Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. I. Kozhanov, B. Koshanov, J. Sultangazieva, New boundary value problems for fourth-order quasi-hyperbolic equations, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1410–1436

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.098>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.162.85.209

April 26, 2023, 13:31:52

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1410–1436 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.098

УДК 517.946

MSC 35M99, 35R99

НОВЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ
КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО
ПОРЯДКА

А.И. КОЖАНОВ, Б.Д. КОШАНОВ, Ж.Б. СУЛТАНГАЗИЕВА

ABSTRACT. In this paper, we study the correctness in the spaces of S.L. Sobolev of new boundary value problems for quasi-hyperbolic differential equations

$$u_{tttt} + Au = f(x, t)$$

(A is an elliptic operator acting on spatial variables). For the proposed tasks theorems on the existence and uniqueness of solutions are proved, and examples of non-uniqueness are given.

Keywords: fourth-order quasi-hyperbolic equations, regular solutions, existence, uniqueness.

СОДЕРЖАНИЕ.

1. Новые краевые задачи для квазигиперболических уравнений четвертого порядка. Существование и единственность регулярных решений.
2. Примеры неединственности решений.
3. Некоторые обобщения.

KOZHANOV, A.I., KOSHANOV, B., SULTANGAZIEVA, J., NEW BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR FOURTH-ORDER QUASI-HYPERBOLIC EQUATIONS.

© 2019 Кожанов А.И., Кошанов Б.Д., Султангазиева Ж.Б.

Работа поддержана РФФИ (грант 18-51-41009), Министерством образования и науки Республики Казахстан (грант АР 05135319).

Поступила 29 апреля 2019 г., опубликована 9 октября 2019 г.

1. НОВЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ
РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ.

Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты — бесконечно-дифференцируемой) границей Γ , Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T , $S = \Gamma \times (0, T)$ — боковая граница Q , $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$, $f(x, t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$, A есть дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, t)$ определяется равенством

$$Av = \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x)v_{x_j}) + a(x)v$$

(здесь и далее подразумевается, что по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n). Наконец, пусть p есть фиксированное натуральное число.

Будем считать, что оператор A эллиптичен:

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2, \quad a_0 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

В цилиндре Q рассмотрим уравнение

$$(-1)^p \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} + Au = f(x, t). \quad (1_p)$$

В случае $p = 1$ это уравнение является обычным гиперболическим уравнением второго порядка, в случае же $p > 1$ оно уже не будет гиперболическим (и, в частности, при $p > 1$ естественные начально-краевые задачи для таких уравнений будут некорректными — см. [1]). По аналогии с квазиэллиптическими уравнениями

$$(-1)^p \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} - Au = f(x, t)$$

будем называть уравнения (1_p) при $p > 1$ квазигиперболическими, и именно такие уравнения при $p = 2$ и будут предметом настоящей работы.

Исследование разрешимости краевых задач для квазигиперболических уравнений (1_p) началось, по сути, с работ В.Н. Врагова [2, 3], ряд результатов о разрешимости краевых задач для таких уравнений можно найти в работе [4]. В работе [5] для уравнений (1_p) были предложены постановки новых по сравнению с [2]–[4] задач, и были получены результаты об их корректности в пространствах Соболева.

Именно развитию некоторых результатов [5] для уравнений (1_2) и будет посвящена настоящая работа.

Пусть α_0 , α_1 , α_2 , β_0 и β_1 есть заданные действительные числа.

Краевая задача I: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1_2) и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, t)|_S = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = u_{tt}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$u_{ttt}(x, T) = \alpha_0 u(x, T) + \alpha_1 u_t(x, T) + \alpha_2 u_{tt}(x, T), \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Краевая задача II: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1_2) и такую, что для нее выполняются условия (2), а также

условия

$$u_t(x, 0) = u_{tt}(x, 0) = u_{ttt}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

$$u_{tt}(x, T) = \beta_0 u(x, T) + \beta_1 u_t(x, T), \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Определим пространство $V_2^{2,m}$ (m — натуральное число) как линейное множество функций $v(x, t)$, принадлежащих пространству $L_2(Q)$ и имеющих принадлежащие этому же пространству обобщенные производные по пространственным переменным до второго порядка включительно и по переменной t до порядка m включительно, с нормой

$$\|v\|_{V_2^{2,m}} = \left(\int_Q \left[v^2 + \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial^m v}{\partial t^m} \right)^2 \right] dx dt \right)^{1/2}.$$

Очевидно, что пространство $V_2^{2,m}$ есть банахово пространство.

