages of finite order with a regular varying memory function, constructed from a stationary sequence, variance of the sum of which is a regularly varying function. We study the Gaussian approximation of this process of partial sums with the aid of a certain class of Gaussian processes, and obtain sufficient conditions for the C -convergence in the invariance principle in the Donsker form.

Keywords: invariance principle, fractal Brownian motion, moving average, Gaussian process, memory function, regular varying function

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В настоящей работе получены достаточные условия для C -сходимости в метрическом пространстве $D[0, 1]$ нормированного процесса частных сумм скользящих средних конечного порядка к гауссовскому процессу, построенному по фрактальному броуновскому движению. Мы будем использовать конструкции, а также придерживаться схемы изложения работы [1]. Существенным недостатком полученных в [1] оценок близости процессов в принципе инвариантности в форме Штрассена являются «локальные условия» на каждый элемент неслучайной последовательности, формирующей двухсторонние скользящие средние. Отметим, что при статистическом анализе данных в большинстве

ARKASHOV, N.S., THE PRINCIPLE OF INVARIANCE IN THE DONSKER FORM TO THE PARTIAL SUM PROCESSES OF FINITE ORDER MOVING AVERAGES.

© 2019 Аркашов Н.С.

Поступила 16 апреля 2019 г., опубликована 20 сентября 2019 г.

случаев восстановить информацию о поведении этой неслучайной последовательности не представляется возможным. Указанный недостаток послужил мотивацией для написания этой заметки, в которой упомянутые «локальные условия» заменены на «интегральное условие» правильного поведения дисперсии процесса частных сумм двухсторонних скользящих средних. Заметим, что из предположения о выполнении этого «интегрального условия» можно получить оценки для масштабного параметра и параметра Хёрста (см. [2]).

Пусть $\{X_j; j \in \mathbb{Z}\}$ — стационарная в узком смысле последовательность случайных величин, имеющая представление в виде двухстороннего скользящего среднего:

$$(1) \quad X_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k} \xi_k,$$

где $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевыми средними и единичными дисперсиями, $\{a_k; k \in \mathbb{Z}\}$ — неслучайная, квадратично суммируемая последовательность действительных чисел.

Введем обозначение: $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ при $n \geq 1$, $S_0 = 0$. В дальнейшем будем считать, что $\mathbf{D}S_n$ является правильно меняющейся функцией:

$$(2) \quad \mathbf{D}S_n = h^2(n)n^{2H},$$

где h — медленно меняющаяся на $+\infty$ функция (см., например, [3]) и $H \in (0, 1)$.

Через $\mathcal{R}_\nu$ обозначим класс правильно меняющихся функций с показателем $\nu \geq 0$, определенных на промежутке $[0, +\infty)$, отличных от констант, имеющих следующее представление: $l(t)t^\nu$, где $l(t)$ — медленно меняющаяся на $+\infty$, неотрицательная и неубывающая функция на $[0, +\infty)$ (считаем, что $0^0 = 1$).

Построим последовательность скользящего среднего конечного порядка

$$(3) \quad v_0 = 0, \quad v_k = \sum_{i=0}^{k-1} X_{k-i} \Delta M(i), \quad k \geq 1,$$

где $M \in \mathcal{R}_\nu$ и $\Delta M(i) = M(i+1) - M(i)$. Следуя [4], [5], функцию M будем называть *функцией памяти*. Определим процесс частных сумм по последовательности из (3):

$$(4) \quad R_n = \sum_{k=0}^n v_k, \quad n = 0, 1, \dots$$

Заметим, что возможный «физический смысл» случайного блуждания $\{R_n\}$ представлен в работе [6].

Через $B_H(t)$ обозначим фрактальное броуновское движение, т. е. центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$(5) \quad R(t, s) = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}),$$

где $H \in (0, 1)$.

Прежде, чем сформулировать основной результат работы, приведем утверждение, лежащее в основе его доказательства.

Предложение 1. Пусть выполняется условие (2) и $\mathbf{E}|\xi_1|^\alpha < \infty$ для некоторого α , такого что $\alpha \geq 2$ и $\alpha H > 1$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ имеет место C -сходимость в $D[0, 1]$ процессов $S_{[nt]}/\sqrt{\mathbf{D}S_n}$ к $B_H(t)$.

Напомним, что под C -сходимостью в $D[0, 1]$ понимается слабая сходимость распределений измеримых (в топологии А. В. Скорохода) функционалов на $D[0, 1]$, непрерывных в равномерной топологии в точках пространства $C[0, 1]$ (см., например, [7]).

Отметим, что в [8] была установлена указанная C -сходимость при более жестких по сравнению с предложением 1 моментных ограничениях. Отметим также, что в случае $H > 1/2$ утверждение предложения 1 было доказано в [9, теорема 2].

