Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. N. Belousov, A. A. Makhnev, M. S. Nirova, On Q -polynomial distance-regular graphs Γ with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3 , *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1385–1392

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.096>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.239.49.27

April 26, 2023, 13:57:59

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1385–1392 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.096

УДК 519.17

MSC 05C25

О ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ Q -ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ГРАФАХ Γ С СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫМИ ГРАФАМИ Γ_2 И Γ_3

И.Н. БЕЛОУСОВ, А.А. МАХНЕВ, М.С. НИРОВА

ABSTRACT. Let Γ be a distance-regular graph of diameter 3 with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3 . Then Γ has intersection array $\{t(c_2 + 1) + a_3, tc_2, a_3 + 1; 1, c_2, t(c_2 + 1)\}$ (Nirova M.S.) If Γ is Q -polynomial then either $a_3 = 0, t = 1$ and Γ is Taylor graph or $(c_2 + 1) = a_3(a_3 + 1)/(t^2 - a_3 - 1)$. We found 4 infinite series feasible intersection arrays in this situation.

Keywords: distance-regular graph, Q -polynomial graph.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$. Пусть Γ — граф диаметра d , $i \in \{2, 3, \dots, d\}$. Граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, и вершины u, w смежны в Γ_i , если $d_\Gamma(u, w) = i$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Далее, через $p_{ij}^l(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y , находящихся на расстоянии l в графе Γ . В

BELOUSOV, I.N., MAKHNEV, A.A., NIROVA, M.S., ON Q -POLYNOMIAL DISTANCE-REGULAR GRAPHS Γ WITH STRONGLY REGULAR GRAPHS Γ_2 AND Γ_3 .

© 2019 БЕЛОУСОВ И.Н., МАХНЕВ А.А., НИРОВА М.С.

Поступила 17 июля 2019 г., опубликована 7 октября 2019 г.

дистанционно регулярном графе числа $p_{ij}^l(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y , обозначаются p_{ij}^l и называются числами пересечений графа Γ [1].

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа Γ называется e -кодом, если минимальное расстояние между двумя вершинами из C не меньше $2e + 1$. Для e -кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e + 1$ выполняется граница $|C| \leq k_d / \sum_{i=0}^e p_{id}^d + 1$. В случае равенства код называется совершенным относительно последней окрестности.

Пусть для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Такие графы изучались в [2].

Предложение 1. Пусть Γ является примитивным дистанционно регулярным графом диаметра 3. Если графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны, то Γ имеет массив пересечений $\{t(c_2 + 1) + a_3, tc_2, a_3 + 1; 1, c_2, t(c_2 + 1)\}$, $a_2 = (t - 1)(c_2 + 1)$, $a_1 = a_3 + t - 1$, $k_2 = kt$, $k_3 = k(a_3 + 1)/(c_2 + 1)$, $p_{33}^1 = a_3(a_3 + 1)/(c_2 + 1) = \mu(\Gamma_3)$ и граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{t(c_2+1)}(t(c_2 + 1) + a_3, t)$.

Положим $a = a_3$. Скажем, что Γ — граф типа (1), если $c_2 + 1$ делит a , — граф типа (2), если $c_2 + 1$ делит $a + 1$, — граф типа (3), если $c_2 + 1$ не делит a и не делит $a + 1$. Приведем список графов из [1].

