Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. G. Pinus, On topologization of direct limits of retractive spectors and their completion, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1345–1350

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.093>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.172.240.79

April 26, 2023, 11:54:48

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1345–1350 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.093

УДК 512.17

MSC 08A05

О ТОПОЛОГИЗАЦИИ ПРЯМЫХ ПРЕДЕЛОВ
РЕТРАКТИВНЫХ СПЕКТРОВ И ИХ ПОПОЛНЕНИИ

А.Г. ПИНУС

ABSTRACT. Some natural topologies on the direct and inverse limits of retractive spectra of algebras are defined and compactness criteria for these topologies on the inverse limit are given

Keywords: retractive spectra, topology, compactness.

В настоящей работе изложены в общем виде некоторые подходы к естественной топологизации прямых пределов ретрактивных спектров универсальных алгебр и к рассмотрению обратных пределов этих спектров как пополнений их прямых пределов, рассмотренные ранее автором в [1] в конкретном частном случае решёток ограниченно порождённых функциональных клонов на множестве и решёток всех функциональных клонов как прямого и обратного пределов ретрактивного спектра решёток фрагментов функциональных клонов.

В работе будем использовать стандартные определения основных топологических понятий: база окрестностей, определяемая ею топология, хаусдорфовость пространства, пополнение пространства и т.д., следуя любому каноническому тексту по основам топологии, к примеру, [2].

Напомним введённое в работе [3] понятие ретрактивного спектра универсальных алгебр. Пусть $\langle I; \leq \rangle$ — некоторое направленное вверх частично упорядоченное множество (именуемое далее *базой спектра*) и $\{\mathfrak{A}_i = \langle A_i; \sigma \rangle \mid i \in I\}$ — совокупность универсальных алгебр, при этом для $i \leq j$ из $\langle I; \leq \rangle$ пусть будет π_i^j — некоторым изоморфным вложением алгебры $\mathfrak{A}_i$ в алгебру $\mathfrak{A}_j$, а ψ_i^j —

PINUS, A.G., ON TOPOLOGIZATION OF DIRECT LIMITS OF RETRACTIVE SPECTORS AND THEIR COMPLETION.

© 2019 Пинус А.Г.

Поступила 26 июня 2018 г., опубликована 27 сентября 2019 г.

некоторый гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_j$ на алгебру $\mathfrak{A}_i$ образующий вместе с вложением π_i^j ретрактивную пару (т.е. такой, что для любого $a \in \mathfrak{A}_i$ имеет место равенство $\psi_i^j(\pi_i^j(a)) = a$ (для $i \leq j \in I$). Пусть при этом для $i \leq j \leq k \in I$ выполняется $\psi_i^j \psi_j^k = \psi_i^k$. Таким образом у нас в наличии имеются два спектра универсальных алгебр: прямой $\vec{\mathfrak{L}} = \langle \{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}; \{\pi_i^j \mid i \leq j \in I\} \rangle$ и обратный $\overleftarrow{\mathfrak{L}} = \langle \{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}; \{\psi_i^j \mid i \leq j \in I\} \rangle$. Совмещение этих двух спектров и будем называть *ретрактивным спектром* $\mathfrak{L} = \langle \{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}; \{\pi_i^j, \psi_i^j \mid i \leq j \in I\} \rangle$.

В дальнейшем вложения π_i^j будем считать тождественными и, тем самым, прямой предел $\lim_{\rightarrow} \vec{\mathfrak{L}}$ прямого спектра $\vec{\mathfrak{L}}$ отождествим с алгеброй $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ представимой как $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, где $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_j$ (при $i \leq j \in I$). Подобную ситуацию для алгебры $\mathfrak{A}$ будем определять как то, что $\mathfrak{A}$ *ретрактивно разложима* на алгебры $\mathfrak{A}_i$ ($i \in I$) относительно базы $\langle I; \leq \rangle$.

В случае ретрактивной разложимости алгебры $\mathfrak{A} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ относительно базы $\langle I; \leq \rangle$ для любого $j \in I$ существует гомоморфизм ψ_j алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}_j$, являющийся продолжением гомоморфизмов ψ_j^k (для $j < k \in I$) и образующий ретрактивную пару с тождественным вложением алгебры $\mathfrak{A}_j$ в алгебру $\mathfrak{A}$.