Определим гауссовский процесс:

$$Z_{\nu, H}(t) = \nu \int_0^t B_H(t-s) s^{\nu-1} ds.$$

Введем обозначение

$$r_n(t) = \frac{R_{[nt]}}{h(n)n^H M(n)}, \quad t \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Теорема 1. Пусть выполняется условие предложения 1. Тогда

- 1) если $M \in \mathcal{R}_\nu$, $\nu > 0$, то при $n \rightarrow \infty$ имеет место C -сходимость в $D[0, 1]$ процессов $r_n(t)$ к $Z_{\nu, H}(t)$;
- 2) если $M \in \mathcal{R}_0$, то при $n \rightarrow \infty$ имеет место C -сходимость в $D[0, 1]$ процессов $r_n(t)$ к $\left(1 - \frac{M(0)}{M(+\infty)}\right) B_H(t)$.

Из теоремы 1 вытекает следствие 1.

Следствие 1. Пусть выполняется условие (2). Тогда при $n \rightarrow \infty$

- 1) в случае $M \in \mathcal{R}_\nu$, $\nu > 0$ имеет место соотношение:

$$\mathbf{D}R_n \sim \mathbf{D}Z_{\nu, H}(1) M^2(n) h^2(n) n^{2H};$$

- 2) в случае $M \in \mathcal{R}_0$ имеет место соотношение:

$$\mathbf{D}R_n \sim \left(1 - \frac{M(0)}{M(+\infty)}\right)^2 M^2(n) h^2(n) n^{2H}.$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЙ.

Доказательство предложения 1 разобьем на леммы 2—9. Заметим, что доказательство этого предложения повторяет схему доказательства теоремы 2 в [10]. Введем обозначения:

$$s_n(t) = S_{[nt]}/\sqrt{\mathbf{D}S_n}, \quad t \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$A_{k,n}(t) = (n^H h(n))^{-1} \sum_{j=-k+1}^{-k+[nt]} a_j.$$

Используя приведенные обозначения, сразу получаем (см. [9])

$$s_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_{k,n}(t) \xi_k.$$

Лемма 1. Для любых $1 \geq t \geq \tau \geq 0$ выполняется равенство

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (A_{k,n}(t) - A_{k,n}(\tau))^2 = \frac{([nt] - [n\tau])^{2H} h^2([nt] - [n\tau])}{n^{2H} h^2(n)}.$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (A_{k,n}(t) - A_{k,n}(\tau))^2 = n^{-2H} h^{-2}(n) \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=-i+1}^{-i+[nt]-[n\tau]} a_j \right)^2 = \frac{\mathbf{D}S_{[nt]-[n\tau]}}{n^{2H} h^2(n)}.$$

Используя соотношение (2), получаем утверждение леммы. $\square$

Лемма 2. Для всех $1 \geq t \geq \tau \geq 0$ при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$\mathbf{E}s_n(t)s_n(\tau) \rightarrow \mathbf{E}B_H(t)B_H(\tau).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(s_n(t) - s_n(\tau))^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (A_{k,n}(t) - A_{k,n}(\tau))^2 \\ &= \frac{([nt] - [n\tau])^{2H} h^2([nt] - [n\tau])}{n^{2H} h^2(n)}, \end{aligned}$$

где последнее равенство вытекает из леммы 1. Отсюда получаем

$$\mathbf{E}(s_n(t) - s_n(\tau))^2 \rightarrow (t - \tau)^{2H} = \mathbf{E}(B_H(t) - B_H(\tau))^2.$$

Тогда с учетом сходимости вторых моментов одномерных проекций процессов $s_n(t)$ имеем

$$\begin{aligned} 2\mathbf{E}s_n(t)s_n(\tau) &= \mathbf{E}(s_n(t))^2 + \mathbf{E}(s_n(\tau))^2 \\ &\quad - \mathbf{E}(s_n(t) - s_n(\tau))^2 \rightarrow 2\mathbf{E}B_H(t)B_H(\tau). \end{aligned}$$

$\square$

Лемма 3 ([11, стр. 86]). Пусть $\{X_k\}_{k=1, \dots, n}$ — независимые случайные величины, $\mathbf{E}X_k = 0$ для любого k , $\alpha \geq 2$. Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad M_{\alpha,n} = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|X_k|^\alpha, \quad B_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}X_k^2.$$

Тогда

$$\mathbf{E}|S_n|^\alpha \leq c(\alpha)(M_{\alpha,n} + B_n^{\alpha/2}),$$

где $c(\alpha)$ — положительная константа, зависящая только от α .

