Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. V. Pyatkina, A problem of glueing of two Kirchhoff–Love plates, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1351–1374

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.094>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.208.226.222

April 26, 2023, 13:44:39

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1351–1374 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.094

УДК 539.3, 517.97

MSC 35Q74, 74M15

ЗАДАЧА О СКЛЕЙКЕ ДВУХ ПЛАСТИН КИРХГОФА —
ЛЯВА

Е.В. ПЯТКИНА

ABSTRACT. An equilibrium problem of two parallel elastic plates is considered in the paper. The plates are located without a gap and have the same size and shape. They are clamped at their edges and joined to each other along a straight interval. The deflections of the plates satisfy the nonpenetration condition. The case is considered when at the contact surface of the plates not only the lateral load from another plate, but also additional elastic force acts. It is assumed that this elastic force acts both in contact plane and orthogonal to it, and its value is characterized by a so-called damage parameter. Two extreme cases are studied when the parameter equals zero or tends to infinity. The first case corresponds to contact without friction of two plates. The second one corresponds to equilibrium of two-layer plate. The strong convergence of the solutions sequence of equilibrium problem of two plates with elastic force acting at the contact surface to the solutions of extreme problem is proved when the damage parameter tends to zero or to infinity. For the case of the contact without friction singular solution is found near the tip of the interval along which the plates are glued.

Keywords: Kirchhoff — Love plate, contact problem, nonpenetration condition, variational inequality.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассмотрена задача равновесия двух упругих пластин, расположенных параллельно друг другу без зазора. Пластины одинаковой формы и толщины жестко зашпелены по краям и соединены вдоль прямолинейного отрезка. Для описания перемещений точек пластин используется модель Кирхгофа —

PYATKINA, E.V., A PROBLEM OF GLUEING OF TWO KIRCHHOFF — LOVE PLATES.

© 2019 Пяткина Е.В.

Работа поддержана РФФИ (грант 19-51-50004).

Поступила 23 декабря 2018, опубликована 1 октября 2019 г.

Лява. Учитывается условие непроникания между пластинами. Предполагается, что на поверхности контакта пластин действует упругая сила как в плоскости контакта, так и перпендикулярно ей. Для работы этой силы считается действительным закон Гука с коэффициентом пропорциональности, который назовем параметром повреждаемости. Усилия, действующие перпендикулярно контактной поверхности, препятствуют удалению пластин относительно друг друга по толщине, но не мешают прижатию одной пластины к другой. Найдены вариационная и дифференциальная постановка этой задачи равновесия и показана ее однозначная разрешимость. Также рассмотрены предельные случаи, когда параметр повреждаемости оказывается равным нулю или бесконечности. В первом случае получаем задачу равновесия двух упругих пластин, жестко соединенных вдоль отрезка, на контактных поверхностях которых отсутствуют какие-либо силы, кроме силы противодействия пластин друг другу в областях, где прогибы пластин совпадают. Оказалось, что в этом случае задача не распадается на две независимые задачи для горизонтальных и для вертикальных перемещений, так как условия на отрезке содержат в одном соотношении функции этих величин. В случае, когда значение параметра равно бесконечности, приходим к задаче о равновесии двухслойной пластины, где два слоя с разными упругими свойствами соединены между собой по всей поверхности контакта. Показано, что при стремлении к нулю или бесконечности параметра повреждаемости последовательность решений задач равновесия двух пластин с действующей на поверхности контакта упругой силой сильно сходится к решению задачи контакта без трения двух пластин, соединенных вдоль отрезка внутри области контакта, или решению задачи равновесия двухслойной пластины соответственно. Для задачи контакта без трения двух упругих пластин, найдено представление решения вблизи одного из концов отрезка, вдоль которого соединены пластины.

Задача о равновесии упругого тела с дефектом исследована в [1]. Предельные случаи нулевого и бесконечного значений параметра повреждаемости, характеризующего дефект, соответствуют задаче о равновесии тела с трещиной и задаче о равновесии тела без дефектов и трещин соответственно. Плоская задача равновесия пакета бесконечных упругих пластин, соединенных вдоль периодической системы отрезков рассмотрена в [2]. Там же найдены коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности одного из концов отрезка, соединяющего пластины в пакет. Асимптотика решения плоской задачи равновесия упругого тела, содержащего трещину с условием непроникания, в окрестности одной из ее вершин, найдена в [3]. В [4] получено полное асимптотическое разложение решения задачи равновесия двумерного упругого тела, содержащего тонкое включение, в окрестности вершины тонкого включения, рассмотрены случаи с отслоением и без отслоения. В работе [5] выполнено численное исследование равновесия плоского упругого тела с системой жестких включений, найдено распределение напряжений в теле. В [6] проведен численный счет равновесия двухслойной конструкции со сквозной трещиной. Плоская задача о равновесии двух упругих полупространств и тонкого упругого слоя между ними рассмотрена в работе [7]. В указанной статье найдены различные условия на границах раздела сред в зависимости от упругих свойств заполнителя. В работах [8,9] выведены уравнения равновесия многослойной упругой пластины и получено соответствующее вариационное уравнение. Задача контакта двух

упругих пластин с учетом условия непроникания рассмотрена в [10]. Однозначная разрешимость в Соболевских пространствах задач равновесия упругих тел с трещинами с учетом условия непроникания на их берегах исследовались в частности в [11,12]. Некоторые задачи безотрывного контакта упругих тел рассмотрены в [13,14,15]. В [16] приведены вариационные и дифференциальные уравнения многослойных конструкций с большим числом плоских слоев, часть из них — несущие слои, которые трактуются как классические пластины, а заполнитель — среда, работающая преимущественно на сдвиг. В книге [17] исследована задача равновесия двухслойной составной пластинки, в которой промежуточный слой моделируется разделяющей плоскостью, а продольные перемещения и деформации обеих пластин экстраполируются за пределы фактической толщины пластины вплоть до разделяющей плоскости, на которой заданы упругоподатливые связи сдвига и поперечные связи. Однозначная разрешимость задачи о контакте двух пластин, соединенных вдоль одного берега трещины, показана в [18]. В работах [19-21] рассмотрен односторонний контакт пластин, расположенных под углом друг к другу.

2. Постановка задачи

Пусть ограниченная область Ω принадлежит плоскости Ox_1x_2 . Внешняя граница $\Gamma = \partial\Omega$ принадлежит классу $C^{1,1}$. Вектор внешней нормали обозначен через $n = (n_1, n_2)$. Единичный отрезок на оси абсцисс $\gamma = (-1, 0) \times \{0\}$ полностью содержится в Ω . Через $\bar{\gamma} = [-1, 0] \times \{0\}$ обозначено замыкание отрезка γ . Пусть $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичный вектор нормали к γ , направленный в сторону положительных значений x_2 (рис. 1). Положим $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$.

Рис. 1. Область Ω

Предполагается, что две пластины одинаковой толщины $h/2$ склеены вдоль отрезка γ . Первая (нижняя) пластина занимает область $\Omega \times (-h/2, 0)$ в $\mathbb{R}^3$. Обозначим через v_1^1, v_2^1, w^1 смещения точек срединной плоскости нижней пластины $\Omega \times \{-h/4\}$ вдоль осей x_1, x_2, z соответственно. Аналогично, для второй пластины $\Omega \times (0, h/2)$ со срединной плоскостью $\Omega \times \{h/4\}$ перемещения точек срединной плоскости обозначим через v_1^2, v_2^2, w^2 . Пусть $v^1 = (v_1^1, v_2^1)$ и $v^2 = (v_1^2, v_2^2)$, $x = (x_1, x_2)$. В рамках модели Кирхгофа-Лява перемещения в нижней и верхней пластинах определяются соответственно по формулам

$$V^1(x, z) = (v^1 - (z + \frac{h}{4})\nabla w^1, w^1), \quad x \in \Omega, \quad z \in (-\frac{h}{2}, 0),$$

$$V^2(x, z) = (v^2 - (z - \frac{h}{4})\nabla w^2, w^2), \quad x \in \Omega, \quad z \in (0, \frac{h}{2}).$$

Рассмотрим тензор модулей упругости $A^I = \{a_{ijkl}^I\}$, $i, j, k, l = 1, 2$. Индекс I , принимающий значения 1 и 2, указывает на то, что данная величина относится соответственно к нижней ($I = 1$) или верхней ($I = 2$) пластине. Тензор A^I обладает свойством симметрии $a_{ijkl}^I = a_{jikl}^I = a_{klij}^I$ и положительной определенности $a_{ijkl}^I \xi_{kl} \xi_{ij} \geq a_0^I |\xi|^2 \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad a_0^I = \text{const} > 0$, a_{ijkl}^I не зависят от x и z . Пусть $f^I = (f_1^I, f_2^I) \in L_2(\Omega)^2$, $F^I \in L_2(\Omega)$, $I = 1, 2$, — заданные функции.

В этом разделе рассмотрим случай, когда на контактной поверхности пластин действуют усилия, прямо пропорциональные разности перемещений $V^1(x, 0) - V^2(x, 0)$, с коэффициентом пропорциональности $\mu > 0$, где μ — параметр повреждаемости.

В этом случае имеем следующую краевую задачу для векторов $(v^I(x), w^I(x))$, $x \in \Omega_\gamma$:

$$-\text{div } \sigma^1(v^1) = f^1 - \mu g \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad \sigma^1(v^1) = A^1 \varepsilon(v^1) \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$-\text{div } \sigma^2(v^2) = f^2 + \mu g \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad \sigma^2(v^2) = A^2 \varepsilon(v^2) \quad \text{в } \Omega, \quad (2)$$

$$w^2 - w^1 \geq 0, \quad \Delta^2 w^1 + \Delta^2 w^2 - F^1 - F^2 = -\mu \text{div } g, \quad (3)$$

$$\Delta^2 w^1 - F^1 \leq -\frac{1}{2} \mu \text{div } g + \mu(w^2 - w^1) \quad \text{в } \Omega_\gamma,$$

$$(\Delta^2 w^1 - F^1 + \frac{1}{2} \mu \text{div } g - \mu(w^2 - w^1))(w^2 - w^1) = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad (4)$$

$$v^1 = v^2 = 0, \quad w^1 = \frac{\partial w^1}{\partial n} = 0, \quad w^2 = \frac{\partial w^2}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (5)$$

$$w^1 = w^2, \quad \nabla w^1 = \nabla w^2, \quad v^1 - \frac{1}{2} \nabla w^1 = v^2 + \frac{1}{2} \nabla w^2 \quad \text{на } \gamma, \quad (6)$$

$$[\sigma_\nu^1(v^1)] + [\sigma_\nu^2(v^2)] = 0, \quad [\sigma_\tau^1(v^1)] + [\sigma_\tau^2(v^2)] = 0, \quad \text{на } \gamma, \quad (7)$$

$$[t^1(w^1)] + [t^2(w^2)] - [\sigma_{12,1}^1(v^1)] = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad [\sigma_{12}^1(v^1)]|_{(-1,0)} = [\sigma_{12}^1(v^1)]|_{(0,0)} = 0, \quad (8)$$

$$[m^1(w^1)] + [m^2(w^2)] + \frac{1}{2} [\sigma_\nu^1(v^1)] - \frac{1}{2} [\sigma_\nu^2(v^2)] = 0 \quad \text{на } \gamma. \quad (9)$$

В (1) – (9) цилиндрические жесткости $D_I = E_I h^3 / 12 \cdot 2^3 (1 - \kappa_I^2)$ и толщина $h/2$ обеих пластин для простоты приняты равными единице. Здесь E_I — модуль Юнга и κ_I — коэффициент Пуассона I -й пластины. Для сокращения записи введена функция $g = v^1 - v^2 - \frac{1}{2} \nabla w^1 - \frac{1}{2} \nabla w^2$ — разность горизонтальных перемещений точек верхней крышки нижней и нижней крышки верхней пластины. Из условий (5) и (6) ясно, что $g|_\Gamma = g|_\gamma = 0$. Тензоры малых деформаций $\varepsilon(v^I) = \{\varepsilon_{ij}(v^I)\}$, определяются по формуле $\varepsilon_{ij}(v^I) = (v_{i,j}^I + v_{j,i}^I)/2$. Через $\sigma^I = \{\sigma_{ij}^I\}$ обозначен тензор напряжений для I -го слоя. Компоненты касательного вектора к некоторой кривой определяются через компоненты нормального вектора этой кривой по формуле $\tau = (\tau_1, \tau_2) = (-\nu_2, \nu_1)$. Произведением тензора напряжений и вектора нормали является вектор $\sigma^I \nu = (\sigma_{1j}^I \nu_j, \sigma_{2j}^I \nu_j)$, по повторяющимся индексам здесь и далее проводится суммирование. Кроме того, $\sigma_\nu^I = \sigma_{ij}^I \nu_j \nu_i$, $\sigma_\tau^I = \sigma^I \nu - \sigma_\nu^I \nu$, $\sigma_\tau^I = (\sigma_{\tau 1}^I, \sigma_{\tau 2}^I)$. Дивергенцией тензора напряжений σ^I является вектор $\sigma_{ij,j}^I$. Изгибающий момент и перерезывающая сила на кривой с нормалью ν и касательным вектором τ задаются формулами [11]

$$m^I(w^I) = \kappa_I \Delta w^I + (1 - \kappa_I) \frac{\partial^2 w^I}{\partial \nu^2}, \quad t^I(w^I) = \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta w^I + (1 - \kappa_I) \frac{\partial^2 w^I}{\partial \tau^2}).$$

Через Δ обозначен оператор Лапласа.