Пусть $w(x)$ есть функция из пространства $\dot{W}_2^1(\Omega)$. Имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} w^2(x) dx \leq \gamma_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x) dx, \quad (7)$$

постоянная γ_0 в котором определяется лишь областью Ω (предполагается, что число γ_0 выбирается минимальным среди возможных) — см. [[6], гл. I, § 8; [7], гл. II, § 2]. Далее, если функции $w(x, t)$ и $w_t(x, t)$ принадлежат пространству $L_2(Q)$, функция $w(x, t)$ обращается в нуль при $t = 0$, то имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} w^2(x, T) dx \leq T \int_Q w_t^2 dx dt. \quad (8)$$

Неравенства (7) и (8) нам понадобятся ниже.

Положим

$$\gamma_1 = a_0 \gamma_0^{-1} - \max_{\Omega} a(x).$$

Для $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$, действительного числа ρ и числа T_0 из промежутка $(T, +\infty)$ определим квадратичные формы $F_0(\xi)$, $F_1(\xi)$ и $F(\rho; \xi)$:

$$\begin{aligned} F_0(\xi) &= (T_0 - T)\xi_0^2 + \left[\frac{3}{T} - 2\alpha_1(T_0 - T) \right] \xi_1^2 + \gamma_1(T_0 - T)\xi_2^2 - \\ &\quad - 2[1 + \alpha_2(T_0 - T)]\xi_0\xi_1 - 2\alpha_0(T_0 - T)\xi_1\xi_2, \\ F_1(\xi) &= \frac{1}{T}\xi_1^2 + \alpha_0\xi_2^2 - \xi_0\xi_1 + \alpha_1\xi_1\xi_2 + \alpha_2\xi_0\xi_2, \\ F(\rho; \xi) &= F_0(\xi) + \rho F_1(\xi). \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$a^{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad x \in \overline{\Omega}; \quad (9)$$

$$a_0|\eta|^2 \leq a^{ij}(x)\eta_i\eta_j \leq a_1|\eta|^2, \quad a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \eta \in \mathbb{R}^n; \quad (10)$$

$$a(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad a(x) \leq 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}; \quad (11)$$

существуют числа T_0 и ρ_0 такие, что $T_0 > T$, $\rho_0 \in (-3, 1)$ и выполняется

$$F(\rho_0; \xi) \geq 0 \quad \text{при} \quad \xi \in \mathbb{R}^3. \quad (12)$$

Тогда краевая задача I не может иметь в пространстве $V_2^{2,4}$ более одного решения.

Доказательство. Пусть выполняется $f(x, t) \equiv 0$. Умножим уравнение (1₂) с такой правой частью на функцию $-2(T_0 - t)u_t(x, t) + \rho_0 u(x, t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q . После несложных преобразований с использованием краевых условий получим равенство

$$\begin{aligned} & (3 + \rho_0) \int_Q u_{tt}^2 dx dt + (1 - \rho_0) \int_Q a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} dx dt - (1 - \rho_0) \int_Q a(x) u^2 dx dt + \\ & + \int_{\Omega} \{ (T_0 - T) u_{tt}^2(x, T) - 2[1 + \alpha_2(T_0 - T)] u_{tt}(x, T) u_t(x, T) - \\ & - 2\alpha_1(T_0 - T) u_t^2(x, T) - 2\alpha_0(T_0 - T) u_t(x, T) u(x, T) + \rho_0 \alpha_2 u_{tt}(x, T) u(x, T) + \\ & + \rho_0 \alpha_1 u_t(x, T) u(x, T) + \rho_0 \alpha_0 u^2(x, T) - \rho_0 u_t(x, T) u_{tt}(x, T) + \\ & + (T_0 - T) a^{ij}(x) u_{x_i}(x, T) u_{x_j}(x, T) - (T_0 - T) a(x) u^2(x, T) \} dx = 0. \end{aligned}$$

Используя далее условия (10) и (11), а также неравенства (7) и (8), нетрудно от данного равенства перейти к оценке

$$(1 - \rho_0) \sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i}^2 dx dt + \int_{\Omega} F(\rho_0; u_{tt}(x, T), u_t(x, T), u(x, T)) dx \leq 0.$$

Из этой оценки и из условия (12) очевидным образом следует $u(x, t) \equiv 0$ при $(x, t) \in \bar{Q}$. А это и означает, что краевая задача I не может иметь в пространстве $V_2^{2,4}$ более одного решения.

Теорема доказана. $\square$

Следующие результаты дают достаточные условия единственности решений краевой задачи I для некоторых модельных случаев.