1. $\{19, 12, 5; 1, 4, 15\}$, граф типа (2) не существует по [3].
2. $\{35, 24, 8; 1, 6, 28\}$, граф типа (1), Γ_3 — псевдогеометрический граф для $GQ(5, 7)$, $\bar{\Gamma}_2$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(5, 14)$, граф не существует по [4].
3. $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$, граф типа (3), Γ_3 — граф с параметрами $(300, 26, 4, 2)$, $\bar{\Gamma}_2$ — граф с параметрами $(300, 65, 10, 15)$.
4. $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$, граф типа (1), Γ_3 — граф с параметрами $(540, 55, 10, 5)$, $\bar{\Gamma}_2$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(11, 8)$.
5. $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$, граф типа (3), Γ_3 — граф с параметрами $(375, 66, 9, 12)$, $\bar{\Gamma}_2$ — граф с параметрами $(375, 110, 25, 35)$ Граф не существует по [5].
6. $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$, граф типа (3), Γ_3 — граф с параметрами $(375, 22, 5, 1)$ не существует, $\bar{\Gamma}_2$ — граф с параметрами $(375, 66, 9, 12)$.
7. $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$, граф типа (3), Γ_3 — граф с параметрами $(243, 22, 1, 2)$, $\bar{\Gamma}_2$ — граф с параметрами $(243, 66, 9, 21)$.
8. $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$, граф типа (1), Γ_3 — псевдо $GQ(6, 6)$, $\bar{\Gamma}_2$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(6, 16)$.
9. $\{49, 36, 5; 1, 4, 45\}$, граф типа (2), Γ_3 — граф с параметрами $(540, 49, 8, 4)$, $\bar{\Gamma}_2$ — граф с параметрами $(540, 98, 16, 18)$.
10. $\{49, 36, 8; 1, 6, 42\}$, граф типа (1), Γ_3 — псевдогеометрический граф для $GQ(7, 7)$, $\bar{\Gamma}_2$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(7, 14)$.
11. $\{54, 40, 7; 1, 5, 48\}$, граф типа (1), Γ_3 — псевдогеометрический граф для $GQ(9, 6)$, $\bar{\Gamma}_2$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(9, 12)$.
12. $\{55, 36, 11; 1, 4, 45\}$, граф типа (1), Γ_3 — псевдогеометрический граф для $pG_2(11, 10)$, $\bar{\Gamma}_2$ — граф с параметрами $(672, 176, 40, 48)$.
13. $\{56, 36, 9; 1, 3, 48\}$, граф типа (1), Γ_3 — псевдогеометрический граф для $pG_2(14, 8)$, $\bar{\Gamma}_2$ — граф с параметрами $(855, 182, 37, 39)$.
14. $\{63, 48, 10; 1, 8, 54\}$, граф типа (1), Γ_3 — псевдогеометрический граф для $GQ(7, 9)$, $\bar{\Gamma}_2$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(7, 18)$.
15. $\{65, 44, 11; 1, 4, 55\}$, граф типа (1), Γ_3 — псевдогеометрический граф для $pG_2(13, 10)$, $\bar{\Gamma}_2$ — граф с параметрами $(924, 208, 42, 48)$.

16. $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, граф типа (3), Q -полиномиальный, Γ_3 – граф с параметрами $(392, 46, 0, 6)$, $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами $(392, 115, 18, 40)$.
 17. $\{74, 54, 15; 1, 9, 60\}$, граф типа (3), Q -полиномиальный, Γ_3 – граф с параметрами $(630, 111, 12, 21)$, $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами $(630, 185, 40, 60)$.
 18. $\{74, 55, 9; 1, 5, 66\}$, граф типа (3), Γ_3 – граф с параметрами $(1000, 111, 14, 12)$, $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами $(1000, 185, 30, 35)$.
 19. $\{74, 63, 5; 1, 9, 70\}$, граф типа (3), Γ_3 – граф с параметрами $(630, 37, 4, 2)$, $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами $(630, 111, 12, 21)$.
 20. $\{77, 60, 13; 1, 12, 65\}$, граф типа (2), Q -полиномиальный, Γ_3 – граф с параметрами $(540, 77, 4, 12)$, $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами $(540, 154, 28, 50)$, граф не существует по [3].
 21. $\{80, 63, 11; 1, 9, 70\}$, граф типа (1), Γ_3 – псевдогеометрический граф для $GQ(8, 10)$, $\bar{\Gamma}_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(8, 20)$.
 22. $\{87, 66, 16; 1, 11, 72\}$, граф типа (3), Q -полиномиальный, Γ_3 – граф с параметрами $(726, 116, 10, 20)$, $\bar{\Gamma}_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(8, 20)$.
 23. $\{90, 78, 7; 1, 13, 84\}$, граф типа (3), Γ_3 – граф с параметрами $(676, 45, 2, 3)$, $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами $(676, 135, 14, 30)$.
 24. $\{99, 80, 12; 1, 10, 88\}$, граф типа (1), Γ_3 – псевдогеометрический граф для $GQ(9, 11)$, $\bar{\Gamma}_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(9, 22)$.
 25. $\{119, 96, 18; 1, 16, 102\}$, граф типа (1), Q -полиномиальный, граф Γ_3 – псевдогеометрический граф для $GQ(7, 17)$, $\bar{\Gamma}_2$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(7, 34)$, граф не существует по [4].
 26. $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$, граф типа (3), Q -полиномиальный, Γ_3 – граф с параметрами $(800, 85, 0, 10)$, $\bar{\Gamma}_2$ – граф с параметрами $(800, 204, 28, 60)$.
- В [6] доказано, что дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $\{74, 54, 15; 1, 9, 60\}$ и $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ не существуют.
- С помощью [7] получен следующий результат.