Лемма 4. Имеет место неравенство

$$\mathbf{E}|s_n(t) - s_n(\tau)|^\alpha \leq C \left(\frac{[nt] - [n\tau]}{n} \right)^{\alpha H} \left(\frac{h([nt] - [n\tau])}{h(n)} \right)^\alpha,$$

где C — константа, зависящая от распределения ξ_0 , α и $\{a_i\}$.

Доказательство. Из леммы Фату и леммы 3 следует

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} (A_{k,n}(t) - A_{k,n}(\tau)) \xi_k \right|^\alpha \\
 (6) \quad & \leq c(\alpha) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |A_{k,n}(t) - A_{k,n}(\tau)|^\alpha \mathbf{E} |\xi_0|^\alpha + \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (A_{k,n}(t) - A_{k,n}(\tau))^2 \right)^{\alpha/2} \right) \\
 & \leq c(\alpha) (1 + \mathbf{E} |\xi_0|^\alpha) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (A_{k,n}(t) - A_{k,n}(\tau))^2 \right)^{\alpha/2}.
 \end{aligned}$$

Для получения второго неравенства в (6) мы воспользовались следующим неравенством:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |b_k|^\gamma \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |b_k| \right)^\gamma, \quad \gamma \geq 1.$$

Далее, применяя лемму 1 к правой части последнего неравенства в (6), получаем утверждение леммы. $\square$

Лемма 5. Пусть g — медленно меняющаяся функция, определенная на интервале $[1, +\infty)$, ε — произвольное положительное число. Тогда последовательность

$$\left\{ \frac{\max_{1 \leq k \leq n} g(k) k^\varepsilon}{g(n) n^\varepsilon} \right\}$$

ограничена для всех $n \geq 1$.

Доказательство. Используя утверждение 4 из [12, раздел 1.5] получаем, что существует B , такое что выполняется соотношение: $\frac{\sup_{B \leq x \leq n} g(x) x^\varepsilon}{g(n) n^\varepsilon} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow +\infty$, откуда сразу следует утверждение леммы. $\square$

Из леммы 4 и 5 сразу получаем следующее утверждение.

Лемма 6. Пусть $\alpha H > 1$. Тогда имеет место неравенство

$$\mathbf{E} |s_n(t) - s_n(\tau)|^\alpha \leq C \left(\frac{[nt] - [n\tau]}{n} \right)^{\frac{\alpha H + 1}{2}},$$

где C — положительная константа, зависящая от α , $\{a_i\}$ и распределения ξ_0 .

Из леммы 6, применяя теорему 3 из [7, стр. 52] (где в качестве ступенчатой функции $F_n(t)$ необходимо взять $[nt]/n$), следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$(7) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\sup_{|t-s| < \delta, t, s \in [0, 1]} |s_n(t) - s_n(s)| > \varepsilon \right) = 0.$$

Лемма 7 ([13, стр. 456]). Для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеет место неравенство

$$|a_{k+1} + \dots + a_{k+n}| \leq \left(4\sqrt{\mathbf{D}S_n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{D}S_n}} \right) \right)^{1/2}.$$

Лемма 8 ([9, лемма 7]). Пусть $\{b_{ni}; n \geq 1, i \in \mathbb{Z}\}$ — массив действительных чисел и $\{\zeta_{ni}; n \geq 1, i \in \mathbb{Z}\}$ — массив случайных величин, удовлетворяющих условиям

- L1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_{ni}^2 = 1$;
- L2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in \mathbb{Z}} |b_{ni}| = 0$;
- L3. Для каждого $n \geq 1$ последовательность $\{\zeta_{ni}, i \in \mathbb{Z}\}$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих нулевые средние и единичные дисперсии;
- L4. $\lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \mathbf{E} \zeta_{n0}^2 \mathbf{I}(|\zeta_{n0}| > K) = 0$.

Тогда $\sum_{i \in \mathbb{Z}} b_{ni} \zeta_{ni}$ при $n \rightarrow \infty$ сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине.

Лемма 9. При $n \rightarrow \infty$ конечномерные распределения случайных процессов $s_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $B_H(t)$.