Первые равенства в (1) и (2) являются уравнениями равновесия в Ω_γ пластин, на верхней и нижней крышках нижней и верхней пластины соответственно действуют напряжения $\sigma_{i3}^I = -\mu g$. На нижней крышке нижней пластины и на верхней крышке верхней, горизонтальные напряжения отсутствуют. Вторыми тождествами в (1) и (2) задается линейный закон Гука в нижней и верхней пластинах соответственно. Произведением тензоров A^I и $\varepsilon(v^I)$ является тензор $A^I \varepsilon(v^I) = a_{ijkl}^I \varepsilon_{kl}(v^I)$. Первое неравенство (3) — это условие непроникания между пластинами. Второе соотношение (3) является еще одним условием равновесия двух пластин. Из равенства (4) ясно, что если прогибы пластин не совпадают, то нормальное поверхностное давление $(\Delta^2 w^1 + \mu \operatorname{div} g/2 - F^1)$, действующее на верхнюю крышку нижней пластины, определяется реакцией силы $\mu(w^2 - w^1)$, действующей перпендикулярно поверхности контакта. Если же прогибы двух пластин совпадают, то, согласно второму условию (3), на нижнюю пластину по вертикали будет действовать непосредственно давление $(-\Delta^2 w^2 + \mu \operatorname{div} g/2 + F^1)$ со стороны верхней пластины. Третье условие (3) показывает, что нормальное давление, действующее на верхнюю крышку нижней пластины, направлено в сторону отрицательных значений z . Условия (5) указывают на жесткое закрепление пластин на Γ . Равенства (6) — это условия склеивания обеих пластин на γ . Соотношения (7) — (9) задают граничные условия на отрезке γ .

Покажем существование и единственность решения задачи (1) — (9) с помощью вариационного подхода. Введем функциональные пространства

$$H_\Gamma^1(\Omega)^2 = \{ U \in H^1(\Omega)^2 \mid U = 0 \text{ на } \Gamma \},$$

$$H_\Gamma^2(\Omega) = \{ V \in H^2(\Omega) \mid V = \frac{\partial V}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma \}.$$

Введем множество допустимых перемещений

$$K = \{ (\bar{v}^1, \bar{w}^1, \bar{v}^2, \bar{w}^2) \in H_\Gamma^1(\Omega)^2 \times H_\Gamma^2(\Omega) \times H_\Gamma^1(\Omega)^2 \times H_\Gamma^2(\Omega) \mid \bar{w}^2 - \bar{w}^1 \geq 0 \text{ в } \Omega_\gamma, \quad \bar{w}^1 = \bar{w}^2, \quad \nabla \bar{w}^1 = \nabla \bar{w}^2, \quad \bar{v}^1 - \frac{1}{2} \nabla \bar{w}^1 = \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \nabla \bar{w}^2 \text{ на } \gamma \}.$$

Определим функционал потенциальной энергии на K

$$\begin{aligned} \Pi_\mu(\bar{v}^1, \bar{w}^1, \bar{v}^2, \bar{w}^2) = & \sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega \sigma^I(\bar{v}^I) \varepsilon(\bar{v}^I) + \frac{1}{2} B_I(\bar{w}^I, \bar{w}^I) - \int_\Omega f^I \bar{v}^I - \int_\Omega F^I \bar{w}^I \right\} + \\ & + \frac{\mu}{2} \int_\Omega (\bar{v}^1 - \bar{v}^2 - \frac{1}{2} \nabla \bar{w}^1 - \frac{1}{2} \nabla \bar{w}^2)^2 + \frac{\mu}{2} \int_\Omega (\bar{w}^2 - \bar{w}^1)^2. \end{aligned}$$

Здесь последнее и предпоследнее слагаемые дает работа упругих сил, связывающих обе пластины и действующих перпендикулярно плоскости контакта и в плоскости контакта соответственно. Свертка тензоров $\sigma_{ij}^I(\bar{v}^I) \varepsilon_{ij}(\bar{v}^I)$ обозначена через $\sigma^I(\bar{v}^I) \varepsilon(\bar{v}^I)$. Произведением двух векторов $f^I v^I$ является сумма $f_i^I v_i^I$. Билинейные формы B_I определены следующим образом:

$$B_I(w, \bar{w}) = \int_\Omega (w_{,11} \bar{w}_{,11} + w_{,22} \bar{w}_{,22} + \kappa_I (w_{,11} \bar{w}_{,22} + w_{,22} \bar{w}_{,11}) + 2(1 - \kappa_I) w_{,12} \bar{w}_{,12}).$$

Рассмотрим задачу минимизации функционала Π_μ на множестве допустимых перемещений

$$\Pi_\mu(v^1, w^1, v^2, w^2) = \inf_{(\bar{v}^1, \bar{w}^1, \bar{v}^2, \bar{w}^2) \in K} \Pi_\mu(\bar{v}^1, \bar{w}^1, \bar{v}^2, \bar{w}^2).$$

Множество K является выпуклым и замкнутым, и, следовательно, слабо замкнутым в пространстве $H_\Gamma^1(\Omega)^2 \times H_\Gamma^2(\Omega) \times H_\Gamma^1(\Omega)^2 \times H_\Gamma^2(\Omega)$. Функционал $\Pi_\mu(v^1, w^1, v^2, w^2)$ слабо полунепрерывен снизу и при $\mu > 0$ коэрцитивен на K . Тогда, см. [12], решение задачи минимизации существует и удовлетворяет вариационному неравенству

$$(v^1, w^1, v^2, w^2) \in K, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{I=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \sigma^I(v^I) \varepsilon(\bar{v}^I - v^I) + B_I(w^I, \bar{w}^I - w^I) - \int_{\Omega} f^I(\bar{v}^I - v^I) - \int_{\Omega} F^I(\bar{w}^I - w^I) \right\} + \\ + \mu \int_{\Omega} g(\bar{g} - g) + \mu \int_{\Omega} (w^2 - w^1)(\bar{w}^2 - \bar{w}^1 - w^2 + w^1) \geq 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\forall (\bar{v}^1, \bar{w}^1, \bar{v}^2, \bar{w}^2) \in K.$$

Поскольку $\Pi_\mu(v^1, w^1, v^2, w^2)$ — строго выпуклый функционал, то решение задачи (11) — (12) единственно.

Покажем, что вариационная и дифференциальная постановки эквивалентны для достаточно гладких функций. Для этого сначала подставим $\bar{v}^1 = v^1 \pm \varphi$, $\bar{w}^I = w^I$, $\bar{v}^2 = v^2$, где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2$ в (11). Из равенства

$$- \int_{\Omega} \sigma^1(v^1) \varepsilon(\varphi) - \int_{\Omega} f^1 \varphi + \mu \int_{\Omega} g \varphi = 0$$

следует, что первое уравнение равновесия (1) выполнено в Ω_γ . Аналогично получается второе уравнение равновесия (2).

Для вывода второго соотношения (3) возьмем $\bar{v}^I = v^I$, $\bar{w}^I = w^I \pm \psi$, где $\psi \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)$. Тогда

$$B_1(w^1, \psi) + B_2(w^2, \psi) - \int_{\Omega} (F^1 + F^2) \psi + \mu \int_{\Omega} g \left(\frac{1}{2} \nabla \psi + \frac{1}{2} \nabla \psi \right) = 0.$$

Далее, выберем в качестве тестовых функций $\bar{v}^I = v^I$, $\bar{w}^2 - \bar{w}^1 = w^2 - w^1 + \tilde{w}$, где $\tilde{w} \geq 0$, $\tilde{w} \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)$. Получим неравенство

$$\int_{\Omega_\gamma} (-\Delta^2 w^1 + F^1 - \frac{1}{2} \mu \operatorname{div} g + \mu(w^2 - w^1)) \tilde{w} \geq 0,$$

откуда вытекает третье условие (3).

Учитывая уже выведенные соотношения, найдем условия на отрезке, вдоль которого соединены пластины. Выбор функций $\bar{v}^I = v^I \pm \tilde{v}$, $\bar{w}^I = w^I$ где $\tilde{v} \in C_0^\infty(\Omega)^2$, приводит к равенству

$$\int_{\gamma} ([\sigma^1(v^1)] + [\sigma^2(v^2)]) \tilde{v} = 0. \quad (13)$$

Отсюда получим (7).

Возьмем $\bar{v}^I = v^I \pm \tilde{v}^I$, $\bar{w}^I = w^I \pm \tilde{w}$, где $\tilde{w} \in C_0^\infty(\Omega)$, и $\bar{v}^1 - \bar{v}^2 = \nabla \tilde{w}$ на γ . Этот набор тестовых функций с учетом (13) дает соотношение

$$-\int_{\gamma} ([\sigma_\nu^1(v^1)] + [m^1(w^1)] + [m^2(w^2)]) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \nu} - \int_{\gamma} [\sigma_\tau^1(v^1)] \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau} + \int_{\gamma} ([t^1(w^1)] + [t^2(w^2)]) \tilde{w} = 0.$$

Отсюда, в силу независимости функций $\partial \tilde{w} / \partial \nu$ и $\partial \tilde{w} / \partial \tau$ на γ получаем условие (9) и равенство

$$\int_{\gamma} ([t^1(w^1)] + [t^2(w^2)]) \tilde{w} + \int_{\gamma} [\sigma_\tau^1(v^1)] \tilde{w}_{,1} = 0.$$

Последнее равенство вместе с условием

$$\int_{\gamma} [t^1(w^1)] + [t^2(w^2)] = 0,$$

которое получается при выборе тестовых функций $\bar{v}^I = v^I$, $\bar{w}^I = w^I \pm \tilde{w}$, где $\nabla \tilde{w} = 0$ на γ , $\tilde{w} \in C_0^\infty(\Omega)$, приводит к соотношениям (8).

Применим к вариационному неравенству (12) формулу Грина [11] и используем все уже найденные условия. У нас останется одно слагаемое

$$\int_{\Omega_\gamma} (\Delta^2 w^1 - F^1 + \frac{1}{2} \mu \operatorname{div} g - \mu(w^2 - w^1))(w^2 - w^1) = 0.$$

Так как в левой части подынтегральная функция является знакоопределенной, то отсюда следует условие (4).