Поскольку любая универсальная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ является прямым пределом прямого спектра

$$\vec{\mathfrak{L}} = \langle \{\mathfrak{A}_i \mid \mathfrak{A}_i \in \langle Sub_{\omega} \mathfrak{A}; \subseteq \rangle\}; \{\pi_{\mathfrak{A}_i}^{\mathfrak{A}_j} \mid \mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_j \in Sub_{\omega} \mathfrak{A}\} \rangle$$

своих конечно порождённых подалгебр (здесь $Sub_{\omega} \mathfrak{A}$ — совокупность конечно порождённых подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$, а $\pi_{\mathfrak{A}_i}^{\mathfrak{A}_j}$ — тождественное вложение алгебры $\mathfrak{A}_i$ в алгебру $\mathfrak{A}_j$), то алгебра $\mathfrak{A}$ будет ретрактивно разложимой с базой $\langle Sub_{\omega} \mathfrak{A}; \subseteq \rangle$ в случае когда найдется система “согласованных” ретрактивных гомоморфизмов $\{\psi_{\mathfrak{A}_i} \mid \mathfrak{A}_i \in Sub_{\omega} \mathfrak{A}\}$ алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебры $\mathfrak{A}_i$ (т.е. таких, что для $a \in \mathfrak{A}_i$ выполнено $\psi_{\mathfrak{A}_i}(a) = a$ и для $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_j \in Sub_{\omega} \mathfrak{A}$ выполнено $\psi_{\mathfrak{A}_i} \psi_{\mathfrak{A}_j} = \psi_{\mathfrak{A}_i}$). В этом случае ретрактивные гомоморфизмы $\psi_{\mathfrak{A}_i}^{\mathfrak{A}_j}$ алгебр $\mathfrak{A}_j$ на алгебры $\mathfrak{A}_i$ (для $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_j \in Sub_{\omega} \mathfrak{A}$) для определения ретрактивного спектра

$$\vec{\mathfrak{L}} = \langle \{\mathfrak{A}_i \mid \mathfrak{A}_i \in \langle Sub_{\omega} \mathfrak{A}; \subseteq \rangle\}; \{\pi_{\mathfrak{A}_i}^{\mathfrak{A}_j}, \psi_{\mathfrak{A}_i}^{\mathfrak{A}_j} \mid \mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_j \in Sub_{\omega} \mathfrak{A}\} \rangle$$

определимы как ограничения гомоморфизмов $\psi_{\mathfrak{A}_i}$ до алгебр $\mathfrak{A}_j$.

Представление $\mathfrak{A} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ и гомоморфизмы ψ_j позволяют определить некоторую естественную хаусдорфову топологию τ (через задание системы окрестностей $\{D_j(a) \mid j \in I\}$ для точек $a \in \mathfrak{A}$) следующим образом:

$$D_j(a) = \{b \in \mathfrak{A} \mid \psi_j(b) = \psi_j(a)\}.$$

Непосредственно замечается, что для любого $a \in \mathfrak{A}$ и любых $j_1 \leq j_2 \in I$ имеют место включения $D_{j_2}(a) \subseteq D_{j_1}(a)$ и равенство $\bigcap_{i \in I} D_i(a) = \{a\}$, а сигнатурные операции алгебры $\mathfrak{A}$ непрерывны относительно этой топологии. То есть мы имеем дело с топологической алгеброй $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma, \tau \rangle$.

В случае, когда порядковый тип базы $\langle I; \leq \rangle$ совпадает с ω , топология τ является метрической (см. так же [3]) с метрикой d , определённой на $\mathfrak{A}$ следующим образом: для $a, b \in \mathfrak{A}$

$$d(a, b) = \begin{cases} (\min\{k \in \omega \mid \psi_k(a) \neq \psi_k(b)\})^{-1} & \text{для } a \neq b \\ 0, & \text{если } a = b. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь обратный предел $\mathfrak{A}' = \langle A'; \sigma \rangle = \varprojlim \mathfrak{L}$ обратного спектра $\mathfrak{L}$ для произвольного ретрактивного спектра $\mathfrak{L}$. При этом алгебра $\mathfrak{A}'$ отождествима с подалгеброй прямого произведения $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ состоящей из элементов $f \in \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ таких, что для любых $i \leq j \in I$ имеют место равенства $\psi_i^j(f(j)) = f(i)$. Алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ отождествима в этой ситуации с подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}'$ состоящей из элементов $g \in \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ таких, что для некоторого $i \in I$ и для всех $j \geq i$ выполнено $g(j) = g(i)$. Топологию τ' на алгебре $\mathfrak{A}'$ определим через систему окрестностей $D'_j(f)$ (при $j \in I$) элементов $f \in \mathfrak{A}'$, полагая $D'_j(f) = \{g \in \mathfrak{A}' \subseteq \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \mid g(j) = f(j)\}$. Столь же непосредственно как и в случае алгебры $\mathfrak{A}$ замечается, что для $i \leq j \in I$ справедливо $D'_j(f) \subseteq D'_i(f)$ для любого $f \in \mathfrak{A}'$, $\bigcap_{i \in I} D'_i(f) = \{f\}$, и сигнатурные операции алгебры $\mathfrak{A}'$ непрерывны относительно топологии τ' , а ограничение этой топологии τ' до подалгебры $\mathfrak{A}$ совпадает с топологией τ на алгебре $\mathfrak{A}$.