Доказательство. Достаточно показать, что $\sum_{i=1}^l c_i s_n(t_i)$ сходится по распределению к $\sum_{i=1}^l c_i B_H(t_i)$ для любого конечного набора чисел $\{c_i; i = 1, \dots, l\}$. Сначала отметим, что $z_n \equiv \sum_{i=1}^l c_i s_n(t_i) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^l c_i A_{k,n}(t_i) \xi_k$. Далее (см. лемму 2),

$$\begin{aligned} \mathbf{E} z_n^2 &= \sum_{i,j=1}^l c_i c_j \mathbf{E}(s_n(t_i) s_n(t_j)) \rightarrow \sum_{i,j=1}^l c_i c_j \mathbf{E}(B_H(t_i) B_H(t_j)) \\ &= \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^l c_i B_H(t_i) \right)^2, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\delta^2 = \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^l c_i B_H(t_i) \right)^2, \quad z_{1n} = z_n / \delta.$$

Тогда

$$E z_{1n}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{i=1}^l c_i / \delta A_{k,n}(t_i) \right)^2 \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теперь в условиях леммы 8 положим $b_{nk} = \sum_{i=1}^l c_i / \delta A_{k,n}(t_i)$, $\zeta_{nk} = \xi_k$. Легко видеть, что в нашем случае условие L1 выполнено. Применяя лемму 7, получаем

$$\sup_k \left| \sum_{i=1}^l (c_i A_{k,n}(t_i)) \right| = O(n^{-H/2} h^{-1/2}(n)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, выполняется и условие L2. Выполнение условий L3 и L4 очевидно. Стало быть, z_n сходится по распределению к нормальной случайной величине с нулевым средним и дисперсией δ^2 . □

Доказательство предложения 1. Из лемм 6, 9 и соотношения (7) сразу следует утверждение предложения. □

Перейдем к доказательству теоремы 1. Меняя порядок суммирования в (4), представим R_n в виде $\sum_{i=0}^n S_{n-i} \Delta M(i)$, откуда выводим представление R_n в виде интеграла: $\int_0^n S_{n-[s]} dM(s)$. Далее, поскольку $r_n(t) = \frac{R_{[nt]}}{h(n)n^H M(n)}$ мы получаем представление $r_n(t)$ в виде:

$$(8) \quad \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) \frac{dM(un)}{M(n)}.$$

Лемма 10. Пусть $M \in \mathcal{R}_\nu$, $\nu \geq 0$. Тогда семейство распределений случайных процессов $\{r_n(t)\}$ плотно в $D[0, 1]$ относительно равномерной метрики.

Доказательство. Имея в виду представление (8), найдем верхнюю оценку для

$$(9) \quad \sup_{|t-s| < \delta, t, s \in [0, 1]} \left| \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) \frac{dM(un)}{M(n)} - \int_0^{[ns]/n} s_n([ns] - [nu])/n \frac{dM(un)}{M(n)} \right|.$$

Пусть для определенности $s < t$. Выполняются очевидные неравенства:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) \frac{dM(un)}{M(n)} - \int_0^{[ns]/n} s_n([ns] - [nu])/n \frac{dM(un)}{M(n)} \right| \\ & \leq \int_0^{[ns]/n} |s_n(([nt] - [nu])/n) - s_n([ns] - [nu])/n| \frac{dM(un)}{M(n)} \\ & \quad + \int_{[ns]/n}^{[nt]/n} |s_n([nt] - [nu])/n| \frac{dM(un)}{M(n)}. \end{aligned}$$

Если $|t - s| < \delta$, то при всех достаточно больших n

$$\frac{[nt] - [nu]}{n} - \frac{[ns] - [nu]}{n} < 2\delta.$$

Поскольку $u \geq [ns]/n$, поэтому

$$\frac{[nt] - [nu]}{n} \leq \frac{[nt] - [ns]}{n} < 2\delta.$$

В итоге получаем верхнюю оценку для (9)

$$\begin{aligned} & \sup_{|t-s| < \delta, t, s \in [0, 1]} \left| \int_0^{[nt]/n} s_n([nt] - [nu])/n \frac{dM(un)}{M(n)} - \int_0^{[ns]/n} s_n([ns] - [nu])/n \frac{dM(un)}{M(n)} \right| \\ & \leq 2 \sup_{|t-s| < 2\delta, t, s \in [0, 1]} |s_n(t) - s_n(s)|. \end{aligned}$$

Откуда, используя соотношение (7), получаем утверждение леммы. $\square$

Далее, с учетом леммы 10, чтобы доказать теорему 1 нам достаточно установить слабую сходимость конечномерных распределений случайных процессов $r_n(t)$.

Исследование сходимости конечномерных распределений в случае $\nu > 0$ мы разобьем на леммы 11 — 15 и, соответственно, в случае $\nu = 0$ — на леммы 16 — 18.

Отметим, что в доказательстве следующих утверждений мы будем использовать следующий простой факт. Поскольку l — медленно меняющаяся на $+\infty$

функция, то найдется *бесконечно малая последовательность* $\{\varepsilon_n\}$, такая что при $n \rightarrow +\infty$

$$n\varepsilon_n \rightarrow +\infty, \quad l(n\varepsilon_n)/l(n) \rightarrow 1.$$

Напомним, что $M \in \mathcal{R}_\nu$, $\nu > 0$ представляется в виде: $M(t) = t^\nu l(t)$, где l — функция неубывающая на интервале $[0, +\infty)$ и медленно меняющаяся на $+\infty$.