Предложение 2. *Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{t(c_2 + 1) + a, tc_2, a + 1; 1, c_2, t(c_2 + 1)\}$ является Q -полиномиальным тогда и только тогда, когда $(t^2 - a - 1)c_2 = (a^2 - t^2 + 2a + 1)$ и либо $a = 0, t = 1$ и Γ – граф Тэйлора без треугольников (дополнение $2 \times (c_2 + 2)$ -решётки), либо $(c_2 + 1) = a_3(a_3 + 1)/(t^2 - a_3 - 1)$.*

Теорема 1. *Для примитивного Q -полиномиального дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{t(c_2 + 1) + a, tc_2, a + 1; 1, c_2, t(c_2 + 1)\}$ выполняется одно из следующих утверждений:*

- (1) Γ – граф типа (I), $a = w(c_2 + 1)$ и $t^2 = wc_2(w + 1) + (w + 1)^2$, либо
 - (i) $w + 1 = s^2$, $t^2 = s^2((s^2 - 1)c_2 + s^2)$, $(s^2 - 1)c_2 + s^2$ является квадратом некоторого целого числа и, $c_2 = (u^2 - s^2)/(s^2 - 1)$, $t = su$, $a = u^2 - 1$ и Γ имеет массив пересечений

$$\left\{ \frac{(s^2 + su - 1)(u^2 - 1)}{s^2 - 1}, \frac{(u^2 - s^2)su}{s^2 - 1}, u^2; 1, \frac{u^2 - s^2}{s^2 - 1}, su^3 - su/s^2 - 1 \right\},$$

либо

- (ii) $c_2 = s(w + 1)$, $t^2 = (w + 1)^2(ws + 1)$, $ws + 1$ является квадратом некоторого целого числа и, $c_2 = (w + 1)(u^2 - 1)/w$, $t = (w + 1)u$, $a = u^2w + u^2 - 1$

u Γ имеет массив пересечений

$$\left\{ \frac{(u^2w + u^2 - 1)(uw + u + w)}{w}, \frac{(u^2 - 1)u(w + 1)^2}{w}, u^2(w + 1); 1, \frac{(w + 1)(u^2 - 1)}{w}, \right. \\ \left. \frac{(u^2w + u^2 - 1)u(w + 1)}{w} \right\};$$