Нетрудно показать обратное, из уравнений и условий краевой задачи получается неравенство (12). Для этого возьмем второе равенство (3), умножим его на $(\bar{w}^1 - w^1)$ и проинтегрируем по области Ω :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_\gamma} (\Delta^2 w^1 + \Delta^2 w^2 - F^1 - F^2 + \mu \operatorname{div} g)(\bar{w}^1 - w^1) \leq \\ &\leq \int_{\Omega_\gamma} (\Delta^2 w^1 - F^1 + \frac{1}{2} \mu \operatorname{div} g - \mu(w^2 - w^1))(\bar{w}^1 - w^1) + \\ &+ \int_{\Omega_\gamma} (\Delta^2 w^2 - F^2 + \frac{1}{2} \mu \operatorname{div} g + \mu(w^2 - w^1))(\bar{w}^2 - w^2) = \\ &= \int_{\Omega_\gamma} \Delta^2 w^1 (\bar{w}^1 - w^1) + \int_{\Omega_\gamma} \Delta^2 w^2 (\bar{w}^2 - w^2) - \int_{\Omega} F^1 (\bar{w}^1 - w^1) - \int_{\Omega} F^2 (\bar{w}^2 - w^2) + \\ &+ \mu \int_{\Omega} (w^2 - w^1)(\bar{w}^2 - \bar{w}^1 - w^2 + w^1) + \frac{1}{2} \mu \int_{\Omega_\gamma} \operatorname{div} g (\bar{w}^2 + \bar{w}^1 - w^2 - w^1). \end{aligned}$$

Для того, чтобы перейти к неравенству, понадобятся все соотношения (3) и (4). В последнем равенстве слагаемые были перегруппированы для удобства дальнейших преобразований. Введем обозначения

$$I_1 = \int_{\Omega_\gamma} \Delta^2 w^1 (\bar{w}^1 - w^1) + \int_{\Omega_\gamma} \Delta^2 w^2 (\bar{w}^2 - w^2),$$

$$I_2 = - \int_{\Omega} F^1(\bar{w}^1 - w^1) - \int_{\Omega} F^2(\bar{w}^2 - w^2) + \mu \int_{\Omega} (w^2 - w^1)(\bar{w}^2 - \bar{w}^1 - w^2 + w^1),$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \mu \int_{\Omega_{\gamma}} \operatorname{div} g(\bar{w}^2 + \bar{w}^1 - w^2 - w^1).$$

Воспользуемся формулами Грина, приведенными в [11], для преобразования I_1 и I_3 . Начнем с I_1 :

$$I_1 = B_1(w^1, \bar{w}^1 - w^1) + B_2(w^2, \bar{w}^2 - w^2) + \int_{\gamma} [m^1(w^1)] \left(\frac{\partial \bar{w}^1}{\partial \nu} - \frac{\partial w^1}{\partial \nu} \right) +$$

$$+ \int_{\gamma} [m^2(w^2)] \left(\frac{\partial \bar{w}^2}{\partial \nu} - \frac{\partial w^2}{\partial \nu} \right) - \int_{\gamma} [t^1(w^1)] (\bar{w}^1 - w^1) - \int_{\gamma} [t^2(w^2)] (\bar{w}^2 - w^2) =$$

$$= B_1(w^1, \bar{w}^1 - w^1) + B_2(w^2, \bar{w}^2 - w^2) +$$

$$+ \int_{\gamma} ([m^1(w^1)] + [m^2(w^2)]) \left(\frac{\partial \bar{w}^1}{\partial \nu} - \frac{\partial w^1}{\partial \nu} \right) - \int_{\gamma} ([t^1(w^1)] + [t^2(w^2)]) (\bar{w}^1 - w^1).$$

Для того, чтобы вывести последнее равенство, были использованы условия (5) и (6). Преобразуем I_3 :

$$I_3 = -\frac{\mu}{2} \int_{\Omega} g(\nabla \bar{w}^2 + \nabla \bar{w}^1 - \nabla w^2 - \nabla w^1) =$$

$$= -\mu \int_{\Omega} g(\bar{v}^1 - v^1) + \mu \int_{\Omega} g(\bar{v}^2 - v^2) + \mu \int_{\Omega} g(\bar{g} - g).$$

Далее, возьмем уравнения равновесия (1) и (2), а также условия (5), второе и третье равенства (6) и оба соотношения (7):

$$I_3 = \sum_{I=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \sigma^I(v^I) \varepsilon(\bar{v}^I - v^I) - \int_{\Omega} f^I(\bar{v}^I - v^I) + \int_{\gamma} [\sigma_{\nu}^I(v^I)] (\bar{v}_{\nu}^I - v_{\nu}^I) + \right.$$

$$+ \int_{\gamma} [\sigma_{\tau}^I(v^I)] (\bar{v}_{\tau}^I - v_{\tau}^I) \left. \right\} + \mu \int_{\Omega} g(\bar{g} - g) = \sum_{I=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \sigma^I(v^I) \varepsilon(\bar{v}^I - v^I) - \int_{\Omega} f^I(\bar{v}^I - v^I) \right\} +$$

$$+ \mu \int_{\Omega} g(\bar{g} - g) + \int_{\gamma} [\sigma_{\nu}^1(v^1)] \left(\frac{\partial \bar{w}^1}{\partial \nu} - \frac{\partial w^1}{\partial \nu} \right) + \int_{\gamma} [\sigma_{\tau}^1(v^1)] \left(\frac{\partial \bar{w}^1}{\partial \tau} - \frac{\partial w^1}{\partial \tau} \right).$$

Подставим полученные выражения для I_1 и I_3 в неравенство:

$$0 \leq I_1 + I_2 + I_3 = \sum_{I=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \sigma^I(v^I) \varepsilon(\bar{v}^I - v^I) + B_I(w^I, \bar{w}^I - w^I) - \int_{\Omega} f^I(\bar{v}^I - v^I) - \right.$$

$$- \int_{\Omega} F^I(\bar{w}^I - w^I) \left. \right\} + \mu \int_{\Omega} g(\bar{g} - g) + \mu \int_{\Omega} (w^2 - w^1)(\bar{w}^2 - \bar{w}^1 - w^2 + w^1) +$$

$$+ \int_{\gamma} ([\sigma_{\nu}^1(v^1)] + [m^1(w^1)] + [m^2(w^2)]) \left(\frac{\partial \bar{w}^1}{\partial \nu} - \frac{\partial w^1}{\partial \nu} \right) -$$

$$- \int_{\gamma} ([t^1(w^1)] + [t^2(w^2)])(\bar{w}^1 - w^1) + \int_{\gamma} [\sigma_{\tau}^1(v^1)] \left(\frac{\partial \bar{w}^1}{\partial \tau} - \frac{\partial w^1}{\partial \tau} \right).$$

Последние два слагаемых в этом выражении равны нулю в силу соотношений (7) и условий (8) и (9). Таким образом, используя (1) – (9), получили (12).

Если не предполагать дополнительной гладкости решения, то соотношения (1) – (9) также могут быть получены, для чего воспользуемся результатами, изложенными в [11,12]. Продолжим отрезок γ до замкнутой кривой Σ класса $C^{1,1}$, принадлежащей Ω . Единичный вектор нормали ν определен на Σ , причем на γ эта нормаль совпадает с ранее выбранной. Введем пространства $H^{N/2}(\Sigma)$, где $N = 1, 3$, с нормами

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Sigma)}^2 = \|\varphi\|_{L_2(\Sigma)}^2 + \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x - y|^2},$$

$$\|\varphi\|_{H^{3/2}(\Sigma)}^2 = \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Sigma)}^2 + \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{|\nabla \varphi(x) - \nabla \varphi(y)|^2}{|x - y|^2}.$$

Обозначим через $H^{-1/2}(\Sigma)$ и $H^{-3/2}(\Sigma)$ пространства, сопряженные к $H^{1/2}(\Sigma)$ и $H^{3/2}(\Sigma)$ соответственно. Также будем использовать пространства функций $H_{00}^{N/2}(\sigma)$, продолженных нулем вне σ , где $\sigma = \gamma$ или $\sigma = \Sigma \setminus \bar{\gamma}$. Ряд утверждений, описывающих свойства функций из пространств $H_{00}^{N/2}(\sigma)$ приведен в [11,12]. Через $H_{00}^{-N/2}(\sigma)$ будем обозначать пространства, сопряженные к $H_{00}^{N/2}(\sigma)$. Предположим, что $(v^1, w^1, v^2, w^2) \in K$, а также $\operatorname{div} \sigma^I(v^I) \in L_2(\Omega_{\gamma})^2$, $\Delta^2 w^I \in L_2(\Omega_{\gamma})$. Имеют место включения

$$v^I \in H^{1/2}(\Sigma)^2, \quad w^I \in H^{3/2}(\Sigma), \quad \nabla w^I \in H^{1/2}(\Sigma)^2.$$

Пусть $(\cdot, \cdot)_{\Omega_{\gamma}}$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega_{\gamma})$, угловые скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle_{N/2, \Sigma}$ обозначают двойственность между пространствами $H^{N/2}(\Sigma)$ и $H^{-N/2}(\Sigma)$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle_{N/2, \sigma}^{00}$ — двойственность между пространствами $H_{00}^{N/2}(\sigma)$ и $H_{00}^{-N/2}(\sigma)$.

Воспользовавшись формулой Грина [11], получим следующие выводы. Уравнения равновесия (1), (2) и второе соотношение (3) выполнены в смысле обобщенных функций. Третье условие (3) и условие (4) выполняется соответственно в смысле

$$(\Delta^2 w^1 - F^1 + \frac{1}{2} \mu \operatorname{div} g - \mu(w^2 - w^1), \psi)_{\Omega_{\gamma}} \leq 0, \quad \forall \psi \in H_0^2(\Omega_{\gamma}), \quad \psi \geq 0 \text{ в } \Omega_{\gamma},$$

$$(\Delta^2 w^1 - F^1 + \frac{1}{2} \mu \operatorname{div} g - \mu(w^2 - w^1), w^2 - w^1)_{\Omega_{\gamma}} = 0.$$

Соотношения (7) могут быть записаны в виде

$$\langle [\sigma_{\nu}^1(v^1)] + [\sigma_{\nu}^2(v^2)], \phi \rangle_{1/2, \Sigma} = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

$$\langle [\sigma_{\tau}^1(v^1)] + [\sigma_{\tau}^2(v^2)], \varphi \rangle_{1/2, \Sigma} = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)^2, \quad (\varphi, \nu) = 0 \text{ на } \gamma.$$

Условия (8) выполняются в смысле

$$\langle [t^1(w^1)] + [t^2(w^2)], \psi \rangle_{3/2, \Sigma} - \langle [\sigma_{\tau}^1(v^1)], \partial \psi / \partial \tau \rangle_{1/2, \Sigma} = 0, \quad \forall \psi \in H_0^2(\Omega),$$

$$\langle [t^1(w^1)] + [t^2(w^2)], \psi \rangle_{3/2, \Sigma \setminus \bar{\gamma}}^{00} = 0 \quad \forall \psi \in H_{00}^{3/2}(\Sigma \setminus \bar{\gamma}),$$

$$\langle [t^1(w^1)], \psi \rangle_{3/2, \Sigma \setminus \bar{\gamma}}^{00} \leq 0 \quad \forall \psi \in H_{00}^{3/2}(\Sigma \setminus \bar{\gamma}), \quad \psi \geq 0,$$

$$\langle [\sigma_{\tau}^I(v^I)], \varphi \rangle_{1/2, \Sigma \setminus \bar{\gamma}}^{00} = 0, \quad \forall \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma \setminus \bar{\gamma})^2, \quad \langle [t^1(w^1)], w^2 - w^1 \rangle_{3/2, \Sigma \setminus \bar{\gamma}}^{00} = 0.$$

Для (9) имеем

$$\begin{aligned} &< [m^1(w^1)] + [m^2(w^2)] + [\sigma_\nu^1(v^1)], \phi >_{1/2, \Sigma} = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \\ &< [m^I(w^I)], \phi >_{1/2, \Sigma \setminus \bar{\gamma}}^{00} = < [\sigma_\nu^I(v^I)], \phi >_{1/2, \Sigma \setminus \bar{\gamma}}^{00} = 0, \quad \forall \phi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma \setminus \bar{\gamma}). \end{aligned}$$

3. ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ПРИ $\mu \rightarrow 0$

Теперь устремим параметр μ к нулю в задаче (11) – (12). Для этого подставим в вариационное неравенство (12) последовательно пробные функции $(\bar{v}^1, \bar{w}^1, \bar{v}^2, \bar{w}^2) = (0, 0, 0, 0)$ и $(\bar{v}^1, \bar{w}^1, \bar{v}^2, \bar{w}^2) = 2(v^1, w^1, v^2, w^2)$. Из равенства

$$\begin{aligned} &\sum_{I=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \sigma^I(v^I) \varepsilon(v^I) + B_I(w^I, w^I) - \int_{\Omega} f^I v^I - \int_{\Omega} F^I w^I \right\} + \\ &+ \mu \int_{\Omega} g^2 + \mu \int_{\Omega} (w^2 - w^1)^2 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

получим равномерные по μ оценки

$$\|v^1\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega)^2} \leq C_1, \quad \|w^1\|_{H_{\Gamma}^2(\Omega)} \leq C_1, \quad \|v^2\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega)^2} \leq C_1, \quad \|w^2\|_{H_{\Gamma}^2(\Omega)} \leq C_1, \quad (15)$$

$$0 \leq \mu \int_{\Omega} (v^1 - v^2 - \frac{1}{2} \nabla w^1 - \frac{1}{2} \nabla w^2)^2 \leq C_1, \quad 0 \leq \mu \int_{\Omega} (w^2 - w^1)^2 \leq C_1. \quad (16)$$

Оценки (15), (16) означают, что

$$0 \leq \int_{\Omega} (v^1 - v^2 - \frac{1}{2} \nabla w^1 - \frac{1}{2} \nabla w^2)^2 \leq C_2, \quad 0 \leq \int_{\Omega} (w^2 - w^1)^2 \leq C_2. \quad (17)$$

Константы C_1, C_2 не зависят от μ .

Из (15) следует, что существуют подпоследовательности $v^{\mu I}, w^{\mu I}$ такие, что при $\mu \rightarrow 0$

$$v^{\mu I} \rightarrow v^{0I} \text{ слабо в } H_{\Gamma}^1(\Omega)^2, \quad w^{\mu I} \rightarrow w^{0I} \text{ слабо в } H_{\Gamma}^2(\Omega),$$

где $v^{0I} \in H_{\Gamma}^1(\Omega)^2, w^{0I} \in H_{\Gamma}^2(\Omega)$ – некоторые функции.