Лемма 11. Для любого $t \in [0, 1]$ при $n \rightarrow +\infty$ выполняется соотношение:

$$r_n(t) - \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) du^\nu \xrightarrow{P} 0.$$

Доказательство. Пусть $t \in (0, 1]$. Выполняются неравенства

$$\begin{aligned} (10) \quad & \left| \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) u^\nu \frac{dl(un)}{l(n)} \right| \\ & \leq \int_{\varepsilon_n}^{[nt]/n} |s_n(([nt] - [nu])/n)| u^\nu \frac{dl(un)}{l(n)} \\ & \quad + \int_0^{\varepsilon_n} |s_n(([nt] - [nu])/n)| u^\nu \frac{dl(un)}{l(n)} \\ & \leq \sup_{t \in [0, 1]} |s_n(t)| \left(\frac{l([nt])}{l(n)} - \frac{l(n\varepsilon_n)}{l(n)} \right) + \sup_{t \in [0, 1]} |s_n(t)| \varepsilon_n^\nu \xrightarrow{P} 0, \end{aligned}$$

где последнее соотношение вытекает из того, что при $n \rightarrow +\infty$

$$\sup_{t \in [0, 1]} |s_n(t)| \xrightarrow{d} \sup_{t \in [0, 1]} |B_H(t)|$$

и

$$\frac{l([nt])}{l(n)} - \frac{l(n\varepsilon_n)}{l(n)} \rightarrow 0.$$

Выполняется равенство

$$\begin{aligned} (11) \quad & \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) \frac{l(un)}{l(n)} du^\nu \\ & = \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) \left(\frac{l(un)}{l(n)} - 1 \right) du^\nu \\ & \quad + \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) du^\nu. \end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое правой части (11):

$$\begin{aligned} (12) \quad & \left| \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) \left(\frac{l(un)}{l(n)} - 1 \right) du^\nu \right| \\ & \leq \int_0^{\varepsilon_n} |s_n(([nt] - [nu])/n)| \left(1 - \frac{l(un)}{l(n)} \right) du^\nu \\ & \quad + \int_{\varepsilon_n}^{[nt]/n} |s_n(([nt] - [nu])/n)| \left(1 - \frac{l(un)}{l(n)} \right) du^\nu \\ & \leq \sup_{t \in [0, 1]} |s_n(t)| \varepsilon_n^\nu + \sup_{t \in [0, 1]} |s_n(t)| \left(1 - \frac{l(n\varepsilon_n)}{l(n)} \right) \xrightarrow{P} 0. \end{aligned}$$

Далее, отметим, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) \frac{dM(un)}{M(n)} - \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) du^\nu \right| \\ & \leq \left| \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) u^\nu \frac{dl(un)}{l(n)} \right| + \left| \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) \left(\frac{l(un)}{l(n)} - 1 \right) du^\nu \right|. \end{aligned}$$

Откуда, используя соотношения (10) и (12), получаем утверждение леммы. $\square$

Введем обозначение:

$$s_n^{(1)}(t) = S_{[nt]+1}/\sqrt{\mathbf{D}S_n}, \quad t \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Лемма 12. Пусть $\mathbf{E}|\xi_1|^\alpha < +\infty$ для некоторого α , такого что $\alpha \geq 2$ и $\alpha H > 1$. Тогда при $n \rightarrow +\infty$ выполняется соотношение:

$$\sup_{t \in [0, 1]} |s_n^{(1)}(t) - s_n(t)| \xrightarrow{P} 0.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Выполняется очевидное неравенство:

$$(13) \quad \mathbf{P}(\sup_{t \in [0, 1]} |s_n^{(1)}(t) - s_n(t)| > \varepsilon) \leq n\mathbf{P}(|X_1| > \varepsilon h(n)n^H).$$

Применяя к правой части (13) неравенство Чебышева, получаем

$$\mathbf{P}(\sup_{t \in [0, 1]} |s_n^{(1)}(t) - s_n(t)| > \varepsilon) \leq \frac{n^{1-\alpha H}}{\varepsilon^\alpha h^\alpha(n)} \mathbf{E}|X_1|^\alpha \rightarrow 0.$$