(2) Γ – граф типа (II), $a + 1 = w(c_2 + 1)$ и $t^2 = w(w(c_2 + 1) + c_2)$, либо

(i) $w = s^2$, $t^2 = s^2(s^2(c_2 + 1) + c_2)$, $(s^2(c_2 + 1) + c_2)$ является квадратом некоторого целого числа u , $c_2 = (u^2 - s^2)/(s^2 + 1)$, $t = su$, $a = (u^2s^2 - 1)/(s^2 + 1)$ и Γ имеет массив пересечений

$$\left\{ \frac{u^3s + u^2s^2 + us - 1}{s^2 + 1}, \frac{(u^2 - s^2)su}{s^2 + 1}, \frac{(u^2 + 1)s^2}{s^2 + 1}; 1, \frac{u^2 - s^2}{s^2 + 1}, \frac{(u^2 + 1)su}{s^2 + 1} \right\},$$

либо

(ii) $c_2 = sw$, $t^2 = w^2(sw + 1 + s)$, $sw + 1 + s$ является квадратом некоторого целого числа u , $c_2 = (u^2 - 1)w/(w + 1)$, $t = uw$, $a = (u^2w^2 - 1)/(w + 1)$ и Γ имеет массив пересечений

$$\left\{ \frac{u^3w^2 + u^2w^2 + uw - 1}{w + 1}, \frac{(u^2 - 1)uw^2}{w + 1}, \frac{(u^2w + 1)w}{w + 1}; 1, \frac{(u^2 - 1)w}{w + 1}, \frac{(u^2w + 1)uw}{w + 1} \right\};$$

(3) Γ – граф типа (III).

1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2

Рассмотрим произвольный дистанционно регулярный граф Γ диаметра d с собственными значениями $\theta_0 > \theta_1 > \dots > \theta_d$ и второй матрицей собственных значений $Q = (Q_{ij})_{i,j=0}^d$. По [7, теорема 3.3] граф Γ является Q -полиномиальным тогда и только тогда, когда $Q_{0j} \neq Q_{2j}$, $Q_{0j} \neq Q_{3j}$ и выполняется равенство

$$(1) \quad \begin{aligned} & c_3 \left(Q_{2j} - Q_{3j} - \frac{(Q_{1j} - Q_{2j})^2}{Q_{0j} - Q_{3,j}} \right) + b_2 \left(Q_{2j} - Q_{2j} - \frac{(Q_{1j} - Q_{3j})^2}{Q_{0j} - Q_{2j}} \right) \\ & = (b_0 - \theta_j)(Q_{1j} - Q_{3j}) - (\theta_j + 1)(Q_{0j} - Q_{2j}) \end{aligned}$$

для некоторого $j \in \{1, 2, 3\}$

Пусть дистанционно регулярный граф Γ имеет массив пересечений $\{t(c_2 + 1) + a, tc_2, a + 1; 1, c_2, t(c_2 + 1)\}$, где $a = a_3$. Выясним в каком случае он является Q -полиномиальным.

Собственные значения графа Γ следующие:

$$\theta_0 = c_2t + a + t, \theta_1 = a + t, \theta_2 = -1, \theta_3 = -c_2 - 1.$$

Матрица Q графа Γ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{(c_2t + a + c_2 + t + 1)(c_2t + a + t + 1)(c_2t + a + t)}{(a + c_2 + t + 1)(a + t + 1)(c_2 + 1)} \\ 1 & \frac{(c_2t + a + c_2 + t + 1)(c_2t + a + t + 1)(a + t)}{(a + c_2 + t + 1)(a + t + 1)(c_2 + 1)} \\ 1 & -\frac{(c_2t + a + c_2 + t + 1)(c_2t + a + t + 1)}{(a + c_2 + t + 1)(a + t + 1)(c_2 + 1)} \\ 1 & -\frac{(c_2t + a + c_2 + t + 1)(c_2t + a + t + 1)}{(a + c_2 + t + 1)(a + t + 1)} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{(c_2t + a + c_2 + t + 1)(c_2t + a + t)(a + 1)}{(a + t + 1)(c_2 + 1)} - \frac{(c_2t + a + c_2 + t + 1)(a + 1)}{(c_2t + a + c_2 + t + 1)(a + 1)} \\ \frac{(a + t + 1)(c_2 + 1)}{(c_2t + a + c_2 + t + 1)(a + 1)} - \frac{(a + t + 1)(c_2 + 1)}{(c_2t + a + c_2 + t + 1)t} \\ \frac{(a + t + 1)(c_2 + 1)}{(c_2t + a + c_2 + t + 1)t} - \frac{(a + t + 1)(c_2 + 1)}{(a + t + 1)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \frac{(c_2t + a + t + 1)(c_2t + a + t)t}{(a + c_2 + t + 1)(c_2 + 1)} - \frac{(a + c_2 + t + 1)t}{(c_2t + a + t + 1)t} \\ \frac{a + c_2 + t + 1}{(c_2t + a + t + 1)(a + c_2 + 1)} - \frac{(a + c_2 + t + 1)(c_2 + 1)}{(c_2t + a + t + 1)t} \\ \frac{(a + c_2 + t + 1)(c_2 + 1)}{(c_2t + a + t + 1)t} - \frac{(a + c_2 + t + 1)}{(a + c_2 + t + 1)} \end{array} \right)$$