При этом топологическая алгебра $\mathfrak{A}$ всюду плотна в топологической алгебре $\mathfrak{A}'$, а сама $\mathfrak{A}'$ полна относительно топологии τ' , т. е. является пополнением алгебры $\mathfrak{A}$.

Таким образом, имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 *Для любой ретрактивно разложимой алгебры $\mathfrak{A}$ (представимой как прямой предел соответствующего ретрактивного спектра $\mathfrak{L}$), наделённой естественным образом определённой через спектр $\mathfrak{L}$ топологией, обратный предел этого спектра $\mathfrak{L}$ — алгебра $\mathfrak{A}'$ является пополнением алгебры $\mathfrak{A}$ относительно топологии, определённой на ней через тот же спектр $\mathfrak{L}$.*

Частный случай этого утверждения для ситуации с базой типа ω приведен в работе [3].

В качестве иллюстрации этой ситуации рассмотрим произвольную дистрибутивную решётку $\mathfrak{L} = \langle L; \wedge, \vee \rangle$ без наибольшего элемента и рассмотрим соответствующий ей ретрактивный спектр, базой которого будет частично упорядоченное множество $\langle L; \leq \rangle$. В качестве алгебр $\mathfrak{A}_a$ (где $a \in L$) рассмотрим главные идеалы решётки соответствующие её элементам $a \in L$: $\mathfrak{L}_a = \langle \{b \in L \mid b \leq a\}; \wedge, \vee \rangle$. Для $a \leq b \in L$ пусть π_a^b — тождественное вложение $\mathfrak{L}_a$ в $\mathfrak{L}_b$, а ψ_a^b — гомоморфизм решётки $\mathfrak{L}_b$ на решётку $\mathfrak{L}_a$ определённый естественным образом: для $c \in \mathfrak{L}_b$ $\psi_a^b(c) = c \wedge a$.

Таким образом мы имеем дело с ретрактивным спектром

$$\mathfrak{L} = \langle \{\mathfrak{L}_a \mid a \in L\}; \{\pi_a^b, \psi_a^b \mid a \leq b \in L\} \rangle,$$

прямым пределом которого будет решётка $\mathfrak{L} = \varinjlim \mathfrak{L}$. Топология τ на $\mathfrak{L}$ определена системой окрестностей $\{D_c(a) \mid c \in L\}$ для точек $a \in L$:

$$D_c(a) = \{b \in L \mid b \wedge c = a \wedge c\}.$$

В этом случае обратный предел $\varprojlim \mathfrak{L}$ спектра $\mathfrak{L}$, отождествимый с соответствующей подрешёткой $\mathfrak{L}' = \langle L'; \wedge; \vee \rangle$ решётки $\prod_{c \in L} \mathfrak{L}_c$, наделённый топологией τ' , определимой системой окрестностей $\{D'_c(f) \mid c \in L\}$ для $f \in \mathfrak{L}'$: $D'_c(f) = \{g \in \mathfrak{L}' \subseteq \prod_{c \in L} \mathfrak{L}_c \mid g(c) = f(c)\}$, будет топологической решёткой $\langle L'; \wedge, \vee, \tau' \rangle$, являющейся пополнением топологической решётки $\langle L; \wedge, \vee, \tau \rangle$.

Наконец, в частном, но одном из важнейших случаев, когда база $\langle I; \leq \rangle$ ретрактивного спектра

$$\mathfrak{L} = \langle \{\mathfrak{A}_i = \langle A_i; \sigma \rangle \mid i \in \langle I; \leq \rangle\}; \{\pi_i^j, \psi_i^j \mid i \leq j \in I\} \rangle$$

имеет порядковый тип ω , сформулируем и докажем критерий компактности пополнения $\mathfrak{A}' = \varprojlim \mathfrak{L}$ прямого предела этого спектра $\mathfrak{A} = \varinjlim \mathfrak{L}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 Обратный предел $\mathfrak{A}' = \varprojlim \mathfrak{L}$ ретрактивного спектра $\mathfrak{L} = \langle \{\mathfrak{A}_n = \langle A_n; \sigma \rangle \mid n \in \omega\}; \{\pi_n^m, \psi_n^m \mid n \leq m \in \omega\} \rangle$ являющийся пополнением прямого предела $\mathfrak{A} = \varinjlim \mathfrak{L}$ этого спектра, компактен тогда и только тогда, когда алгебры $\mathfrak{A}_i$ конечны.