Заметим, что конечность $\mathbf{E}|X_1|^\alpha$ следует из леммы 4. $\square$

Лемма 13. Для любого $t \in [0, 1]$ при $n \rightarrow +\infty$ имеет место соотношение:

$$\left| \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) du^\nu - \int_0^t (-s_n^{(1)}(u)) d(t-u)^\nu \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Доказательство. Пусть $t \in (0, 1]$. Представим $\int_0^t s_n^{(1)}(u) d(t-u)^\nu$ в виде суммы:

$$(14) \quad \begin{aligned} \int_0^t s_n^{(1)}(u) d(t-u)^\nu &= \int_0^{[nt]/n} s_n^{(1)}(u) d(t-u)^\nu \\ &+ \int_{[nt]/n}^t s_n^{(1)}(u) d(t-u)^\nu. \end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое правой части (14). Используя лемму 12 и предложение 1, имеем

$$(15) \quad \left| \int_{[nt]/n}^t s_n^{(1)}(u) d(t-u)^\nu \right| \leq |s_n^{(1)}(t)|(t - [nt]/n)^\nu \xrightarrow{P} 0.$$

Далее, заметим, что имеет место равенство

$$(16) \quad \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) du^\nu = - \int_0^{[nt]/n} s_n^{(1)}(u) d([nt]/n - u)^\nu.$$

Используя (16), выводим

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) du^\nu - \int_0^{[nt]/n} (-s_n^{(1)}(u)) d(t-u)^\nu \right| \\
 (17) \quad &= \left| \int_0^{[nt]/n} s_n^{(1)}(u) d((t-u)^\nu - ([nt]/n - u)^\nu) \right| \\
 &\leq \sup_{t \in [0,1]} |s_n^{(1)}(t)| |(t - [nt]/n)^\nu - (t^\nu - ([nt]/n)^\nu)| \xrightarrow{P} 0.
 \end{aligned}$$

Для оценки третьего интеграла в (17) мы воспользовались тем, что функция $f(u) = (t-u)^\nu - ([nt]/n - u)^\nu$ монотонна на промежутке $[0, [nt]/n]$.

Выполняется очевидное неравенство:

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) du^\nu - \int_0^t (-s_n^{(1)}(u)) d(t-u)^\nu \right| \\
 (18) \quad &\leq \left| \int_{[nt]/n}^t s_n^{(1)}(u) d(t-u)^\nu \right| \\
 &+ \left| \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) du^\nu - \int_0^{[nt]/n} (-s_n^{(1)}(u)) d(t-u)^\nu \right|.
 \end{aligned}$$

Применяя (15) и (17) к правой части неравенства 18, получаем утверждение леммы. $\square$

Лемма 14. Пусть $\{c_i; i = 1, \dots, l\}$ – произвольный набор действительных чисел, $\{t_i; i = 1, \dots, l\}$ – произвольный набор из интервала $[0, 1]$. Тогда при $n \rightarrow +\infty$

$$\sum_{i=1}^l c_i \int_0^{t_i} s_n^{(1)}(u) d(t_i - u)^\nu \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^l c_i \int_0^{t_i} B_H(u) d(t_i - u)^\nu.$$

Доказательство. Определим функционал $F : D[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$F(f) = \sum_{i=1}^l c_i \int_0^{t_i} f(u) d(t_i - u)^\nu.$$

Очевидно, что F является непрерывным в равномерной топологии в точках из $C[0, 1]$ и измеримым на $D[0, 1]$ в топологии А. В. Скорохода. Следовательно, с учетом леммы 12 и предложения 1, получаем, что $F(s_n^{(1)})$ сходится по распределению к $F(B_H)$ (см., например, [7]), откуда сразу следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 15. При $n \rightarrow \infty$ конечномерные распределения случайных процессов $r_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $Z_{\nu, H}(t)$.

Доказательство. Пусть $\{c_i; i = 1, \dots, l\}$ – произвольный набор действительных чисел, $\{t_i; i = 1, \dots, l\} \subseteq [0, 1]$. Из лемм (11) и (13) следует, что

$$\left| \sum_{i=1}^l c_i r_n(t_i) - \sum_{i=1}^l c_i \int_0^{t_i} (-s_n^{(1)}(u)) d(t_i - u)^\nu \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Используя полученное соотношение, лемму 14, а также известный прием Крамера-Уолда (см., например, [14]), получаем утверждение леммы. $\square$

Перейдем к доказательству второй части теоремы 1. Напомним, что в этом случае функция M является неотрицательной, неубывающей, отличной от константы на интервале $[0; +\infty)$ и медленно меняющейся на $+\infty$.