Решим уравнение (1) для всех $j \in \{1, 2, 3\}$.

Пусть $j = 1$. Тогда левая часть уравнения (1) равна
 $(c_2^4t^3 - a^2c_2^2t^2 + 2ac_2^3t^2 + c_2^4t^2 - 2ac_2^2t^3 + 3c_2^3t^3 - c_2^2t^4 - 2a^3c_2t - a^2c_2^2t - 6a^2c_2t^2 + 4c_2^3t^2 - 6ac_2t^3 + c_2^2t^3 - 2c_2t^4 - a^4 - 3a^3c_2 - 3a^2c_2^2 - ac_2^3 - 4a^3t - 11a^2c_2t - 4ac_2^2t - 6a^2t^2 - 13ac_2t^2 + 2c_2^2t^2 - 4at^3 - 5c_2t^3 - t^4 - 4a^3 - 9a^2c_2 - 6ac_2^2 - c_2^3 - 12a^2t - 16ac_2t - 3c_2^2t - 12at^2 - 7c_2t^2 - 4t^3 - 6a^2 - 9ac_2 - 3c_2^2 - 12at - 7c_2t - 6t^2 - 4a - 3c_2 - 4t - 1)/((a + c_2 + t + 1)(a + t + 1)(c_2 + 1)),$

а правая

$(c_2^2t - a^2 - 2at - t^2 - 2a - 2t - 1)(c_2t + a + c_2 + t + 1)(c_2t + a + t + 1)/((a + c_2 + t + 1)(a + t + 1)(c_2 + 1)).$

Решая уравнение (1) относительно c_2 имеем следующие решения

$c_2 = (a^2 - t^2 + 2a + 1)/(t^2 - a - 1)$, $c_2 = -2(a + t + 1)/(t + 1)$ или $c_2 = 0$.

Поэтому Γ является Q -полиномиальным относительно идемпотента E_1 только в случае $(t^2 - a - 1)c_2 = (a^2 - t^2 + 2a + 1)$.

Пусть $j = 2$. Тогда левая часть уравнения 1 равна

$-(c_2t + a + c_2 + t + 1)(c_2t + a + t + 1)(c_2t + t + 1)/((a + t + 1)(c_2 + 1)),$

а правая

$-(c_2t + a + c_2 + t + 1)(c_2t + a + t + 1)^2/((a + t + 1)(c_2 + 1)).$

Решая уравнение (1) относительно c_2 имеем следующие решения

$c_2 = -(a + t + 1)/(t + 1)$ или $c_2 = -(a + t + 1)/t$.

Поэтому Γ не является Q -полиномиальным относительно идемпотента E_2 .

Пусть $j = 3$. Тогда левая часть уравнения (1) равна

$(c_2t + a + c_2 + t + 1)(c_2t + a + t + 1)(t - 1)/(a + c_2 + t + 1),$

а правая

$(c_2t + a + c_2 + t + 1)(c_2t + a + t + 1)c_2(t - 1)/((a + c_2 + t + 1)(c_2 + 1)).$

Решая уравнение (1) относительно t имеем следующие решения

$t = -(a + c_2 + 1)/(c_2 + 1)$, $t = -(a + 1)/(c_2 + 1)$, $t = 1$.