Доказательство. Пусть среди алгебр $\mathfrak{A}_n$ ($n \in \omega$) есть бесконечная и пусть n_0 — наименьшее такое число, что $A_{n_0} = \{a_r \mid r \in R\}$ бесконечно и $f_r \in \mathfrak{A}' \subseteq \prod_{n \in \omega} \mathfrak{A}_n$ таковы, что $f_r(n_0) = a_r$ для $r \in R$. Тогда $\{D'_{n_0}(f_r) \mid r \in R\}$ является дизъюнктым открытым покрытием пространства $\langle A'; \tau' \rangle$, не допускающим конечного подпокрытия и, тем самым, топология τ' на алгебре $\mathfrak{A}'$ не компактна.

Покажем обратное, т. е. компактность топологического пространства $\langle A'; \tau' \rangle$ в случае конечности алгебр $\mathfrak{A}_n$ ($n \in \omega$).

Прежде всего определим на основном множестве A алгебры

$$\mathfrak{A} = \varinjlim \mathfrak{L} = \langle A = \bigcup_{n \in \omega} A_n; \sigma \rangle$$

функцию ψ , соответствующую гомоморфизмам ψ_n^m следующим образом: для любого $a \in A$, если $a \in A_{n+1}$ для некоторого $n \in \omega$, то пусть $\psi(a) = \psi_n^{n+1}(a)$, и пусть $\psi(a) = a$ для $a \in A_0$. В силу конечности множеств A_n ($n \in \omega$) функция ψ является функцией с конечными множествами уровня (т.е. для любого $a \in A$ множество $\psi^{-1}(a)$ конечно).

Напомним некоторые комбинаторные понятия связанные с известной теоремой Кёнига (см., к примеру, [4], стр. 112). ψ -Ветвью длины n (бесконечной ψ -ветвью) называется кортеж $\bar{a} = \langle a_i \mid i \in n \rangle \in A^n$ (любая последовательность $\bar{a} = \langle a_i \mid i \in \omega \rangle \in A^\omega$ такой (такая), что $a_i = \psi(a_{i+1})$ для любого $i + 1 \in n$ (для любого $i \in \omega$)).

Известно следующее утверждение

ТЕОРЕМА КЁНИГА Для любых множеств $C \subseteq B$ и любого отображения φ множества C в B с конечными множествами уровня, если для некоторого $b \in B$ существуют φ -ветви с начальным элементом b любой конечной длины, то существует и бесконечная φ -ветвь с началом в элементе b .

Пусть $C = \{C_i \mid i \in I\}$ — некоторое открытое покрытие пространства $\langle A'; \tau' \rangle$. Надо доказать существование конечного $C' \subseteq C$ так же покрывающего это пространство.

Предположим противное. Можно считать, что открытые множества C_i , входящие в C , являются окрестностями точек пространства $\langle A'; \tau' \rangle$, т. е. для некоторых $f_i \in A'$ и $i \in I$ выполнено $C_i = D'_{n_i}(f_i)$. Для любого $m \in \omega$ через C^m обозначим конечную совокупность открытых множеств $\{D'_{n_i}(f_i) \mid n_i \leq m\}$. Таким образом, в силу сделанного выше предположения, C^m не является покрытием пространства $\langle A'; \tau' \rangle$, т. е. найдется элемент $g_m \in A'$, не входящий

в $\cup C^m$. В силу конечности множества A_0 , для бесконечной последовательности $m_1 < m_2 < \dots < m_l < m_{l+1} < \dots$ будут иметь место равенства $g_{m_i}(0) = g_{m_{i+1}}(0)$. Обозначим этот элемент через b . Таким образом, для этого b существуют ψ -ветви с начальным элементом равным b любой конечной длины m_i , не входящие во множество $\cup C^{m_i}$. В силу теоремы Кёнига, найдется бесконечная ψ -ветвь $g \in A'$ с началом в элементе b . Тем самым, мы получаем, что $g \notin \cup C^{m_i}$ для любого $i \in \omega$, т. е. $g \notin \cup C$, в противоречии с предположением о том, что C есть покрытие пространства $\langle A'; \tau' \rangle$. Полученное противоречие и доказывает компактность топологии τ' на алгебре $\mathfrak{A}'$ в случае конечности алгебр $\mathfrak{A}_n$ ($n \in \omega$), а вместе с этим и всё утверждение 2.