Переходя к нижнему пределу при $\mu \rightarrow 0$ в (12), получим вариационное неравенство для задачи контакта без трения двух пластин, где пластины расположены параллельно друг другу без зазора и соединены вдоль отрезка внутри области контакта:

$$(v^{01}, w^{01}, v^{02}, w^{02}) \in K, \quad (18)$$

$$\sum_{I=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \sigma^I(v^{0I}) \varepsilon(\bar{v}^I - v^{0I}) + B_I(w^{0I}, \bar{w}^I - w^{0I}) - \int_{\Omega} f^I (\bar{v}^I - v^{0I}) - \int_{\Omega} F^I (\bar{w}^I - w^{0I}) \right\} \geq 0 \quad (19)$$

$$\forall (\bar{v}^1, \bar{w}^1, \bar{v}^2, \bar{w}^2) \in K.$$

Это неравенство означает, что слабые пределы v^{0I} и w^{0I} являются решением задачи, соответствующей нулевому значению параметра μ . Множество допустимых перемещений определено в (10), т. е. остается тем же самым, что и в задаче равновесия пластины с дефектом с параметром повреждаемости μ .

Полученное неравенство (18) – (19) является вариационным для задачи минимизации функционала

$$\Pi_0(\bar{v}^1, \bar{w}^1, \bar{v}^2, \bar{w}^2) = \sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^I(\bar{v}^I) \varepsilon(\bar{v}^I) + \frac{1}{2} B_I(\bar{w}^I, \bar{w}^I) - \int_{\Omega} f^I \bar{v}^I - \int_{\Omega} F^I \bar{w}^I \right\}$$

на K . Решение (18) – (19) существует и единственно.

Задача (18) – (19) для достаточно гладких функций эквивалентна краевой задаче нахождения векторов $(v^{01}(x), w^{01}(x))$ и $(v^{02}(x), w^{02}(x))$, где $x \in \Omega_\gamma$, удовлетворяющих уравнениям:

$$-\operatorname{div} \sigma^1(v^{01}) = f^1 \text{ в } \Omega_\gamma, \quad \sigma^1(v^{01}) = A^1 \varepsilon(v^{01}) \text{ в } \Omega, \quad (20)$$

$$-\operatorname{div} \sigma^2(v^{02}) = f^2 \text{ в } \Omega_\gamma, \quad \sigma^2(v^{02}) = A^2 \varepsilon(v^{02}) \text{ в } \Omega, \quad (21)$$

$$w^{02} - w^{01} \geq 0, \quad \Delta^2 w^{01} + \Delta^2 w^{02} = F^1 + F^2, \quad \Delta^2 w^{01} - F^1 \leq 0, \quad (22)$$

$$(\Delta^2 w^{01} - F^1)(w^{02} - w^{01}) = 0 \text{ в } \Omega_\gamma,$$

$$v^{01} = v^{02} = 0, \quad w^{01} = \frac{\partial w^{01}}{\partial n} = 0, \quad w^{02} = \frac{\partial w^{02}}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (23)$$

$$w^{01} = w^{02}, \quad \nabla w^{01} = \nabla w^{02}, \quad v^{01} - \frac{1}{2} \nabla w^{01} = v^{02} + \frac{1}{2} \nabla w^{02} \text{ на } \gamma, \quad (24)$$

$$[\sigma_\nu^1(v^{01})] + [\sigma_\nu^2(v^{02})] = 0, \quad [\sigma_\tau^1(v^{01})] + [\sigma_\tau^2(v^{02})] = 0 \text{ на } \gamma, \quad (25)$$

$$[t^1(w^{01})] + [t^2(w^{02})] - [\sigma_{12,1}^1(v^{01})] = 0 \text{ на } \gamma, \quad (26)$$

$$[\sigma_{12}^1(v^{01})]|_{(-1,0)} = [\sigma_{12}^1(v^{01})]|_{(0,0)} = 0,$$

$$[m^1(w^{01})] + [m^2(w^{02})] + \frac{1}{2} [\sigma_\nu^1(v^{01})] - \frac{1}{2} [\sigma_\nu^2(v^{02})] = 0 \text{ на } \gamma. \quad (27)$$

Нетрудно показать, что из соотношений (20) – (27) выводится неравенство (19). Условия (26) и (27) связывают между собой функции горизонтальных перемещений на срединных поверхностях пластин и функции их вертикальных прогибов. То есть задача не распадается на две независимые задачи для v^{01} , v^{02} и w^1 , w^2 .

Для случая нулевого значения параметра μ также возможно отказаться от требования дополнительной гладкости решения. Предположим, что $v^{0I}, w^{0I} \in K$, а также $\operatorname{div} \sigma^I(v^{0I}) \in L_2(\Omega_\gamma)^2$, $\Delta^2 w^{0I} \in L_2(\Omega_\gamma)$. Тогда уравнения равновесия (20), (21) и второе соотношение (22) будут выполняться в смысле обобщенных функций. Третье и четвертое соотношения (22) соответственно выполняются в смысле

$$(\Delta^2 w^{01} - F^1, \psi)_{\Omega_\gamma} \leq 0 \quad \forall \psi \in H_0^2(\Omega_\gamma), \quad \psi \geq 0 \text{ в } \Omega_\gamma, \quad (\Delta^2 w^{01} - F^1, w^{02} - w^{01})_{\Omega_\gamma} = 0.$$

Для (25) имеем

$$< [\sigma_\nu^1(v^{01})] + [\sigma_\nu^2(v^{02})], \phi >_{1/2, \Sigma} = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

$$< [\sigma_\tau^1(v^{01}) + \sigma_\tau^2(v^{02})], \varphi >_{1/2, \Sigma} = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)^2, \quad (\varphi, \nu) = 0 \text{ на } \gamma.$$

Условия (26) и (27) соответственно выполняются в следующем виде

$$< [t^1(w^{01})] + [t^2(w^{02})], \psi >_{3/2, \Sigma} - < [\sigma_\tau^1(v^{01})], \partial \psi / \partial \tau >_{1/2, \Sigma} = 0, \quad \forall \psi \in H_0^2(\Omega),$$

$$< [t^1(w^{01})] + [t^2(w^{02})], \psi >_{3/2, \Sigma \setminus \bar{\gamma}}^{00} = 0 \quad \forall \psi \in H_{00}^{3/2}(\Sigma \setminus \bar{\gamma}),$$

$$\begin{aligned}
& < [t^1(w^{01})], \psi >_{3/2, \Sigma \setminus \bar{\gamma}}^{00} \leq 0 \quad \forall \psi \in H_{00}^{3/2}(\Sigma \setminus \bar{\gamma}), \quad \psi \geq 0, \\
& < [\sigma_\tau^I(v^{0I})], \varphi >_{1/2, \Sigma \setminus \bar{\gamma}}^{00} = 0, \quad \forall \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma \setminus \bar{\gamma})^2, \quad < [t^1(w^{01})], w^2 - w^1 >_{3/2, \Sigma \setminus \bar{\gamma}}^{00} = 0. \\
& < [m^1(w^{01})] + [m^2(w^{02})] + \frac{1}{2}[\sigma_\nu^1(v^{01})] - \frac{1}{2}[\sigma_\nu^2(v^{02})], \phi >_{1/2, \Sigma} = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \\
& < [m^I(w^{0I})], \phi >_{1/2, \Sigma \setminus \bar{\gamma}}^{00} = < [\sigma_\nu^I(v^{0I})], \phi >_{1/2, \Sigma \setminus \bar{\gamma}}^{00} = 0, \quad \forall \phi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma \setminus \bar{\gamma}).
\end{aligned}$$

4. ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ПРИ $\mu \rightarrow \infty$

Теперь рассмотрим переход к пределу при стремлении значения параметра μ к бесконечности в (11) – (12).

Из равенства (14) получим равномерные по μ оценки для больших значений параметра:

$$\|v^1\|_{H_\Gamma^1(\Omega)^2} \leq C_3, \quad \|w^1\|_{H_\Gamma^2(\Omega)} \leq C_3, \quad \|v^2\|_{H_\Gamma^1(\Omega)^2} \leq C_3, \quad \|w^2\|_{H_\Gamma^2(\Omega)} \leq C_3, \quad (28)$$

$$0 \leq \mu \int_{\Omega} (v^1 - v^2 - \frac{1}{2} \nabla w^1 - \frac{1}{2} \nabla w^2)^2 \leq C_3, \quad 0 \leq \mu \int_{\Omega} (w^2 - w^1)^2 \leq C_3. \quad (29)$$

Из (28) следует, что можно выбрать слабо сходящиеся подпоследовательности $v^{\mu I}, w^{\mu I}$ такие, что при $\mu \rightarrow \infty$

$$v^{\mu I} \rightarrow v^{*I} \text{ слабо в } H_\Gamma^1(\Omega)^2, \quad w^{\mu I} \rightarrow w^{*I} \text{ слабо в } H_\Gamma^2(\Omega),$$

где $v^{*I} \in H_\Gamma^1(\Omega)^2, w^{*I} \in H_\Gamma^2(\Omega)$ – некоторые функции.

Неравенства (29) означают, что

$$\|w^{\mu 2} - w^{\mu 1}\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0, \quad \|v^{\mu 1} - v^{\mu 2} - \frac{1}{2} \nabla w^{\mu 1} - \frac{1}{2} \nabla w^{\mu 2}\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0,$$

т. е. $w^{*2} - w^{*1} = 0$ и $v^{*1} - v^{*2} - \nabla w^{*1}/2 - \nabla w^{*2}/2 = 0$ почти всюду в Ω .

Выберем в качестве тестовых функции, удовлетворяющие условию склеивания перемещений на всей поверхности контакта $\bar{w}^1 = \bar{w}^2, \bar{v}^1 - \frac{1}{2} \nabla \bar{w}^1 = \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \nabla \bar{w}^2$. Тогда становится возможным устремить параметр μ к бесконечности в неравенстве (12), так как последние два слагаемых в нем оказываются тождественно равными нулю. В результате получим вариационное равенство

$$(v^{*1}, v^{*2}, w^*) \in K^*, \quad (30)$$

$$\sum_{I=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \sigma^I(v^{*I}) \varepsilon(\bar{v}^I) + B_I(w^*, \bar{w}) - \int_{\Omega} f^I \bar{v} - \int_{\Omega} F^I \bar{w} \right\} = 0 \quad \forall (\bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{w}) \in K^*. \quad (31)$$

Множество допустимых приближений в этом случае принимает вид

$$K^* = \{(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{w}) \in H_\Gamma^1(\Omega)^2 \times H_\Gamma^1(\Omega)^2 \times H_\Gamma^2(\Omega) | \bar{v}^1 - \bar{v}^2 - \nabla \bar{w} = 0 \text{ в } \Omega\}.$$

Уравнение (30) – (31) соответствует задаче минимизации функционала

$$\Pi^*(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{w}) = \sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^I(\bar{v}^I) \varepsilon(\bar{v}^I) + \frac{1}{2} B_I(\bar{w}, \bar{w}) - \int_{\Omega} f^I \bar{v} - \int_{\Omega} F^I \bar{w} \right\}$$

на множестве K^* , которая является однозначно разрешимой.

Для достаточно гладких функций из вариационной задачи (30) – (31) возможно вывести систему дифференциальных уравнений:

$$-\operatorname{div} \sigma^1(v^{*1}) - \operatorname{div} \sigma^2(v^{*2}) = f^1 + f^2, \quad \sigma^I(v^{*I}) = A^I \varepsilon(v^{*I}) \quad \text{в } \Omega, \quad (32)$$

$$(D_1 + D_2) \Delta^2 w^* + \frac{h^2}{8} (\sigma_{ij,ij}^1(v^{*1}) + f_{i,i}^1 - \sigma_{ij,ij}^2(v^{*2}) - f_{i,i}^2) = F^1 + F^2 \quad \text{в } \Omega, \quad (33)$$

$$v^{*1} - \frac{h}{4} \nabla w^* = v^{*2} + \frac{h}{4} \nabla w^* \quad \text{в } \Omega \quad (34)$$

$$v^{*1} = v^{*2} = 0, \quad w^* = \frac{\partial w^*}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (35)$$

В (32) – (35) восстановлены коэффициенты, ранее принятые за единицу.