Поэтому Γ может являться Q -полиномиальным относительно идемпотента E_3 только в случае $t = 1$. Но при $t = 1$ имеем $Q_{03} = Q_{23}$ и Γ не является Q -полиномиальным относительно идемпотента E_3 .

Предложение 2 доказано.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть Γ — Q -полиномиальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{t(c_2 + 1) + a, tc_2, a + 1; 1, c_2, t(c_2 + 1)\}$ с $t \neq 1$. Тогда $t^2 - a - 1 \neq 0$ и $c_2 = (a^2 - t^2 + 2a + 1)/(t^2 - a - 1)$. Далее, $c_2 + 1 = \frac{a^2 - t^2 + 2a + 1}{t^2 - a - 1} + 1 = \frac{a(a + 1)}{t^2 - a - 1}$ и $c_2 + 1$ делит $a(a + 1)$.

Пусть Γ – граф типа (I). Тогда $a = w(c_2 + 1)$ и $t^2 = wc_2(w + 1) + (w + 1)^2$.
Имеем два случая

(Ii) $w + 1$ – квадрат целого числа,

(Iii) $w + 1$ не является квадратом целого числа.

Случай (Ii). Пусть $w + 1 = s^2$. Тогда $t^2 = (s^2 - 1)c_2s^2 + s^4 = s^2((s^2 - 1)c_2 + s^2)$ и $(s^2 - 1)c_2 + s^2$ является квадратом некоторого целого числа u . Далее, $c_2 = (u^2 - s^2)/(s^2 - 1)$, $t = su$, $a = u^2 - 1$ и массив пересечений графа Γ имеет вид

$$\left\{ \frac{(s^2 + su - 1)(u^2 - 1)}{s^2 - 1}, \frac{(u^2 - s^2)su}{s^2 - 1}, u^2; 1, \frac{u^2 - s^2}{s^2 - 1}, su^3 - su/s^2 - 1 \right\}.$$

Случай (Iii). Имеем, $t^2 = (w + 1)^2(wc_2/(w + 1) + 1)$ и $w + 1$ делит c_2 . Пусть $c_2 = s(w + 1)$. Тогда $t^2 = (w + 1)^2(ws + 1)$ и $ws + 1$ является квадратом некоторого целого числа u . Далее, $c_2 = (w + 1)(u^2 - 1)/w$, $t = (w + 1)u$, $a = u^2w + u^2 - 1$ и массив пересечений графа Γ имеет вид

$$\left\{ \frac{(u^2w + u^2 - 1)(uw + u + w)}{w}, \frac{(u^2 - 1)u(w + 1)^2}{w}, u^2(w + 1); 1, \frac{(w + 1)(u^2 - 1)}{w}, \frac{u^2 - s^2}{s^2 + 1}, \frac{(u^2 + 1)su}{s^2 + 1} \right\}.$$

Пусть Γ – граф типа (II). Тогда $a + 1 = w(c_2 + 1)$ и $t^2 = w(w(c_2 + 1) + c_2)$.
Имеем два случая

(IIi) w – квадрат целого числа,

(IIii) w не является квадратом целого числа.