Вернёмся наконец к примеру, связанному с ретрактивной разложимостью дистрибутивных решёток без наибольшего элемента, рассмотренному вслед за утверждением 1. Пусть $\mathfrak{L} = \langle L; \wedge, \vee \rangle$ — счётная дистрибутивная решётка без наибольшего элемента, не содержащая цепей кроме конечных и порядкового типа ω . Тем самым решётка $\mathfrak{L}$ ретрактивно разложима относительно ретрактивного спектра

$$\langle \{\mathfrak{L}_{a_n} \mid n \in \omega\}; \{\pi_n^m, \psi_n^m \mid n \leq m \in \omega\} \rangle,$$

где $a_{1j}, \dots, a_{nj}, \dots$ — некоторая кофинальная в $\mathfrak{L}$ последовательность элементов, а $\mathfrak{L}_{a_n}$ — главный идеал, порождённый в $\mathfrak{L}$ элементом a_n . Тогда из утверждения 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1 Если $\mathfrak{L}$ — счётная дистрибутивная решётка без наибольшего элемента, не содержащая цепей кроме конечных и порядкового типа ω , то топология τ' на пополнении решётки $\mathfrak{L}'$ (в виде обратного предела ретрактивного спектра $\mathfrak{L}$ с базой порядкового типа ω относительно которого ретрактивно разложима решётка $\mathfrak{L}$) компактна тогда и только тогда, когда все главные идеалы решётки $\mathfrak{L}$ конечны.

Заметим, что условие дистрибутивности решётки $\mathfrak{L}$ в этом следствии очевидным образом может быть заменено на существование в $\mathfrak{L}$ кофинальной последовательности кодистрибутивных элементов.

Наконец рассмотрим ещё один пример, связанный с ретрактивной разложимостью счётных свободных, не являющихся конечно порождёнными, алгебр, относительно спектров (с базой порядкового типа ω) своих (не всех) конечно порождённых подалгебр. Итак, пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ алгебра — свободно порождённая своими элементами $\{b_0, b_1, \dots, b_n, \dots \mid n \in \omega\}$. Через $\mathfrak{A}_n$ обозначим подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$, порождённую элементами $\{b_0, b_1, \dots, b_{n-1}\}$. Тогда $\mathfrak{A} = \varinjlim \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{L} = \langle \{\mathfrak{A}_n \mid n \in \omega\}; \{\pi_m^n, \psi_m^n \mid m \leq n \in \omega\} \rangle$, и π_m^n — тождественное вложение $\mathfrak{A}_m$ в $\mathfrak{A}_n$, а ψ_m^n — некоторый гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_n$ на $\mathfrak{A}_m$, тождественный на $\mathfrak{A}_m$ (такой, к примеру, что $\psi_m^n(b_i) = b_i$ при $i < m$ и $\psi_m^n(b_i) = b_{n-1}$ при $m \leq i < n$).

Заметим, что все алгебры $\mathfrak{A}_n$ ($n \in \omega$) конечны тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{A}$ локально конечна. Таким образом, утверждение 2 для этого случая принимает вид

СЛЕДСТВИЕ 2 Если $\mathfrak{A}$ — счётная свободная не являющаяся конечно порождённой алгебра, и $\mathfrak{L}$ — определённый выше неё ретрактивный спектр с

базой порядкового типа ω (при этом $\mathfrak{A} = \lim_{\rightarrow} \overrightarrow{\mathfrak{L}}$), то топология τ' обратного предела этого спектра на пополнении алгебры $\mathfrak{A}$, на алгебре $\mathfrak{A}' = \lim_{\leftarrow} \overleftarrow{\mathfrak{L}}$, компактна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ локально конечна.

REFERENCES

- [1] Pinus, A.G., *On the fragments of functional clones*, Algebra and Logic, **56**:4 (2017), 318–323. Zbl 06846028
- [2] Kelley, J.L., *General Topology*, Nostrand, 1955.
- [3] Pinus, A.G., *On direct and inverse limits of retractive spectra*, Siberian Math. Journal, **58**:6 (2017), 1372–1377 (in Russian). Zbl 06862429
- [4] Kuratowski K., Mostowski A., *Set Theory*, Moscow: Mir, 1970. Zbl 0204.31301

ALEXANDER GEORGIEVICH PINUS
 NOVOSIBIRSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
 20, K. MARX AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630073, RUSSIA
E-mail address: ag.pinus@gmail.com