Покажем, что задача (30) – (31) и система (32) – (35) эквивалентны. Сначала получим систему дифференциальных уравнений из вариационного равенства. Предположим дополнительно, что $f^I \in C^1(\bar{\Omega})$. В качестве тестовых функций выберем $\bar{v}^I = \varphi$, $\bar{w} = 0$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C_0^\infty(\Omega)^2$. Из равенства

$$\int_{\Omega} \sigma^1(v^{*1}) \varepsilon(\varphi) + \int_{\Omega} \sigma^2(v^{*2}) \varepsilon(\varphi) - \int_{\Omega} (f^1 + f^2) \varphi = 0$$

получается первое уравнение (32). Для вывода (33) возьмем $\bar{w} = \phi$, где $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, тогда из условия склеивания следует, что $\bar{v}^1 = \frac{h}{4} \nabla \phi$, $\bar{v}^2 = -\frac{h}{4} \nabla \phi$. Отсюда

$$\sum_{I=1}^2 \frac{1}{2} (-1)^{I+1} \int_{\Omega} (\sigma^I(v^{*I}) \varepsilon(\nabla \phi) - f^I \nabla \phi) + \sum_{I=1}^2 \{B_I(w^*, \phi) - \int_{\Omega} F^I \phi\} = 0.$$

Покажем обратное, что из (32) – (35) получается равенство (30) – (31). Пусть $(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{w}) \in K^*$. Возьмем первое равенство (32) и умножим его на функцию $\bar{v}^1 - \frac{h}{4} \nabla \bar{w}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{I=1}^2 \frac{h}{2} \int_{\Omega} (-\operatorname{div} \sigma^I(v^{*I}) - f^I) (\bar{v}^1 - \frac{h}{4} \nabla \bar{w}) = \\ &= \frac{h}{2} \int_{\Omega} (-\operatorname{div} \sigma^1(v^{*1}) - f^1) (\bar{v}^1 - \frac{h}{4} \nabla \bar{w}) + \frac{h}{2} \int_{\Omega} (-\operatorname{div} \sigma^2(v^{*2}) - f^2) (\bar{v}^2 + \frac{h}{4} \nabla \bar{w}) = \\ &= \sum_{I=1}^2 \frac{h}{2} \left\{ \int_{\Omega} \sigma^I(v^{*I}) \varepsilon(\bar{v}^I) - \int_{\Omega} f^I \bar{v}^I \right\} + I, \end{aligned}$$

где

$$I = \frac{h^2}{8} \int_{\Omega} \{ \operatorname{div} \sigma^1(v^{*1}) + f^1 - \operatorname{div} \sigma^2(v^{*2}) - f^2 \} \nabla \bar{w}.$$

Далее воспользуемся формулой Грина и уравнением (33), получим

$$I = \sum_{I=1}^2 \int_{\Omega} \{ D_I \Delta^2 w^* - F^I \} \bar{w} = \sum_{I=1}^2 \int_{\Omega} \{ D_I B_1(w^*, \bar{w}) - \int_{\Omega} F^I \bar{w} \}.$$

Таким образом, вывели равенство

$$\sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{h}{2} \int_{\Omega} \sigma^I(v^{*I}) \varepsilon(\bar{v}^I) + D_I B_1(w^*, \bar{w}) - \frac{h}{2} \int_{\Omega} f^I \bar{v}^I - \int_{\Omega} F^I \bar{w} \right\} = 0,$$

где $(v^{*1}, v^{*2}, w^*) \in K^*$. Положив в этой формуле цилиндрические жесткости D_I и толщину $h/2$ обеих пластин равными единице, получим вариационное равенство (30) – (31).

Система (32) – (35) с точностью до обозначений совпадает с уравнением равновесия двухслойной пластины (см., например, в [8;16, стр. 50]), для которой приняты гипотезы Кирхгофа–Лява. То есть слабый предел последовательности решений задач (11)–(12) при $\mu \rightarrow \infty$ является решением задачи равновесия двухслойной пластины Кирхгофа–Лява, где каждый слой имеет толщину $h/2$, а полная толщина монолитной пластины – h .

5. СИЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (11) – (12) К РЕШЕНИЮ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

В разделе 2 и 3 была доказана слабая сходимость решения (11) – (12) к решению задачи (18) – (19) при $\mu \rightarrow 0$ и к решению задачи (30) – (31) при $\mu \rightarrow \infty$. Покажем, что на самом деле имеет место сильная сходимость.

А Случай $\mu \rightarrow 0$. Будем использовать равенство (14) и тем же способом выведем аналогичное равенство для задачи (18)–(19)

$$\sum_{n=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \sigma^I(v^{0I}) \varepsilon(v^{0I}) + B_I(w^{0I}, w^{0I}) - \int_{\Omega} f^I v^{0I} - \int_{\Omega} F^I w^{0I} \right\} = 0. \quad (36)$$

Используем слабую сходимость $v^I \rightarrow v^{0I}$ в $H_{\Gamma}^1(\Omega)^2$, $w^I \rightarrow w^{0I}$ в $H_{\Gamma}^2(\Omega)$ при $\mu \rightarrow 0$, доказанную в разделе 2 настоящей работы. Из соотношений (14) и (36) с учетом (17) следует, что при $\mu \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sum_{I=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \sigma^I(v^I) \varepsilon(v^I) + B_I(w^I, w^I) \right\} &= \sum_{I=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} f^I v^I + \int_{\Omega} F^I w^I \right\} - \\ - \mu \int_{\Omega} (v^1 - v^2 - \frac{1}{2} \nabla w^1 - \frac{1}{2} \nabla w^2)^2 - \mu \int_{\Omega} (w^2 - w^1)^2 &\rightarrow \sum_{I=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} f^I v^{0I} + \int_{\Omega} F^I w^{0I} \right\} = \\ &= \sum_{I=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \sigma^I(v^{0I}) \varepsilon(v^{0I}) + B_I(w^{0I}, w^{0I}) \right\}. \end{aligned}$$

Используя эту сходимость, а также условия

$$\liminf \int_{\Omega} \sigma^I(v^I) \varepsilon(v^I) \geq \int_{\Omega} \sigma^I(v^{0I}) \varepsilon(v^{0I}), \quad \liminf B_I(w^I, w^I) \geq B_I(w^{0I}, w^{0I}),$$

получим, что $v^I \rightarrow v^{0I}$ сильно в $H_{\Gamma}^1(\Omega)^2$ и $w^I \rightarrow w^{0I}$ сильно в $H_{\Gamma}^2(\Omega)$.

Б Случай $\mu \rightarrow \infty$. Здесь мы не знаем заранее, как поведут себя слагаемые с множителем μ при $\mu \rightarrow \infty$. Поэтому сначала воспользуемся равенствами (14) и (31) и слабой сходимостью $v^I \rightarrow v^{*I}$ в $H_{\Gamma}^1(\Omega)^2$, $w^I \rightarrow w^*$ в $H_{\Gamma}^2(\Omega)$ и выведем цепочку неравенств, справедливых при $\mu \rightarrow \infty$

$$0 \leq \liminf \left\{ \mu \int_{\Omega} (v^1 - v^2 - \frac{1}{2} \nabla w^1 - \frac{1}{2} \nabla w^2)^2 + \mu \int_{\Omega} (w^2 - w^1)^2 \right\} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \limsup \left\{ \mu \int_{\Omega} (v^1 - v^2 - \frac{1}{2} \nabla w^1 - \frac{1}{2} \nabla w^2)^2 + \mu \int_{\Omega} (w^2 - w^1)^2 \right\} = \\
&= \limsup \sum_{I=1}^2 \left\{ - \int_{\Omega} \sigma^I(v^I) \varepsilon(v^I) - B_I(w^I, w^I) + \int_{\Omega} f^I v^I + \int_{\Omega} F^I w^I \right\} \leq \\
&\leq \limsup \sum_{n=1}^2 \left\{ - \int_{\Omega} \sigma^I(v^{*I}) \varepsilon(v^{*I}) - B_I(w^*, w^*) + \int_{\Omega} f^I v^{*I} + \int_{\Omega} F^I w^* \right\} = 0.
\end{aligned}$$

То есть

$$\mu \int_{\Omega} (v^1 - v^2 - \frac{1}{2} \nabla w^1 - \frac{1}{2} \nabla w^2)^2 + \mu \int_{\Omega} (w^2 - w^1)^2 \rightarrow 0.$$

Это значит, что $\int_{\Omega} (v^1 - v^2 - \frac{1}{2} \nabla w^1 - \frac{1}{2} \nabla w^2)^2$ и $\int_{\Omega} (w^2 - w^1)^2$ при больших μ являются величинами более высокого порядка малости, чем $1/\mu$. Отсюда следует сходимость

$$\sum_{I=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \sigma^I(v^I) \varepsilon(v^I) + B_I(w^I, w^I) \right\} \rightarrow \sum_{I=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \sigma^I(v^{*I}) \varepsilon(v^{*I}) + B_I(w^*, w^*) \right\}.$$

Используя оценки

$$\liminf \int_{\Omega} \sigma^I(v^I) \varepsilon(v^I) \geq \int_{\Omega} \sigma^I(v^{*I}) \varepsilon(v^{*I}), \quad \liminf B_I(w^I, w^I) \geq B_I(w^*, w^*),$$

получим, что $v^I \rightarrow v^{*I}$ сильно в $H_1^1(\Omega)^2$ и $w^I \rightarrow w^*$ сильно в $H_1^2(\Omega)$.

6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (20) – (27) ВБЛИЗИ ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ (0, 0) ОТРЕЗКА γ

В этом разделе найдем главный член асимптотики решения в окрестности (0, 0). Для этого сначала переписем краевую задачу (20) – (27) с восстановленными коэффициентами и перейдем к безразмерным величинам. Будем использовать закон Гука для изотропных пластин Кирхгофа — Лява:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^I(v^I) &= \frac{E_I}{1 - \kappa_I^2} v_{1,1}^I + \frac{E_I \kappa_I}{1 - \kappa_I^2} v_{2,2}^I, \\
\sigma_{22}^I(v^I) &= \frac{E_I \kappa_I}{1 - \kappa_I^2} v_{1,1}^I + \frac{E_I}{1 - \kappa_I^2} v_{2,2}^I, \\
\sigma_{12}^I(v^I) &= \frac{E_I}{2(1 + \kappa_I)} (v_{1,2}^I + v_{2,1}^I).
\end{aligned}$$

Выберем в качестве масштаба независимых переменных x величину L — некоторый характерный размер всей пластины (например, ее максимальную длину). Пусть горизонтальные перемещения v^I и вертикальные прогибы пластин w^I имеют один и тот же масштаб L . Для внешних сил f^I и нагрузок F^I выберем масштабы $\rho_1 g$ и $\rho_1 g h$ соответственно. Здесь ρ_I — плотность материала I -й пластины, g — ускорение свободного падения, h — суммарная толщина двух пластин. Тогда новые переменные $\tilde{x}$ связаны со старыми формулой $x = L\tilde{x}$, значит, $\partial/\partial x_i = \partial/L\partial\tilde{x}_i$. Также имеем $L\tilde{v}^I(\tilde{x}) = v^I(x)$, $L\tilde{w}^I(\tilde{x}) = w^I(x)$,

$f^I = \rho_I \tilde{f}^I / \rho_1$, где $\tilde{f}^I = (\tilde{f}_1^I, \tilde{f}_2^I) = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2)$, α_i — это угол, которые образует вектор силы тяжести с осью Ox_i . Для функций $F^1 = -q^- - hf_3^1/2$ и $F^2 = q^+ - hf_3^1/2$, где q^- и q^+ — это заданные поверхностные нагрузки на нижней крышке нижней и на верхней крышке верхней пластины соответственно, $f_3^I = \rho_I g \cos \alpha_3$, α_3 — угол, образованный силой тяжести с осью Oz , выполняется равенство $F^I = \rho_I gh \tilde{F}^I$. Таким образом, величины с волной — безразмерные. Обозначим через $\beta_I = E_I / \rho_1 g L$ — безразмерные параметры. Предположим, что $L \gg 1$ и $h \ll 1$. Введем малый параметр $\varepsilon = h/L \ll 1$. Тогда система (20) — (27) может быть переписана для функций $\tilde{v}^I(\tilde{x})$, $\tilde{w}^I(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}_{\tilde{\gamma}}$, $\tilde{\gamma} = (-1/L, 0) \times 0$ в следующем виде:

$$\beta_I(\tilde{v}_{1,11}^I + \frac{1}{2}(1 - \kappa_I)\tilde{v}_{1,22}^I + \frac{1}{2}(1 + \kappa_I)\tilde{v}_{2,21}^I) = \frac{\rho_I}{\rho_1}\tilde{f}_1^I \quad \text{в } \tilde{\Omega}_{\tilde{\gamma}}, \quad (37)$$

$$\beta_I(\frac{1}{2}(1 + \kappa_I)\tilde{v}_{1,12}^I + \frac{1}{2}(1 - \kappa_I)\tilde{v}_{2,11}^I + \tilde{v}_{2,22}^I) = \frac{\rho_I}{\rho_1}\tilde{f}_2^I \quad \text{в } \tilde{\Omega}_{\tilde{\gamma}}, \quad (38)$$