Случай (IIi). Пусть $w = s^2$. Тогда $t^2 = s^2(s^2(c_2 + 1) + c_2)$ и $(s^2(c_2 + 1) + c_2)$ является квадратом некоторого целого числа u . Далее, $c_2 = (u^2 - s^2)/(s^2 + 1)$, $t = su$, $a = (u^2s^2 - 1)/(s^2 + 1)$ и массив пересечений графа Γ имеет вид

$$\left\{ \frac{u^3s + u^2s^2 + us - 1}{s^2 + 1}, \frac{(u^2 - s^2)su}{s^2 + 1}, \frac{(u^2 + 1)s^2}{s^2 + 1}; 1, \frac{u^2 - s^2}{s^2 + 1}, \frac{(u^2 + 1)su}{s^2 + 1} \right\}.$$

Случай (IIii). Имеем, $t^2 = w^2(c_2 + 1 + c_2/w)$ и w делит c_2 . Пусть $c_2 = sw$. Тогда $t^2 = w^2(sw + 1 + s)$ и $sw + 1 + s$ является квадратом некоторого целого числа u . Далее, $c_2 = (u^2 - 1)w/(w + 1)$, $t = uw$, $a = (u^2w^2 - 1)/(w + 1)$ и массив пересечений графа Γ имеет вид

$$\left\{ \frac{u^3w^2 + u^2w^2 + uw - 1}{w + 1}, \frac{(u^2 - 1)uw^2}{w + 1}, \frac{(u^2w + 1)w}{w + 1}; 1, \frac{(u^2 - 1)w}{w + 1}, \frac{(u^2w + 1)uw}{w + 1} \right\}.$$

Теорема 1 доказана.

3. ГРАФЫ ТИПА (I) И (II)

Граф Γ типа (Ii) имеет массив пересечений

$$\left\{ \frac{(s^2 + su - 1)(u^2 - 1)}{s^2 - 1}, \frac{(u^2 - s^2)su}{s^2 - 1}, u^2; 1, \frac{u^2 - s^2}{s^2 - 1}, su^3 - su/s^2 - 1 \right\},$$

$s^2 - 1$ делит $u^2 - s^2$.

В этом случае кратность собственного значения θ_{i-1} совпадает с $k_i = |\Gamma_i(a)|$.

Перечислим наименьшие возможные параметры массивов пересечений в этом случае:

$$\begin{aligned} &\{55, 32, 16; 1, 4, 40\} \quad (s = 2, u = 4), \\ &\{104, 70, 25; 1, 7, 80\} \quad (s = 2, u = 5), \\ &\{272, 210, 49; 1, 15, 224\} \quad (s = 2, u = 7), \end{aligned}$$

$\{399, 320, 64; 1, 20, 336\}$ ($s = 2, u = 8$).

Лемма 1. В серии $u = s^2$ графов нет.

Доказательство. Если $u = s^2$, то граф имеет массив пересечений $\{(s^3 + s^2 - 1)(s^2 + 1), s^5, s^4; 1, s^2, s^3(s^2 + 1)\}$.

Но по [5, теорема 4] имеем $c_2 - 1 \geq \frac{\alpha(a_1 + 1) - k}{\binom{\alpha}{2}}$, где $\alpha = \left\lceil \frac{k}{a_1 + 1} \right\rceil$, и $s \leq 1$, противоречие. $\square$

Граф Γ типа (Iii) имеет массив пересечений

$$\left\{ \frac{(u^2w + u^2 - 1)(uw + u + w)}{w}, \frac{(u^2 - 1)u(w + 1)^2}{w}, u^2(w + 1); 1, \frac{(w + 1)(u^2 - 1)}{w}, \right. \\ \left. \frac{(u^2w + u^2 - 1)u(w + 1)}{w} \right\}, w \text{ делит } u^2 - 1.$$

При $w = 1$ получим массив пересечений $\{(2u^2 - 1)(2u + 1), 4(u^2 - 1)u, 2u^2; 1, 2(u^2 - 1), 2(2u^2 - 1)u\}$ и по теореме 3 из [4] граф с таким массивом пересечений не существует.

При $w = 2, u = 3$ получим массив пересечений $\{143, 108, 27; 1, 12, 117\}$.

Массив пересечений графа Γ типа (Iii) имеет вид

$$\left\{ \frac{u^3s + u^2s^2 + us - 1}{s^2 + 1}, \frac{(u^2 - s^2)su}{s^2 + 1}, \frac{(u^2 + 1)s^2}{s^2 + 1}; 1, \frac{u^2 - s^2}{s^2 + 1}, \frac{(u^2 + 1)su}{s^2 + 1} \right\},$$

$s^2 + 1$ делит $u^2 - s^2$.