Лемма 16. *Существует положительная константа C , такая что для любых $k, l \in [0, n]$ выполняется неравенство:*

$$\mathbf{E}|s_n(k/n) - s_n(l/n)|^2 \leq C \frac{|k - l|^H}{n^H}.$$

Доказательство. Прежде всего имеем равенство (см. лемму 1)

$$\mathbf{E}|s_n(k/n) - s_n(l/n)|^2 = \frac{|k - l|^{2H} h^2(|k - l|)}{n^{2H} h^2(n)}.$$

Представим это равенство в виде

$$(19) \quad \mathbf{E}|s_n(k/n) - s_n(l/n)|^2 = \frac{|k - l|^H}{n^H} \frac{|k - l|^H h^2(|k - l|)}{n^H h^2(n)}.$$

Применяя лемму 5 ко второму множителю правой части (19), получаем утверждение леммы. □

Лемма 17. *Для любого $t \in [0, 1]$ при $n \rightarrow +\infty$ выполняется соотношение:*

$$r_n(t) - \left(1 - \frac{M(0)}{M(+\infty)}\right) s_n(t) \xrightarrow{P} 0.$$

Доказательство. Пусть $t \in (0, 1]$. Используя представление (8) для $r_n(t)$, имеем

$$(20) \quad r_n(t) = \int_{\varepsilon_n}^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) \frac{dM(un)}{M(n)} + \int_0^{\varepsilon_n} s_n(([nt] - [nu])/n) \frac{dM(un)}{M(n)}.$$

Оценим первое слагаемое в (20):

$$(21) \quad \left| \int_{\varepsilon_n}^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) \frac{dM(un)}{M(n)} \right| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |s_n(t)| \left(\frac{M([nt])}{M(n)} - \frac{M(\varepsilon_n n)}{M(n)} \right) \xrightarrow{P} 0.$$

Представим второе слагаемое (20) в виде суммы:

$$(22) \quad \int_0^{\varepsilon_n} s_n(([nt] - [nu])/n) \frac{dM(un)}{M(n)} = \int_0^{\varepsilon_n} (s_n(([nt] - [nu])/n) - s_n(t)) \frac{dM(un)}{M(n)} + \int_0^{\varepsilon_n} s_n(t) \frac{dM(un)}{M(n)}.$$

Рассмотрим первое слагаемое правой части (22).

$$(23) \quad \mathbf{E} \left(\int_0^{\varepsilon_n} (s_n(([nt] - [nu])/n) - s_n(t)) \frac{dM(un)}{M(n)} \right)^2 = \int_0^{\varepsilon_n} \int_0^{\varepsilon_n} \mathbf{E} s_n(t, u) s_n(t, v) \frac{dM(un)}{M(n)} \frac{dM(vn)}{M(n)},$$

где $s_n(t, u) = s_n(([nt] - [nu])/n) - s_n(t)$. Далее, используя очевидное неравенство: $\mathbf{E}s_n(t, u)s_n(t, v) \leq \frac{1}{2}(\mathbf{E}s_n^2(t, u) + \mathbf{E}s_n^2(t, v))$, а также лемму 16, получаем, что $\mathbf{E}s_n(t, u)s_n(t, v) \leq \frac{C}{2}(u^H + v^H)$. Применяя последнее неравенство к правой части (23), выводим

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(\int_0^{\varepsilon_n} (s_n(([nt] - [nu])/n) - s_n(t)) \frac{dM(un)}{M(n)} \right)^2 \\ (24) \quad & \leq \frac{C}{2} \int_0^{\varepsilon_n} \int_0^{\varepsilon_n} (u^H + v^H) \frac{dM(un)}{M(n)} \frac{dM(vn)}{M(n)} \\ & \leq C\varepsilon_n^H \left(\frac{M(\varepsilon_n n)}{M(n)} - \frac{M(0)}{M(n)} \right)^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Из (24) следует, что при $n \rightarrow +\infty$

$$(25) \quad \int_0^{\varepsilon_n} (s_n(([nt] - [nu])/n) - s_n(t)) \frac{dM(un)}{M(n)} \xrightarrow{P} 0.$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части (22). Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \int_0^{\varepsilon_n} s_n(t) \frac{dM(un)}{M(n)} - s_n(t) \left(1 - \frac{M(0)}{M(+\infty)} \right) \\ (26) \quad & = s_n(t) \left(\frac{M(\varepsilon_n n)}{M(n)} - \frac{M(0)}{M(n)} \right) - s_n(t) \left(1 - \frac{M(0)}{M(+\infty)} \right) \xrightarrow{P} 0. \end{aligned}$$

Применяя соотношения (25), (26) к (22) выводим

$$(27) \quad \int_0^{\varepsilon_n} s_n(([nt] - [nu])/n) \frac{dM(un)}{M(n)} - s_n(t) \left(1 - \frac{M(0)}{M(+\infty)} \right) \xrightarrow{P} 0.$$