Пусть выполняются условия (9)–(11).

Рассмотрим квадратичную форму

$$\tilde{F}(\xi) = A_1 \xi_0^2 + A_2 \xi_1^2 + A_3 \xi_2^2 - 2B_1 \xi_0 \xi_1 - 2B_2 \xi_1 \xi_2 \quad (\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3).$$

Пусть выполняется условие

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad (13)$$

Тогда имеет место равенство

$$\tilde{F}(\xi) = \left(\sqrt{A_1} \xi_0 - \frac{B_1}{\sqrt{A_1}} \xi_1 \right)^2 + \left(\sqrt{A_3} \xi_2 - \frac{B_2}{\sqrt{A_3}} \xi_1 \right)^2 + \left(A_2 - \frac{B_1^2}{A_1} - \frac{B_2^2}{A_3} \right) \xi_1^2.$$

Из этого равенства следует, что форма $\tilde{F}(\xi)$ при выполнении условия (13) будет неотрицательной, если выполняется неравенство

$$A_1 A_2 A_3 - A_3 B_1^2 - A_1 B_2^2 \geq 0. \quad (14)$$

Положим

$$p_0 = (2\alpha_1 + \alpha_2^2) \gamma_1 + \alpha_0^2, \quad p_1 = \left(\frac{3}{T} - 2\alpha_1 \right) \gamma_1,$$

$$P(\theta) = p_0 \theta^2 - p_1 \theta + \gamma_1.$$

Определим, при каких α_0 , α_1 и α_2 найдутся положительные числа θ , для которых будет выполняться

$$P(\theta) \leq 0, \quad \frac{3}{T} - 2\alpha_1 \theta > 0. \quad (15)$$

Прежде всего заметим, что при выполнении условия

$$p_0 < 0 \quad (16)$$

найдется положительное число θ^* такое, что при $\theta > \theta^*$ будет выполняться первое неравенство (15). Далее, из (16) следует, что число α_1 должно быть отрицательным. Но тогда второе неравенство (15) при положительном θ будет выполняться автоматически.

Пусть теперь выполняется

$$p_0 = 0, \quad p_1 > 0. \quad (17)$$

Очевидно, что в этом случае найдется положительное число θ^{**} такое, что при $\theta > \theta^{**}$ будет выполняться первое неравенство (15). И поскольку из (17) следует, что число α_1 неположительно, то при $\theta > \theta^{**}$ второе неравенство (15) вновь будет выполняться автоматически.

Рассмотрим теперь случай

$$p_0 > 0.$$

Очевидно, что в этом случае число p_1 должно быть положительным, и что квадратное уравнение $P(\theta) = 0$ должно иметь действительные корни. Последнее справедливо при выполнении неравенства

$$p_1^2 - 4\gamma_1 p_0 \geq 0. \quad (18)$$

Положим

$$\theta_1 = \frac{p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4\gamma_1 p_0}}{2p_0}, \quad \theta_2 = \frac{p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4\gamma_1 p_0}}{2p_0}.$$

Заметим, что оба числа θ_1 и θ_2 положительны, и что первое неравенство (15) будет выполняться при $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Далее, в случае $\alpha_1 \leq 0$ второе неравенство (15) при таких θ будет выполняться автоматически, в случае же $\alpha_1 > 0$ наряду с неравенством (18) для чисел α_0 , α_1 и α_2 должно выполняться неравенство

$$\alpha_1 \theta_2 < \frac{3}{2T}. \quad (19)$$

Суммируя все изложенные выше рассуждения и учитывая введенные обозначения, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (9)–(11), и пусть также выполняется одно из условий

а) $p_0 < 0$;

б) $p_0 = 0$, $p_1 > 0$;

в) $p_0 > 0$, $p_1 > 0$, $p_1^2 - 4\gamma_1 p_0 \geq 0$, $\alpha_1 \theta_2 < \frac{3}{2T}$. Тогда краевая задача I не может иметь в пространстве $V_2^{2,4}$ более одного решения.

Доказательство. Покажем, что при выполнении одного из условий а), б) или в) будет выполняться условие (12) в случае $\rho_0 = 0$.

Положим

$$A_1 = \theta, \quad A_2 = \frac{3}{T} - 2\alpha_1 \theta, \quad A_3 = \gamma_1 \theta, \quad B_1 = 1 + \alpha_2 \theta, \quad B_2 = \alpha_0 \theta.$$

Имеет место равенство

$$A_1 A_2 A_3 - A_3 B_1^2 - A_1 B_2^2 = -\theta P(\theta).$$

Пусть выполняется условие а). Тогда при $\theta > \theta^*$ будут выполняться неравенства (13) и (14). Зафиксируем число θ и положим $T_0 = \theta + T$. Очевидно, что для такого числа T_0 будет выполняться условие (12).