$$\tilde{w}^2 \geq \tilde{w}^1, \quad \varepsilon^3 \Delta^2 \left\{ \frac{\beta_1}{12 \cdot 2^3(1 - \kappa_1^2)} \tilde{w}^1 + \frac{\beta_2}{12 \cdot 2^3(1 - \kappa_2^2)} \tilde{w}^2 \right\} = \varepsilon(\tilde{F}^1 + \tilde{F}^2) \quad \text{в } \tilde{\Omega}_{\tilde{\gamma}}, \quad (39)$$

$$\frac{\beta_1}{12 \cdot 2^3(1 - \kappa_1^2)} \varepsilon^3 \Delta^2 \tilde{w}^1 - \varepsilon \tilde{F}^1 \leq 0 \quad \text{в } \tilde{\Omega}_{\tilde{\gamma}}, \quad (40)$$

$$\left(\frac{\beta_1}{12 \cdot 2^3(1 - \kappa_1^2)} \varepsilon^3 \Delta^2 \tilde{w}^1 - \varepsilon \tilde{F}^1 \right) (\tilde{w}^2 - \tilde{w}^1) = 0 \quad \text{в } \tilde{\Omega}_{\tilde{\gamma}}, \quad (41)$$

$$\tilde{v}^1 = \tilde{v}^2 = 0, \quad \tilde{w}^1 = \frac{\partial \tilde{w}^1}{\partial n} = 0, \quad \tilde{w}^2 = \frac{\partial \tilde{w}^2}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \tilde{\Gamma}, \quad (42)$$

$$\tilde{w}^1 = \tilde{w}^2, \quad \nabla \tilde{w}^1 = \nabla \tilde{w}^2, \quad \tilde{v}^1 - \frac{\varepsilon}{4} \nabla \tilde{w}^1 = \tilde{v}^2 + \frac{\varepsilon}{4} \nabla \tilde{w}^2 \quad \text{на } \tilde{\gamma}, \quad (43)$$

$$[\tilde{\sigma}_{22}^1] + \frac{D_2}{D_1} [\tilde{\sigma}_{22}^2] = 0, \quad [\tilde{\sigma}_{12}^1] + \frac{\mu_2}{\mu_1} [\tilde{\sigma}_{12}^2] = 0 \quad \text{на } \tilde{\gamma}, \quad (44)$$

$$\frac{\varepsilon}{24} [\tilde{t}^1] + \frac{D_2}{D_1} \frac{\varepsilon}{24} [\tilde{t}^2] - (1 - \kappa_1) [\tilde{\sigma}_{12,1}^1] = 0 \quad \text{на } \tilde{\gamma}, \quad [\tilde{\sigma}_{12}^1]|_{(-\frac{1}{L}, 0)} = [\tilde{\sigma}_{12}^1]|_{(0,0)} = 0, \quad (45)$$

$$\frac{\varepsilon}{24} [\tilde{m}^1] + \frac{D_2}{D_1} \frac{\varepsilon}{24} [\tilde{m}^2] + [\tilde{\sigma}_{22}^1] = 0 \quad \text{на } \tilde{\gamma}. \quad (46)$$

Здесь $\mu_I = E_I / 2(1 + \kappa_I)$ — параметр Ламе I -й пластины. Были использованы обозначения: $\tilde{\sigma}_{12}^I = (\tilde{v}_{1,2}^I + \tilde{v}_{2,1}^I)/2$, $\tilde{\sigma}_{22}^I = \kappa_I \tilde{v}_{1,1}^I + \tilde{v}_{2,2}^I$, $\tilde{t}^I = \tilde{w}_{2,22}^I + \kappa_I \tilde{w}_{1,12}^I$, $\tilde{m}^I = \tilde{w}_{2,2}^I + \kappa_I \tilde{w}_{1,1}^I$. Что касается заданных функций, входящих в соотношения (39) — (41), то обычно предполагается (см., например [8]), что $q^\pm$ имеют порядок ε^3 .

Для того, чтобы найти “внутреннее решение” в окрестности $(0, 0)$ введем новые растянутые координаты $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, связанные с $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ формулой $\varepsilon \xi = \tilde{x}$. При этом малая область в окрестности $(0, 0)$ в растянутых переменных становится большой и тем большей, чем меньше ε . В новой системе координат ξ отрезок γ становится равным $(-1/L\varepsilon, 0) \times 0$, но удобнее считать его лучом $(-\infty, 0) \times \{0\} \in \mathbb{R}^2$ (см. [22, стр. 14, 26]). Краевое условие (42) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ исчезает.

Перепишем краевую задачу (37) — (46) в растянутых переменных. В области $\mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})$ будут выполняться соотношения:

$$\beta_I(v_{1,11}^I + \frac{1}{2}(1 - \kappa_I)v_{1,22}^I + \frac{1}{2}(1 + \kappa_I)v_{2,21}^I) = \varepsilon^2 \frac{\rho_I}{\rho_1} \tilde{f}_1^I, \quad (47)$$

$$\beta_I \left(\frac{1}{2}(1 + \kappa_I)v_{1,12}^I + \frac{1}{2}(1 - \kappa_I)v_{2,11}^I + v_{2,22}^I \right) = \varepsilon^2 \frac{\rho_I}{\rho_1} \tilde{f}_2^I, \quad (48)$$

$$w^2 \geq w^1, \quad \Delta^2 \left\{ \frac{\beta_1}{12 \cdot 2^3(1 - \kappa_1^2)} w^1 + \frac{\beta_2}{12 \cdot 2^3(1 - \kappa_2^2)} w^2 \right\} = \varepsilon^2 (\tilde{F}^1 + \tilde{F}^2), \quad (49)$$

$$\frac{\beta_1}{12 \cdot 2^3(1 - \kappa_1^2)} \Delta^2 w^1 - \varepsilon^2 \tilde{F}^1 \leq 0, \quad \left(\frac{\beta_1}{12 \cdot 2^3(1 - \kappa_1^2)} \Delta^2 w^1 - \varepsilon^2 \tilde{F}^1 \right) (w^2 - w^1) = 0. \quad (50)$$

Заметим, что здесь опять используем обозначения v^I , w^I для того, чтобы не загромождать запись большим количеством значков, но в этот раз независимые переменные — это ξ . Так как $\partial/\partial \tilde{x}_i = \partial/\varepsilon \partial \xi_i$, то условия на луче $(-\infty, 0) \times \{0\}$ получим, положив $\varepsilon = 1$ и убрав волну над обозначениями искомых функций в граничных условиях (43) — (46):

$$w^1 = w^2, \quad \nabla w^1 = \nabla w^2, \quad v^1 - \frac{1}{4} \nabla w^1 = v^2 + \frac{1}{4} \nabla w^2 \quad \text{на } (-\infty, 0) \times \{0\}, \quad (51)$$

$$[\sigma_{22}^1] + \frac{D_2}{D_1} [\sigma_{22}^2] = 0, \quad [\sigma_{12}^1] + \frac{\mu_2}{\mu_1} [\sigma_{12}^2] = 0 \quad \text{на } (-\infty, 0) \times \{0\}, \quad (52)$$

$$\frac{1}{24} [t^1] + \frac{D_2}{D_1} \frac{1}{24} [t^2] - (1 - \kappa_1) [\sigma_{12,1}^1] = 0 \quad \text{на } (-\infty, 0) \times \{0\}, \quad [\sigma_{12}^1]|_{(0,0)} = 0, \quad (53)$$

$$\frac{1}{24} [m^1] + \frac{D_2}{D_1} \frac{1}{24} [m^2] + [\sigma_{22}^1] = 0 \quad \text{на } (-\infty, 0) \times \{0\}. \quad (54)$$

В результате получили систему уравнений (47) — (50) и краевых условий (51) — (54), в которой малый множитель ε^2 стоит только перед слагаемыми $\tilde{f}^I$ и $\tilde{F}^I$. Для того, чтобы найти главный член асимптотики по ε решения вблизи $(0, 0)$, мы должны слагаемые с множителем ε^2 отбросить. Тогда нетрудно показать, что соотношения (49) и (50) приводят к двум уравнениям $\Delta^2 w^I = 0$ в $\mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})$.

Далее, введем полярную систему координат с центром в точке $(0, 0)$

$$\xi_1 = r \cos \phi, \quad \xi_2 = r \sin \phi, \quad r \geq 0, \quad |\phi| \leq \pi.$$

Перепишем производные произвольной функции u в новых координатах

$$u_{,1} = \cos \phi u_{,r} - \frac{\sin \phi}{r} u_{,\phi}, \quad u_{,2} = \sin \phi u_{,r} + \frac{\cos \phi}{r} u_{,\phi}.$$

Связь между декартовыми компонентами поля (u_1, u_2) и его компонентами в полярной системе координат задается формулами

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \Lambda(\phi) \begin{pmatrix} u_r \\ u_\phi \end{pmatrix}, \quad \Lambda(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{-1}(\phi) = \Lambda(-\phi).$$

Также имеем соотношения для тензоров деформаций и напряжений

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} = \Lambda(\phi) \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\phi} \\ \varepsilon_{\phi r} & \varepsilon_{\phi\phi} \end{pmatrix} \Lambda(-\phi),$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \Lambda(\phi) \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\phi} \\ \sigma_{\phi r} & \sigma_{\phi\phi} \end{pmatrix} \Lambda(-\phi).$$

Запишем выражения для элементов тензоров деформаций и напряжений в пластине Кирхгофа—Лява с учетом растяжения и сжатия срединной поверхности в каждом слое

$$\varepsilon_{rr}^I = v_{r,r}^I, \quad \varepsilon_{r\phi}^I = \frac{1}{2} (v_{\phi,r}^I + \frac{1}{r} v_{r,\phi}^I - \frac{1}{r} v_\phi^I), \quad \varepsilon_{\phi\phi}^I = \frac{1}{r} v_{\phi,\phi}^I + \frac{1}{r} v_r^I,$$

$$\sigma_{rr}^I = \varepsilon_{rr}^I + \kappa_I \varepsilon_{\phi\phi}^I, \quad \sigma_{\phi\phi}^I = \kappa_I \varepsilon_{rr}^I + \varepsilon_{\phi\phi}^I, \quad \sigma_{r\phi}^I = \varepsilon_{r\phi}^I. \quad (55)$$

Оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

Теперь мы можем выписать соотношения (47) – (50) с нулевыми правыми частями и условия на луче (51) – (54) в полярной системе координат:

$$-\frac{1}{1-\kappa_I} \left(v_{r,r}^I + \frac{1}{r} v_{\phi,\phi}^I + \frac{1}{r} v_r^I \right)_{,r} + \frac{1}{2r} \left(v_{\phi,r}^I - \frac{1}{r} v_{r,\phi}^I + \frac{1}{r} v_\phi^I \right)_{,\phi} = 0 \quad \text{при } r > 0, \quad |\phi| < \pi, \quad (56)$$

$$\frac{1}{2} \left(v_{\phi,r}^I - \frac{1}{r} v_{r,\phi}^I + \frac{1}{r} v_\phi^I \right)_{,r} + \frac{1}{r(1-\kappa_I)} \left(v_{r,r}^I + \frac{1}{r} v_{\phi,\phi}^I + \frac{1}{r} v_r^I \right)_{,\phi} = 0 \quad \text{при } r > 0, \quad |\phi| < \pi, \quad (57)$$

$$w^2 \geq w^1, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)^2 w^I = 0 \quad \text{при } r > 0, \quad |\phi| < \pi \quad (58)$$

$$[v_r^I] = [v_\phi^I] = 0, \quad [w^I] = 0, \quad [w_{,r}^I] = [w_{,\phi}^I] = 0 \quad \text{при } r > 0, \quad |\phi| = \pi, \quad (59)$$

$$w^1 = w^2, \quad w_{,r}^1 = w_{,r}^2, \quad w_{,\phi}^1 = w_{,\phi}^2 \quad \text{при } r > 0, \quad |\phi| = \pi, \quad (60)$$

$$v_r^1 - \frac{1}{4} w_{,r}^1 = v_r^2 + \frac{1}{4} w_{,r}^2, \quad v_\phi^1 - \frac{1}{4r} w_{,\phi}^1 = v_\phi^2 + \frac{1}{4r} w_{,\phi}^2 \quad \text{при } r > 0, \quad |\phi| = \pi, \quad (61)$$

$$[\sigma_{\phi\phi}^1] + \frac{D_2}{D_1} [\sigma_{\phi\phi}^2] = 0, \quad [\sigma_{\phi r}^1] + \frac{\mu_2}{\mu_1} [\sigma_{\phi r}^2] = 0 \quad \text{при } r > 0, \quad |\phi| = \pi, \quad (62)$$

$$\frac{1}{24} [t^1] + \frac{D_2}{D_1} \frac{1}{24} [t^2] + (1-\kappa_1) [\sigma_{r\phi,r}^1] = 0 \quad \text{при } r > 0, \quad |\phi| = \pi, \quad [\sigma_{r\phi}^1]_{r=0} = 0, \quad (63)$$

$$\frac{1}{24} [m^1] + \frac{D_2}{D_1} \frac{1}{24} [m^2] + [\sigma_{\phi\phi}^1] = 0 \quad \text{при } r > 0, \quad |\phi| = \pi. \quad (64)$$

Здесь углы $\phi = \pm\pi$ соответствуют берегам $\gamma^\pm$, квадратные скобки означают $[\cdot] = \cdot|_{\phi=\pi} - \cdot|_{\phi=-\pi}$ — разность значений функции при $\phi = \pi$ и $\phi = -\pi$. Функции $[t^I]$ и $[m^I]$ имеют выражения:

$$[m^I] = \kappa_I [w_{,rr}^I] + \frac{1}{r^2} [w_{,\phi\phi}^I] + \frac{1}{r} [w_{,r}^I],$$

$$[t^I] = \kappa_I \left(\frac{2}{r^2} [w_{,\phi r}^I] - \frac{2}{r^3} [w_{,\phi}^I] - \frac{1}{r} [w_{,rr}^I] \right) - \frac{1}{r^3} [w_{,\phi\phi\phi}^I] - \frac{3}{r^2} [w_{,r\phi}^I] - \frac{2}{r^3} [w_{,\phi}^I]$$

В задаче (56) – (64) в отличие от (47) – (54) добавились условия (59) непрерывности на луче $(-\infty, 0) \times \{0\}$ горизонтальных перемещений точек в срединной поверхности, непрерывность функций вертикальных прогибов пластин, а также градиентов функций прогибов.