При $s = 1$ получим массив $\{(u^3 + u^2 + u - 1)/2, (u^2 - 1)u/2, (u^2 + 1)/2; 1, (u^2 - 1)/2, (u^2 + 1)u/2\}$. Перечислим наименьшие возможные параметры массивов пересечений в этом случае: $\{19, 12, 5; 1, 4, 15\}$ (граф не существует по [3]), $\{77, 60, 13; 1, 12, 65\}$ ($u = 5$).

При $s = 2$ получим массив $\{(2u^3 + 4u^2 + 2u - 1)/5, (u^2 - 4)2u/5, 4(u^2 + 1)/5; 1, (u^2 - 4)/5, (u^2 + 1)2u/5\}$. В случае $u = 7$ возникает массив пересечений $\{179, 126, 40; 1, 9, 140\}$.

Массив пересечений графа Γ типа (Iii) имеет вид

$$\left\{ \frac{u^3w^2 + u^2w^2 + uw - 1}{w + 1}, \frac{(u^2 - 1)uw^2}{w + 1}, \frac{(u^2w + 1)w}{w + 1}; 1, \frac{(u^2 - 1)w}{w + 1}, \frac{(u^2w + 1)uw}{w + 1} \right\},$$

$w + 1$ делит $u^2 - 1$.

В этом случае интересные серии возникают при:

- (a) $w = s - 3, w - 2 = u,$
- (b) $w = s + 1, w = u,$
- (c) $w = 4s + 3, (w - 1)/2 = u,$
- (d) $w = 4s - 5, (w + 3)/2 = u,$
- (e) $s = 4w, 2w + 1 = u,$
- (f) $s = 4w + 8, 2w + 3 = u.$

REFERENCES

- [1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1989. Zbl 0747.05073
- [2] M.S. Nirova, *On distance-regular graphs Γ with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3* , Sib. electron. math. reports, **15** (2018), 175–185.
- [3] K. Coolsaet, A. Jurishich, *Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs*, J. Comb. Theory, Series A, **115**:6 (2008), 1086–1095. Zbl 1182.05132
- [4] A. Jurishich, J. Vidali, *Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3*, Des. Codes Cryptogr., **65**:1–2 (2012), 29–47. Zbl 1245.05036
- [5] J.H. Koolen, J. Park, *Shilla distance-regular graphs*, Europ. J. Comb., **31**:8 (2010), 2064–2073. Zbl 1221.05117
- [6] A.A. Makhnev, M.M. Isakova, M.S. Nirova, *Distance-regular graphs with intersection arrays $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $\{74, 54, 15; 1, 9, 60\}$ and $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ do not exist*, Sib. electron. math. reports, **16** (2019), 1254–1259.
- [7] P. Terwilliger, *A new inequality for distance-regular graphs*, Discrete Math., **137**:1–3 (1995), 319–332. Zbl 0814.05074

IVAN NIKOLAEVICH BELOUSOV

N.N. KRASOVSKII INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS OF THE URAL BRANCH OF
THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES,
16, S.KOVALEVSKAYA STR.,
YEKATERINBURG, 620990, RUSSIA
E-mail address: i_belousov@mail.ru

ALEKSANDR ALEKSEEVICH MAKHNEV

N.N. KRASOVSKII INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS OF THE URAL BRANCH OF
THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES,
16, S.KOVALEVSKAYA STR.,
YEKATERINBURG, 620990, RUSSIA
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

MARINA SEFOVNA NIROVA

KABARDINO-BALKARIAN STATE UNIVERSITY NAMED AFTER H.M. BERBEKOV,
175, CHERNYSHEVSKY STR.,
NALCHIK, 360004, RUSSIA
E-mail address: nirova_m@mail.ru