Далее, применяя соотношения (21), (27) к (20), получаем утверждение леммы. □

Лемма 18. Конечномерные распределения случайных процессов $r_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\left(1 - \frac{M(0)}{M(+\infty)}\right) B_H(t)$ при $n \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Пусть $\{c_i; i = 1, \dots, l\}$ — произвольный набор действительных чисел, $\{t_i; i = 1, \dots, l\}$ — произвольный набор из интервала $[0, 1]$. Из леммы 17 получаем, что

$$\sum_{i=1}^l c_i r_n(t_i) - \sum_{i=1}^l c_i s_n(t_i) \left(1 - \frac{M(0)}{M(+\infty)} \right) \xrightarrow{P} 0.$$

Откуда и из леммы 9, а также приема Крамера-Уолда следует утверждение леммы. □

Доказательство следствия 1. Прежде всего отметим, что утверждение теоремы 1 справедливо для гауссовских аналогов процессов $r_n(t)$, когда случайные величины ξ_k в (1) — стандартные нормальные, при этом величина $\mathbf{D}R_n$ не изменится. Стало быть, если $M \in \mathcal{R}_\nu$, $\nu > 0$, то при $n \rightarrow \infty$ выполняется слабая сходимость $r_n(1)$ к $Z_{\nu, H}(1)$ и, кроме того, если $M \in \mathcal{R}_0$, то при

$n \rightarrow \infty$ имеет место слабая сходимость $r_n(1)$ к $\left(1 - \frac{M(0)}{M(+\infty)}\right) B_H(1)$ (напомним, что $r_n(1) = \frac{R_n}{h(n)n^H M(n)}$).

Далее, заметим, что случайная величина $R_n/\sqrt{\mathbf{D}R_n}$ при всех n имеет стандартное нормальное распределение. В итоге получаем эквивалентность нормировочных коэффициентов R_n :

$$\mathbf{D}R_n \sim \sigma^2 h^2(n) n^{2H} M^2(n), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$\sigma^2 = \begin{cases} \mathbf{D}Z_{\nu,H}(1), & \text{если } M \in \mathcal{R}_\nu, \nu > 0, \\ (1 - M(0)/M(+\infty))^2, & \text{если } M \in \mathcal{R}_0. \end{cases}$$

□

Автор крайне признателен рецензенту за целый ряд замечаний и вопросов, позволивших значительно улучшить содержание работы.

REFERENCES

- [1] N. S. Arkashov, *The principle of invariance in the Strassen form to the partial sum processes of moving averages of finite order*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **15** (2018), 1292–1300.
- [2] N. S. Arkashov, *On a Method for the Probability and Statistical Analysis of the Density of Low Frequency Turbulent Plasma*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **59:3** (2019), 402–413. Zbl 07083630
- [3] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, v. II, New York etc.: John Wiley & Sons, 1971. Zbl 0219.60003
- [4] A. I. Olemskoi and A. Ya. Flat, *Application of fractals in condensed-matter physics*, Phys. Usp., **36** (1993), 1087–1128.
- [5] R. R. Nigmatullin, *Fractional integral and its physical interpretation*, Theor. Math. Phys., **90:3** (1992), 242–251. Zbl 0795.26007
- [6] N. S. Arkashov and V. A. Seleznev, *Formation of a relation of nonlocalities in the anomalous diffusion model*, Theoret. and Math. Phys., **193:1** (2017), 1508–1523. Zbl 1387.82020
- [7] A. A. Borovkov, A. A. Mogulskii and A. I. Sakhanenko, *Limit theorems for random processes*, in: Probability Theory 7, VINITI, v. 82, Moscow, 1995. Zbl 0951.60023
- [8] Yu. A. Davydov, *The invariance principle for stationary processes*, Theory of Probability & Its Applications, **15:3** (1970), 487–498. Zbl 0209.48904
- [9] T. Konstantopoulos, A. Sakhanenko, *Convergence and convergence rate to fractional Brownian motion for weighted random sums*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **1** (2004), 47–63. Zbl 1079.60025
- [10] N. S. Arkashov and I. S. Borisov, *Gaussian approximation to the partial sum processes of moving averages*, Siberian Math. J., **45:6** (2004), 1000–1030. Zbl 1094.62109
- [11] V. V. Petrov, *Limit Theorems for the Sums of Independent Random Variables*, Moskva: Nauka, 1987. Zbl 0621.60022
- [12] E. Seneta, *Regularly Varying Functions*, Moskva: Nauka, 1985. Zbl 0563.26002
- [13] I. A. Ibragimov and Yu. V. Linnik, *Independent and Stationarily Connected Variables*, Groningen: Wolters-Noordhoff Publishing Company, 1971. Zbl 0219.60027
- [14] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, New York etc.: Wiley and Sons, 1968. Zbl 0172.21201

NIKOLAY SERGEEVICH ARKASHOV
 NOVOSIBIRSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
 20, K. MARX AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630073, RUSSIA;
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 2, PIROGOVA STR.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: nicky1978@mail.ru