Для случаев б) и в) рассуждения вполне аналогичны вышеприведенным, лишь в случае б) число θ выбирается из промежутка $(\theta^{**}, +\infty)$, в случае в) — из отрезка $[\theta_1, \theta_2]$.

Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим еще одну ситуацию, позволяющую легко описать условия единственности решений краевой задачи I.

Пусть выполняется условие

$$2\alpha_0 < \left(\frac{\gamma_1^2}{T}\right)^{1/3}.$$

Тогда квадратное уравнение

$$\alpha_0^2 T \theta^2 - \gamma_1 \theta + 2\alpha_0 = 0$$

имеет положительные корни; обозначим наибольший из этих корней $\bar{\theta}_2$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (9)–(11), а также условия

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0;$$

$$2\alpha_0 < \left(\frac{\gamma_1^2}{T}\right)^{1/3}, \quad 2\alpha_0 < \gamma_1 \bar{\theta}_2.$$

Тогда краевая задача I не может иметь в пространстве $V_2^{2,4}$ более одного решения.

Доказательство. В форме $\tilde{F}(\xi)$ положим

$$A_1 = \theta, \quad A_2 = \frac{3 + \rho_0}{T}, \quad A_3 = \gamma_1 \theta + \rho_0 \alpha_0, \quad B_1 = 1 + \frac{\rho_0}{2}, \quad B_2 = \alpha_0 \theta.$$

Далее положим $\rho_0 = -2$. Имеет место равенство

$$A_1 A_2 A_3 - A_1 B_2^2 = \theta \left[\frac{\gamma_1 \theta - 2\alpha_0}{T} - \alpha_0^2 \theta^2 \right].$$

Следовательно, квадратичная форма $F(-2; \xi)$ будет неотрицательно определена, если для чисел θ выполняется неравенство

$$2\alpha_0 < \gamma_1 \theta,$$

и если неравенство

$$\alpha_0^2 T \theta^2 - \gamma_1 \theta + 2\alpha_0 \leq 0$$

имеет положительные решения. Условия теоремы означают, что и то, и другое свойства будут иметь место для положительных чисел θ , близких к числу $\bar{\theta}_2$.

Проведенные рассуждения означают, что для краевой задачи I при выполнении условий теоремы для $\rho_0 = -2$ будут выполняться все условия теоремы 1. А это и означает, что для краевой задачи I имеет место свойство единственности решений.

Теорема доказана. $\square$

Аналогичным образом — т.е. умножая уравнение (1₂) на функцию $-2(T_0 - t)u_t(x, t) - 2u(x, t)$ и интегрируя — можно уточнить условия единственности на параметры α_1 и α_2 в случаях $\alpha_0 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$ или $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$.

Перейдем к обсуждению единственности решений краевой задачи II.

Теорема 4. Пусть выполняются условия (9)–(11), а также условие

$$2\beta_0 + \beta_1^2 \leq 0. \quad (20)$$

Тогда краевая задача II не может иметь в пространстве $V_2^{2,4}$ более одного решения.

Доказательство. Умножим уравнение (1₂) с тождественно нулевой правой частью на функцию $u_{ttt}(x, t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q . Получим равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_{ttt}^2(x, T) dx + \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} a^{ij}(x) u_{x_i t}(x, T) u_{x_j t}(x, T) - \right. \\ & \left. - \beta_1 a^{ij}(x) u_{x_i t}(x, T) u_{x_j}(x, T) - \beta_0 a^{ij}(x) u_{x_i}(x, T) u_{x_j}(x, T) \right] dx - \\ & - \int_{\Omega} a(x) \left[\frac{1}{2} u_t^2(x, T) - \beta_1 u_t(x, T) u(x, T) - \beta_0 u^2(x, T) \right] dx = 0. \end{aligned}$$

Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & -\beta_1 a^{ij}(x) u_{x_i t}(x, T) u_{x_j}(x, T) \geq \\ & \geq -|\beta_1| [a^{ij}(x) u_{x_i t}(x, T) u_{x_j t}(x, T)]^{1/2} [a^{ij}(x) u_{x_i}(x, T) u_{x_j}(x, T)]^{1/2} \end{aligned}$$