Решение задачи в бесконечном угле (56) – (64) будем искать в виде

$$v^I(r, \phi) = r^\alpha \Phi_I(\phi), \quad \Phi_I = (\Phi_{Ir}, \Phi_{I\phi}),$$

$$w^I(r, \phi) = r^{\alpha+1} W^I(\phi), \quad \alpha \geq 0.$$

Неотрицательные значения степени α выбраны для того, чтобы решение системы (56) – (64) в окрестности начала координат принадлежало тому же пространству, что и решение вариационной задачи (20) – (27). Ясно, что если параметр α равен целому числу, то ему соответствует, с учетом уравнений равновесия (56) – (58) и условий (59), решение v^I и w^I в виде однородных полиномов степеней α и $\alpha+1$ соответственно. Также решением задачи является действительная постоянная $w^I(r, \phi) = a_0$, то есть полином степени 0. Цель

дальнейших преобразований — найти функции v^I и w^I , для которых $0 < \alpha < 1$. Такой промежуток значений α выбран потому, что основной вклад в величину σ_{ij}^I в окрестности вершины $(0, 0)$ при $r \rightarrow 0$ даст соответствующее такому α решение (56) — (64).

Подставив в (56)–(57) функции $v^I(r, \phi)$, получим фундаментальную систему решений

$$\begin{aligned}\Phi^1 &= (\cos(1 + \alpha)\phi, -\sin(1 + \alpha)\phi), & \Phi^2 &= (\sin(1 + \alpha)\phi, \cos(1 + \alpha)\phi), \\ \Phi_I^3 &= (K_I^+ \cos(1 - \alpha)\phi, K_I^- \sin(1 - \alpha)\phi), & \Phi_I^4 &= (K_I^+ \sin(1 - \alpha)\phi, -K_I^- \cos(1 - \alpha)\phi),\end{aligned}$$

где $K_I^\pm = \alpha(1 + \kappa_I) \pm (\kappa_I - 3)$. Значит,

$$\Phi_I = c_1^I \Phi^1 + c_2^I \Phi^2 + c_3^I \Phi_I^3 + c_4^I \Phi_I^4.$$

Также подстановка $w^I(r, \phi)$ в уравнения (58) приводит тому, что функции $W^I(\phi)$ будем искать в виде

$$W^I(\phi) = W_1^I \cos(1 + \alpha)\phi + W_2^I \sin(1 + \alpha)\phi + W_3^I \cos(1 - \alpha)\phi + W_4^I \sin(1 - \alpha)\phi.$$

В последних двух формулах постоянные c_n^I , W_n^I , $n = 1, 2, 3, 4$ неизвестны заранее, их предстоит найти, используя условия (59) — (64).

Дальше в работе будем использовать выражения для элементов тензоров напряжений, полученные из (55):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(v^I) &= r^{\alpha-1}((\alpha + \kappa_I)\Phi_{Ir} + \kappa_I\Phi_{I\phi,\phi}), \\ \sigma_{\phi\phi}(v^I) &= r^{\alpha-1}((1 + \alpha\kappa_I)\Phi_{Ir} + \Phi_{I\phi,\phi}), \\ \sigma_{r\phi}(v^I) &= r^{\alpha-1}\frac{1}{2}(\Phi_{Ir,\phi} - (1 - \alpha)\Phi_{I\phi}).\end{aligned}$$

Теперь можно перейти непосредственно к определению неизвестных коэффициентов c_n^I и W_n^I . Возьмем сначала условия (59). Первое из них, условие непрерывности горизонтальных перемещений точек срединной поверхности приводит к равенствам

$$\begin{aligned}[\Phi_r^I] &= 2c_2^I \sin(1 + \alpha)\pi + 2c_4^I K_I^+ \sin(1 - \alpha)\pi = 0, \\ [\Phi_\phi^I] &= -2c_1^I \sin(1 + \alpha)\pi + 2c_3^I K_I^- \sin(1 - \alpha)\pi = 0.\end{aligned}$$

Заметим, что $\sin(1 + \alpha)\pi = -\sin\alpha\pi$, $\sin(1 - \alpha)\pi = \sin\alpha\pi$. Так как мы ищем решение, соответствующее нецелому значению α , то $\sin\alpha\pi \neq 0$. Значит,

$$c_1^I = -K_I^- c_3^I, \quad c_2^I = -K_I^+ c_4^I. \quad (65)$$

Следующее, условие непрерывности прогибов на луче $r > 0$, $|\phi| = \pi$ приводит к соотношению

$$[W^I] = 2 \sin\alpha\pi(-W_2^I + W_4^I) = 0, \quad (66)$$

откуда $W_2^I = W_4^I$. Далее, условие $[w_{,1}^I] = -(\alpha + 1)r^\alpha[W^I] = 0$ выполняется автоматически, так как $[W^I] = 0$, а условие

$$[w_{,2}^I] = -r^\alpha[W^{I'}], \quad [W^{I'}] = -2(1 + \alpha)W_1^I \sin(1 + \alpha)\pi - 2(1 - \alpha)W_3^I \sin(1 - \alpha)\pi = 0,$$

дает новое соотношение для постоянных

$$W_1^I = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} W_3^I. \quad (67)$$

Теперь применим условия склеивания (60). Из первого равенства (60), которое означает совпадение прогибов на линии соединения пластин, получим, что

$$\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \cos(1+\alpha)\pi + \cos(1-\alpha)\pi\right)(W_3^2 - W_3^1) = 0.$$

Воспользовавшись тем, что $\cos(1 \pm \alpha)\pi = -\cos \alpha\pi$, упростим последнее выражение и, таким образом, найдем равенство

$$\cos \alpha\pi (W_3^2 - W_3^1) = 0. \quad (68)$$

Второе условие (60) приводит к равенству $W^{1'} = W^{2'}$, которое должно выполняться при $\phi = \pm\pi$. На линии $r > 0$, $|\phi| = \pi$ имеем

$$W^{I'} = ((1+\alpha) \cos(1+\alpha)\pi + (1-\alpha) \cos(1-\alpha)\pi)W_4^I = -2 \cos \alpha\pi W_4^I.$$

Отсюда

$$\cos \alpha\pi (W_4^1 - W_4^2) = 0. \quad (69)$$

Рассмотрим еще одно условие склеивания (61). Так как

$$v_r^I = r^\alpha (K_I^+ \sin(1+\alpha)\pi + K_I^- \sin(1-\alpha)\pi) c_4^I = 0,$$

то первое равенство (61) не даст новые соотношения для постоянных. Выпишем величины, входящие во вторую формулу (61):

$$v_\phi^I = r^\alpha (K_I^+ \cos(1+\alpha)\pi - K_I^- \cos(1-\alpha)\pi) c_4^I = -2r^\alpha \cos \alpha\pi (\kappa_I - 3) c_4^I, \\ \frac{1}{r} w_{,\phi}^1 = -2r^\alpha \cos \alpha\pi W_4^I.$$

Отсюда получим

$$\cos \alpha\pi ((\kappa_1 - 3) c_4^1 - (\kappa_2 - 3) c_4^2 - \frac{1}{4} (W_4^1 + W_4^2)) = 0. \quad (70)$$

Теперь перейдем ко второму условию (62). Так как $[\sigma_{r\phi}^I] = r^{\alpha-1} [\Phi_{Ir}']/2$, а также

$$[\Phi_{Ir}'] = -2 \sin \alpha\pi ((1+\alpha) K_I^- + (1-\alpha) K_I^+) c_3^I = -16\alpha c_3^I \sin \alpha\pi,$$

то

$$c_3^1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} c_3^2 = 0. \quad (71)$$

Из второго соотношения (63) следует, что должно выполняться равенство

$$-8\alpha\mu_1 \sin \alpha\pi c_3^1 = 0.$$

Так как $\sin \alpha\pi \neq 0$, то $c_3^1 = 0$, а значит $c_3^I = 0$. Теперь пришла очередь первого условия (62). Поскольку

$$[\Phi_\phi'] = 2 \sin \alpha\pi ((1+\alpha) K_I^+ + (1-\alpha) K_I^-) c_4^I = 8\alpha \sin \alpha\pi c_4^I (\kappa_I - 1),$$

то получим еще одно соотношение для произвольных постоянных

$$c_4^1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} c_4^2 = 0. \quad (72)$$

Далее возьмем (63). С учетом $c_3^I = 0$ оно эквивалентно равенству $[W^{1''''}] + D_2[W^{2''''}]/D_1 = 0$. Так как

$$[W^{I''''}] = -8\alpha(1-\alpha) \sin \alpha\pi W_3^I,$$

то это дает условие

$$W_3^1 + \frac{D_2}{D_1} W_3^2 = 0. \quad (73)$$

Введем новую постоянную W_3 , прежние определяются через новую по формулам $W_3^1 = W_3$, $W_3^2 = -D_1 W_3 / D_2$.

Перейдем к условию (64), связывающему моменты и горизонтальные усилия на луче $r > 0$, $\phi = \pm\pi$. Имеем

$$[m^I] = r^{\alpha-1} [W^{I'''}],$$

где

$$[W^{I'''}] = 2(1+\alpha)^2 \sin \alpha\pi W_4^I - 2(1-\alpha)^2 \sin \alpha\pi W_4^I = 8\alpha \sin \alpha\pi W_4^I.$$

Воспользуемся уже полученным выражением для скачка горизонтальных усилий

$$[\sigma_{\phi\phi}^I] = r^{\alpha-1} 8\alpha \sin \alpha\pi (\kappa_I - 1) c_4^I.$$

Подставив последние два соотношения в (64), найдем

$$\frac{1}{24} (W_4^1 + \frac{D_2}{D_1} W_4^2) + (\kappa_1 - 1) c_4^1 = 0.$$

Отсюда, используя (72) определения цилиндрической жесткости D_I и модуля сдвига μ_I , получим

$$c_4^1 = \frac{2}{\mu_1 h^3} (D_1 W_4^1 + D_2 W_4^2), \quad c_4^2 = -\frac{2}{\mu_2 h^3} (D_1 W_4^1 + D_2 W_4^2). \quad (74)$$

Наконец, перепишем первое условие (58), которое является условием непроникания между пластинами. Прямая подстановка выражений для W^I в неравенство $W^2 \geq W^1$ дает соотношение

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \cos(1+\alpha)\phi + \cos(1-\alpha)\phi\right) W_3 \left(\frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_2}\right) + \\ & + (\sin(1+\alpha)\phi + \sin(1-\alpha)\phi) (W_4^2 - W_4^1) \geq 0, \end{aligned} \quad (75)$$

которое должно выполняться для всех $\phi \in (-\pi, \pi)$. Учитывая (65) – (75) и условия $c_3^I = 0$, заметим, что при нецелых α нетривиальное решение системы (56) – (64) получим только при $\cos \alpha\pi = 0$ то есть при $\alpha = n + 1/2$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Выражения для функций Φ_I и W^I для $\alpha = n + 1/2$, без учета условия (75) принимают вид

$$\begin{aligned} \Phi_{Ir} &= K_I^+ \left\{ \sin\left(n + \frac{3}{2}\right)\phi + \sin\left(-n + \frac{1}{2}\right)\phi \right\} \frac{(-1)^{I+1} 2}{\mu_I h^3} (D_1 W_4^1 + D_2 W_4^2), \\ \Phi_{I\phi} &= \left\{ K_I^+ \cos\left(n + \frac{3}{2}\right)\phi - K_I^- \cos\left(-n + \frac{1}{2}\right)\phi \right\} \frac{(-1)^{I+1} 2}{\mu_I h^3} (D_1 W_4^1 + D_2 W_4^2), \\ W^I(\phi) &= \left(\frac{1-2n}{3+2n} \cos\left(n + \frac{3}{2}\right)\phi + \cos\left(-n + \frac{1}{2}\right)\phi\right) (-1)^{I+1} \frac{D_1}{D_I} W_3 + \\ & + (\sin\left(n + \frac{3}{2}\right)\phi + \sin\left(-n + \frac{1}{2}\right)\phi) W_4^I. \end{aligned}$$

В промежуток от нуля до единицы попадает значение $\alpha = 1/2$. В этом случае ясно, что условие непроникания

$$-\frac{4}{3} \cos^3 \frac{\phi}{2} W_3 \left(\frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_2}\right) + 4 \sin \frac{\phi}{2} \cos^2 \frac{\phi}{2} (W_4^2 - W_4^1) \geq 0,$$

будет выполнено, если $W_3 \leq 0$, $W_4^1 = W_4^2$. Пусть $W_4 = W_4^1 = W_4^2$.