(являющееся следствием неравенства Коши–Буняковского). Следовательно, от предыдущего равенства можно перейти к неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_{ttt}^2(x, T) dx + \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} a^{ij}(x) u_{x_i t}(x, T) u_{x_j t}(x, T) - \right. \\ & - |p_1| [a^{ij}(x) u_{x_i t}(x, T) u_{x_j t}(x, T)]^{1/2} [a^{ij}(x) u_{x_i}(x, T) u_{x_j}(x, T)]^{1/2} - \\ & \left. - \beta_0 a^{ij}(x) u_{x_i}(x, T) u_{x_j}(x, T) \right\} dx - \\ & - \int_{\Omega} a(x) \left[\frac{1}{2} u_t^2(x, T) - \beta_1 u_t(x, T) u(x, T) - \beta_0 u^2(x, T) \right] dx \leq 0. \end{aligned}$$

Из условия (20) вытекает, что второй и третий интегралы в этом неравенстве неотрицательны. Следовательно, при $x \in \Omega$ выполняется тождество $u_{ttt}(x, T) \equiv 0$. Умножим уравнение (1₂) на функцию $((T - t)u_{tt}(x, t))_t$ и проинтегрируем по цилиндру Q . Получим равенство

$$\frac{3}{2} \int_Q u_{ttt}^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_Q a^{ij} u_{x_i t} u_{x_j t} dx dt - \frac{1}{2} \int_Q a u^2 dx dt = 0.$$

Из этого равенства и следует тождество $u(x, t) \equiv 0$ в Q , т.е. следует единственность решений краевой задачи II.

Теорема доказана. $\square$

Перейдем к исследованию разрешимости краевых задач I и II.

Для краевой задачи I будут проанализированы ситуации, соответствующие теоремам 2 и 3 единственности.

Пусть δ и θ есть действительные числа. Положим

$$\begin{aligned} p_0(\delta) &= p_0 - (2\alpha_1\gamma_1 + \alpha_0^2)\delta, \quad p_1(\delta) = p_1 - \frac{3\gamma_1\delta}{T}, \\ \tilde{p}_1(\delta) &= \left(\frac{3a_0}{a_1T} - 2\alpha_1 \right) \gamma_1 - \frac{3a_0\gamma_1\delta}{a_1T}, \\ P_\delta(\theta) &= p_0(\delta)\theta^2 - p_1(\delta)\theta + \gamma_1, \quad \tilde{P}_\delta(\theta) = p_0(\delta)\theta^2 - \tilde{p}_1(\delta)\theta + \gamma_1. \end{aligned}$$

Теорема 5. Пусть выполняются условия (9) и (10), а также условия

$$a(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad a(x) \leq 0 \quad \text{при } x \in \overline{\Omega}, \quad (11')$$

существуют числа δ_0 и θ_0^* такие, что

$$\delta_0 \in (0, 1], \quad \theta_0^* > 0, \quad P_{\delta_0}(\theta_0^*) \leq 0, \quad 2\alpha_1\theta_0^* < \frac{3}{T}; \quad (21)$$

существуют числа δ_1 и θ_1^* такие, что

$$\delta_1 \in (0, 1], \quad \theta_1^* > 0, \quad \tilde{P}_{\delta_1}(\theta_1^*) \leq 0, \quad 2\alpha_1\theta_1^* < \frac{3a_0}{a_1T}. \quad (22)$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$, для которой выполняется одно из условий

- а) $f(x, t) \in L_2(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega))$,
- б) $f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q)$

краевая задача I имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $V_2^{2,4}$.

Доказательство. Воспользуемся методом Галеркина с выбором специального базиса [[8], гл. 1].

Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{w_k(x)\}_{k=1}^\infty$ есть соответственно последовательность собственных чисел и ортонормированная полная в пространстве $L_2(\Omega)$ последовательность собственных функций задачи

$$Aw = \lambda w, \quad w(x)|_\Gamma = 0.$$

Существование таких последовательностей известно — см., например, [[9], гл. 6, § 5; [10], гл. VIII, § 1]. Более того, известно, что все числа λ_k отрицательны, их можно упорядочить по убыванию (что и будет считаться выполненным), и что выполняется $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = -\infty$.

Положим

$$f_k(t) = \int_{\Omega} f(x, t) w_k(x) dx.$$

Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $c_k(t)$, являющуюся на интервале $(0, T)$ решением уравнения

$$c_k^{(4)}(t) + \lambda_k c_k(t) = f_k(t) \quad (23)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$c_k(0) = c_k'(0) = c_k''(0) = 0, \quad c_k'''(T) = \alpha_0 c_k(T) + \alpha_1 c_k'(T) + \alpha_2 c_k''(T). \quad (24)$$

Покажем, что для этой задачи имеет место свойство единственности решений в пространстве $W_2^4([0, T])$.

Пусть δ_0 и θ_0^* есть числа, определенные условием (21). Положим $T_0 = \theta_0^* + T$, $\tilde{\delta}_0 = \delta_0(T_0 - T)$. Умножим уравнение (23) с нулевой правой частью на функцию $-2(T_0 - t)c_k'(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, T]$. После интегрирования по частям с использованием условий (24) получим равенство

$$3 \int_0^T c_k''^2(t) dt - \lambda_k \int_0^T c_k^2(t) dt + (T_0 - T)c_k''^2(T) - 2\alpha_1(T_0 - T)c_k'^2(T) -$$

$$-2\alpha_0(T_0 - T)c_k'(T)c_k(T) - 2[1 + \alpha_2(T_0 - T)]c_k''(T)c_k'(T) - \lambda_k(T_0 - T)c_k^2(T) = 0.$$

Используя далее неравенство (8) и учитывая, что числа λ_k отрицательны и образуют монотонно убывающую последовательность, получим, что выполняется неравенство

$$-\lambda_k \int_0^T c_k^2(t) dt + (T_0 - T)c_k''^2(T) + \left[\frac{3}{T} - 2\alpha_1(T_0 - T) \right] c_k'^2(T) +$$

$$+ |\lambda_1|(T_0 - T)c_k^2(T) - 2[1 + \alpha_2(T_0 - T)]c_k''(T)c_k'(T) - 2\alpha_0(T_0 - T)c_k'(T)c_k(T) \leq 0.$$

Имеет место равенство

$$\int_{\Omega} [a^{ij}(x)w_{1x_i}(x)w_{1x_j}(x) - a(x)w_1^2(x)] dx = |\lambda_1|.$$

Из этого равенства, условий (10) и (11'), а также из неравенства (7) следует оценка

$$|\lambda_1| \geq \gamma_1.$$

Используя эту оценку, а также используя представление $T_0 - T = (1 - \delta_0)(T_0 - T) + \tilde{\delta}_0$, получим, что для функций $c_k(t)$ выполняется неравенство

$$-\lambda_k \int_0^T c_k^2(t) dt + \delta_1 c_k''^2(T) + (1 - \delta_0)(T_0 - T)c_k''^2(T) + \left[\frac{3}{T} - 2\alpha_1(T_0 - T) \right] c_k'^2(T) -$$

$$-2[1 + \alpha_2(T_0 - T)]c_k''(T)c_k'(T) - 2\alpha_0(T_0 - T)c_k'(T)c_k(T) + \gamma_1(T_0 - T)c_k^2(T) \leq 0.$$

Вследствие условия (21) последние пять слагаемых в этом неравенстве образуют неотрицательную квадратичную форму относительно величин $c_k''(T)$, $c_k'(T)$, $c_k(T)$. Следовательно, для функций $c_k(t)$ выполняется неравенство

$$-\lambda_k \int_0^T c_k^2(t) dt \leq 0,$$

которое и означает, что для краевой задачи (22), (23) имеет место свойство единственности решений в пространстве $W_2^4([0, T])$.

Задача (23), (24) представляет собой краевую задачу для линейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Решение этой задачи определяется четырьмя постоянными, которые находятся с помощью линейной алгебраической системы из четырех уравнений. Поскольку имеет место свойство единственности, то эта система имеет единственное решение, и тем самым функции $c_k(t)$ корректно определены при $t \in [0, T]$, $k = 1, 2, \dots$, и вследствие принадлежности функций $f_k(t)$ пространству $L_2([0, T])$ будут принадлежать пространству $W_2^4([0, T])$.

Вернемся к краевой задаче I. Построим семейство ее приближенных решений. Именно, положим

$$u_m(x, t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) w_k(x).$$

Покажем, что для семейства $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^\infty$ имеют место априорные оценки, которые позволяют выбрать из этого семейства последовательность, сходящуюся к искомому решению краевой задачи I.