Таким образом, получили, что выражение для горизонтальных перемещений точек срединных поверхностей нижней ($I=1$) и верхней ($I=2$) пластин, соответствующее значению параметра $\alpha = 1/2$, имеет вид

$$v^I(r, \phi)|_{\alpha=1/2} = r^{\frac{1}{2}} \Phi_I(\phi), \quad \Phi_I = (\Phi_{Ir}, \Phi_{I\phi}),$$

$$\Phi_{Ir} = K_I^+ \left\{ \sin \frac{3\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \right\} \frac{(-1)^{I+1} 2}{\mu_I h^3} (D_1 + D_2) W_4, \quad (76)$$

$$\Phi_{I\phi} = \left\{ K_I^+ \cos \frac{3\phi}{2} - K_I^- \cos \frac{\phi}{2} \right\} \frac{(-1)^{I+1} 2}{\mu_I h^3} (D_1 + D_2) W_4, \quad (77)$$

где $K_I^+|_{\alpha=1/2} = \frac{1}{2}(3\kappa_I - 5)$, $K_I^-|_{\alpha=1/2} = \frac{1}{2}(7 - \kappa_I)$.

Для вертикальных прогибов пластин найдены следующие выражения

$$w^I|_{\alpha=1/2} = r^{\frac{3}{2}} W^I(\phi),$$

$$W^I(\phi) = \left(\frac{1}{3} \cos \frac{3\phi}{2} + \cos \frac{\phi}{2} \right) (-1)^{I+1} \frac{D_1}{D_I} W_3 + \left(\sin \frac{3\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \right) W_4, \quad (78)$$

Здесь $W_3 \leq 0$, $W_4 \in \mathbb{R}$.

Из предыдущих рассуждений следует, что существуют такие действительные постоянные b^I , a_0 , a_1 , a_2 , $B_{n+\frac{1}{2}}$, $B_{n,k}^I$, $D_{n,k}^I$, что в окрестности вершины $(0, 0)$ решение однородной задачи (56) – (64) имеет представление при $r \rightarrow 0$:

$$\tilde{v}^I = b^I + B_{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} \Phi_I(\phi)|_{\alpha=1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{n+\frac{1}{2}} r^{n+\frac{1}{2}} \Phi_I(\phi)|_{\alpha=n+1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n B_{n,k}^I \zeta_1^k \zeta_2^{n-k},$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}^I &= a_0 + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + B_{\frac{1}{2}} r^{\frac{3}{2}} W^I(\phi)|_{\alpha=1/2} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} B_{n+\frac{1}{2}} r^{n+\frac{3}{2}} W^I(\phi)|_{\alpha=n+3/2} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n D_{n,k}^I \zeta_1^k \zeta_2^{n-k}. \end{aligned}$$

Приближенное решение задачи (56) – (64) имеет вид

$$V^I = b^I + B_{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} \Phi_I(\phi)|_{\alpha=1/2},$$

$$W^I = a_0 + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + B_{\frac{1}{2}} r^{\frac{3}{2}} W^I(\phi)|_{\alpha=1/2},$$

функции $\Phi_I(\phi)|_{\alpha=1/2}$, $W^I(\phi)|_{\alpha=1/2}$ определены в (76) – (78). Ясно, что $\tilde{v}^I = V^I + O(r)$, $\tilde{w}^I = W^I + O(r^2)$ в окрестности начала координат.

Из последних представлений и выражений для горизонтальных напряжений получим, что $\sigma^I(\tilde{v}^I) = \sigma^I(V^I) + O(1)$ при $r \rightarrow 0$, где

$$\sigma_{rr}^I(V^I) = B_{\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}} (1 - \kappa_I) \left\{ K_I^+ \sin \frac{3\phi}{2} - \frac{5}{2} (1 + \kappa_I) \sin \frac{\phi}{2} \right\} \frac{(-1)^{I+1}}{\mu_I h^3} (D_1 + D_2) W_4,$$

$$\sigma_{\phi\phi}^I(V^I) = B_{\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}} (\kappa_I - 1) \left\{ K_I^+ \sin \frac{3\phi}{2} + \frac{3}{2} (1 + \kappa_I) \sin \frac{\phi}{2} \right\} \frac{(-1)^{I+1}}{\mu_I h^3} (D_1 + D_2) W_4,$$

$$\sigma_{r\phi}^I(V^I) = B_{\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}} \left\{ K_I^+ \cos \frac{3\phi}{2} + (1 + \kappa_I) \sin \frac{\phi}{2} \right\} \frac{(-1)^{I+1}}{\mu_I h^3} (D_1 + D_2) W_4.$$

Таким образом, получено, что на конце отрезка γ напряжения $\sigma_{ij}^I(\tilde{v}^I)$ обращаются в бесконечность с порядком $1/2$.

Замечание. Пусть $\eta(r)$ — срезающая функция из $C^\infty[0, d]$, $\eta \in [0, 1]$, равная единице при $r \leq d/2$ и равная нулю при $r = d$. Обозначим через $B_d = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi| < d\}$ круг радиуса d с центром в начале координат. Так как $\eta(r)(V^I - \tilde{v}^I) =$

$O(r)$, $\eta(r)(W^I - \tilde{w}^I) = O(r^2)$, то для того, чтобы найти оценку нормы разности приближенного решения задачи в бесконечном угле $(\eta V^1, \eta W^1, \eta V^2, \eta W^2)$ и функций $(\eta v^1, \eta w^1, \eta v^2, \eta w^2)$, где (v^1, w^1, v^2, w^2) — решение (18) — (19), надо оценить норму разности $(\eta(v^1 - \tilde{v}^1), \eta(w^1 - \tilde{w}^1), \eta(v^2 - \tilde{v}^2), \eta(w^2 - \tilde{w}^2))$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1 В работе рассмотрено состояние равновесия двух пластин с учетом упругой силы, действующей на поверхности контакта как в лоскости контакта, так и перпендикулярно ей. Величина этой силы характеризуется параметром повреждаемости. На контактной поверхности задано условие непроникания. Предполагалось, что пластины склеены вдоль отрезка не выходящего на боковую границу. Для этой задачи приведены вариационная и дифференциальная постановки и доказана их эквивалентность. Показана однозначная разрешимость задачи.

2 Проведен асимптотический анализ задачи равновесия пластины при бесконечном увеличении и стремлении к нулю величины силы, действующей на поверхности контакта. Было показано, что при $\mu = 0$ получается задача контакта без трения двух пластин Кирхгофа — Лява, соединенных друг с другом вдоль отрезка внутри области контакта. При $\mu = \infty$ имеем задачу равновесия двухслойной пластины. Показана сильная сходимость последовательности решений задач равновесия пластин с действующей между ними упругой силой к решению задачи контакта без трения двух пластин или к решению задачи равновесия двухслойной пластины при стремлении параметра μ к 0 или ∞ соответственно.

3 Для задачи контакта без трения двух пластин показано, что в этой окрестности горизонтальные усилия $(h/2)\sigma_{ij}^I$ обращаются в бесконечность с порядком $1/2$.

Благодарность Автор благодарит рецензента за ценные замечания, существенно улучшившие представление статьи.

REFERENCES

- [1] A.M. Khludnev, *On modelling elastic bodies with defects*, Sib. Electr. Math. Rep., **15** (2018), 153–166. Zbl 1390.35354
- [2] V.V. Sil'vestrov, I.A. Ivanov, *A packet of elastic plates joined along a periodic system of segments*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **42**:4 (2001), 731–736. Zbl 1001.74072
- [3] M. Bach, A.M. Khludnev, V.V. Kovtunenkov, *Derivatives of the energy functional for 2D-problems with a crack under Singorini and friction condition*, Math. Meth. Appl. Sci., **23**:6 (2000), 515–534. Zbl 0954.35076
- [4] H. Itou, A.M. Khludnev, E.M. Rudoy, A. Tani, *Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity*, Z.A.M.M., **92**:9 (2012), 716–730. Zbl 1348.74041
- [5] E.M. Rudoy, *On numerical solving a rigid inclusions problem in 2D elasticity*, Z.A.M.P., **68**:19 (2017), 518–534. Zbl 06735700
- [6] E.M. Rudoy, N.A. Kazarinov, V. Yu. Slesarenko, *Numerical simulation of equilibrium of an elastic two-layer structure with a through crack*, Numer. Analys. Appl., **10**:1 (2017), 63–73.
- [7] Y. Beneveniste, T. Miloh, *Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity*, Mech. of Materials., **33** (2001), 309–323.
- [8] Yu. I. Dimitrienko, *Asymptotic theory of multilayer thin plates*, Vestnik Moskov.Gos. Univ. im. Bauman Ser. Estestv Nauki, **3** (2012), 86–99. [in Russian]
- [9] Yu. I. Dimitrienko, E.A. Gubareva, Yu.V. Yurin, *Variational equations of asymptotic theory of multilayer thin plates*, Vestnik Moskov.Gos. Univ. im. Bauman Ser. Estestv Nauki, **4** (2015), 67–87. [in Russian]

- [10] A.M. Khludnev, *Problem on the contact of two elastic plates*, J. Appl. Math. Mech., **47**:1 (1983), 110–115.
- [11] A.M. Khludnev, V.A. Kovtunenkov, *Analysis of Cracks in Solids*, Boston–Southampton: WIT-Press, 2000.
- [12] A.M. Khludnev, *Elasticity Theory Problems in Nonsmooth Domains*, Moscow: Fizmatlit, 2010. [in Russian]
- [13] E.I. Grigolyuk, V.M. Tolkachev, *Contact Problems of Theory of Plates and Shells*, Moscow: Mashinostroenie, 1980. [in Russian]
- [14] P.A. Zhilin, *Applied Mechanics. Basis of Shell Theory*, St. Petersburg: Politech. Gos. Univ., 2006. [in Russian]
- [15] S.N. Dmitriev, *Analytical solution to the Hertzian contact problem of elastic deformations of a thin plate positioned in a cylindrical cavity*, Nauka i obrazovanie, **1** (2013), DOI: 10.7463/0113.0517977. [in Russian]
- [16] V.V. Bolotin, Yu.N. Novichkov, *Mechanics of Multilayered Structures*, Moscow: Mashinostroenie, 1980. [in Russian]
- [17] A.R. Rzhantsyn, *Built-up Bars and Plates*, Moscow: Stroiizdat, 1986. [in Russian]
- [18] E.V. Pyatkina, *A contact problem for two plates of the same shape glued along one edge of a crack*, J. Appl. Ind. Mech., **12**:2 (2018), 334–346. Zbl 1413.74083
- [19] A.M. Khludnev, *On unilateral contact of two plates aligned at an angle to each other*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **49**:4 (2008), 553–567. Zbl 1272.74503
- [20] N.V. Neustroeva, *Unilateral contact of elastic plates to rigid inclusion*, Vestn. Novosib. Gos. Univ. Ser. Math. Mech. Inform., **9**:4 (2009), 51–64. [in Russian] Zbl 1249.74080
- [21] T.A. Rotanova, *On the statements and solvability of the problems on the contact of two plates containing rigid inclusions*, Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki, **15**:2 (2012), 107–118. [in Russian] Zbl 1324.74045
- [22] A.M. Il'in, *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems*, Amer. Math. Soc., Providence, 1989. Zbl 0671.35002

EVDOKIA VLADIMIROVNA PYATKINA
LAVRENTYEV INSTITUTE OF HYDRODYNAMICS,
15, ACAD. LAVRENTYEVA AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: dusya_pyatkina@mail.ru