Для функций $u_m(x, t)$ для всех $m = 1, 2, \dots$ имеют место равенства

$$\int_{\Omega} (u_{mtttt} + Au_m) w_k dx = \int_{\Omega} f w_k dx, \quad k = 1, \dots, m. \quad (25)$$

Умножим k -ое равенство (25) на функцию $-2(T_0 - t)c'_k(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, T]$. Суммируя по k в пределах от 1 до m , придем к равенству

$$-2 \int_Q (u_{mtttt} + Au_m)(T_0 - t) u_{mt} dx dt = -2 \int_Q f(T_0 - t) u_{mt} dx dt.$$

Интегрируя по частям и используя краевые условия (24), нетрудно от данного равенства перейти к следующему

$$\begin{aligned} & 3 \int_Q u_{mtt}^2 dx dt + \int_Q a^{ij}(x) u_{mx_i} u_{mx_j} dx dt - \int_Q a(x) u_m^2 dx dt + \\ & + \int_{\Omega} \{ (T_0 - T) u_{mtt}^2(x, T) - 2[1 + \alpha_2(T_0 - T)] u_{mtt}(x, T) u_{mt}(x, T) - \\ & - 2\alpha_1(T_0 - T) u_{mt}^2(x, T) - 2\alpha_0(T_0 - T) u_{mt}(x, T) u_m(x, T) + \\ & + (T_0 - T) a^{ij}(x) u_{mx_i}(x, T) u_{mx_j}(x, T) - (T_0 - T) u_m^2(x, T) \} dx = \\ & - 2 \int_Q (T_0 - t) f u_{mt} dx dt. \end{aligned} \quad (26)$$

Используя далее неравенства (7) и (8), равенство $T_0 - T = (1 - \delta_0)(T_0 - T) + \tilde{\delta}_0$, условия (10), (11') и (21), а также применяя неравенство Юнга, получим, что следствием (26) будет оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_{mtt}^2(x, T) dx + \sum_{i=1}^n \int_Q u_{mx_i}^2 dx dt \leq \mathfrak{a}_1 \int_Q u_{mt}^2 dx dt + \\ & + C(c_0, \delta_0, \theta_0, \mathfrak{a}_1) \int_Q f^2 dx dt, \end{aligned} \quad (27)$$

в котором $\mathfrak{a}_1$ есть произвольное положительное число.

Умножим k -ое равенство (25) на функцию $-2(T - t)c'_k(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, T]$. Суммируя по k и применяя далее интегрирования по частям, получим

$$3 \int_Q u_{mtt}^2 dx dt + \int_Q a^{ij}(x) u_{mx_i} u_{mx_j} dx dt - \int_Q a(x) u_m^2 dx dt =$$

$$= 2 \int_{\Omega} u_{mtt}(x, T) u_{mt}(x, T) dx - 2 \int_Q (T - t) f u_{mt} dx dt. \quad (28)$$

Оценивая правую часть данного равенства с помощью неравенства Юнга, неравенства (27), а также очевидных неравенств

$$\int_{\Omega} u_{mt}^2(x, T) dx \leq T \int_Q u_{mtt}^2 dx dt, \quad \int_Q u_{mt}^2 dx dt \leq T^2 \int_Q u_{mtt}^2 dx dt,$$

нетрудно получить следствие равенства (28) — неравенство

$$\begin{aligned} & 3 \int_Q u_{mtt}^2 dx dt + \int_Q a^{ij} u_{mx_i} u_{mx_j} dx dt - \int_Q a(x) u_m^2 dx dt \leq \alpha_2^2 T \int_Q u_{mtt}^2 dx dt + \\ & + \frac{\alpha_1 T}{\alpha_2^2} \int_Q u_{mtt}^2 dx dt + \alpha_3^2 \int_Q u_{mtt}^2 dx dt + \left(\frac{C(a_0, \delta_0, \theta_0, \alpha_1)}{\alpha_2^2} + \frac{T^2}{\alpha_3^2} \right) \int_Q f^2 dx dt \end{aligned} \quad (29)$$

(α_2 и α_3 — произвольные положительные числа). Положим $\alpha_1 = \alpha_2^4$. Подбирая далее числа α_2 и α_3 малыми и фиксируя, нетрудно из (29) вывести первую априорную оценку для функций $u_m(x, t)$:

$$\begin{aligned} & \int_Q \left[u_{mtt}^2 + \sum_{i=1}^n u_{mx_i}^2 \right] dx dt + \int_{\Omega} u_{mtt}^2(x, T) dx \leq \\ & \leq N_1 \int_Q f^2 dx dt, \end{aligned} \quad (30)$$

постоянная N_1 в которой определяется лишь функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, числами α_0 , α_1 , α_2 и T .

Пусть δ_1 и θ_1^* есть числа, определенные условием (22). Положим $T_1 = \theta_1^* + T$, $\tilde{\delta}_1 = \delta_1(T_1 - T)$.

Умножим k -ое равенство (25) на функцию $\lambda_k(T_1 - t)c'_k(t)$. Интегрируя по отрезку $[0, T]$ и суммируя, получим равенство

$$\int_Q (T_1 - t)(u_{mtttt} + Au_m)Au_{mt} dx dt = \int_Q (T_1 - t)fAu_{mt} dx dt.$$

Это равенство после интегрирования по частям и использования соотношения $Au_m(x, T) = Au_m(x, T) - a(x)u_m(x, T) + a(x)u_m(x, T)$ преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \int_Q a^{ij} u_{mx_i tt} u_{mx_j tt} dx dt + \frac{1}{2} \int_Q (Au_m)^2 dx dt + \\ & + \frac{T_1 - T}{2} \int_{\Omega} [Au_m(x, T) - a(x)u_m(x, T)]^2 dx - \\ & - (T_1 - T) \int_{\Omega} a(x)a^{ij}(x)u_{mx_i}(x, T)u_{mx_j}(x, T) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ (T_1 - T)a^{ij}(x)u_{mx_i tt}(x, T)u_{mx_j tt}(x, T) - \\ & - 2[1 + \alpha_2(T_1 - T)]a^{ij}(x)u_{mx_i tt}(x, T)u_{mx_j t}(x, T) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2\alpha_1(T_1 - T)a^{ij}(x)u_{mx_{it}}(x, T)u_{mx_jt}(x, T) - \\
 & -2\alpha_0(T_1 - T)a^{ij}(x)u_{mx_{it}}(x, T)u_{mx_j}(x, T)\} dx = \\
 & \int_Q (T_1 - t)fAu_{mt} dx dt + \frac{3}{2} \int_Q au_{mtt}^2 dx dt + \\
 & + (T_1 - T) \int_{\Omega} a_{x_i}(x)a^{ij}(x)u_{mx_j}(x, T)u_m(x, T) dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) \{(T_1 - T)u_{mtt}^2(x, T) - 2[1 + \alpha_2(T_1 - T)]u_{mtt}(x, T)u_{mt}(x, T) - \\
 & - 2\alpha_1(T_1 - T)u_{mt}^2(x, T) - 2\alpha_0(T_1 - T)u_{mt}(x, T)u_m(x, T) - \\
 & - a^2(x)u_m^2(x, T)\} dx. \tag{31}
 \end{aligned}$$

Имеют место неравенства

$$\begin{aligned}
 & \int_Q a^{ij}u_{mx_{itt}}u_{mx_jtt} dx dt \geq \frac{a_0}{a_1T} \int_{\Omega} a^{ij}(x)u_{mx_{it}}(x, T)u_{mx_j}(x, T) dx, \tag{32} \\
 & \int_{\Omega} [Au_m(x, T) - a(x)u_m(x, T)]^2 dx \geq a_0\gamma_0^{-1} \int_{\Omega} a^{ij}(x)u_{mx_{it}}(x, T)u_{mx_j}(x, T) dx. \tag{33}
 \end{aligned}$$

Пусть для функции $f(x, t)$ выполняется условие а) теоремы. Тогда после использования неравенств (32) и (33), интегрирования по частям в слагаемом с функцией $f(x, t)$, применения неравенства Юнга и оценки (30), получим следствие (31):

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_Q (Au_m)^2 dx dt + \frac{\tilde{\delta}_1(T_1 - T)}{2} \int_{\Omega} a^{ij}(x)u_{mx_{itt}}(x, T)u_{mx_jtt}(x, T) dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(1 - \tilde{\delta}_1)(T_1 - T)a^{ij}(x)u_{mx_{it}}(x, T)u_{mx_jtt}(x, T) dx + \\
 & + \left[\frac{3a_0}{a_1T} - 2\alpha_1(T_1 - T) \right] a^{ij}(x)u_{mx_{it}}(x, T)u_{mx_jt}(x, T) + \\
 & + \gamma_1(T_1 - T)a^{ij}(x)u_{mx_i}(x, T)u_{mx_j}(x, T) - \\
 & - 2[1 + \alpha_2(T_1 - T)]a^{ij}(x)u_{mx_{itt}}(x, T)u_{mx_jt}(x, T) - \\
 & - 2\alpha_0(T_1 - T)a^{ij}(x)u_{mx_{it}}(x, T)u_{mx_i}(x, T)\} \leq \mathfrak{a}_4 \sum_{i=1}^n \int_Q u_{mx_{it}}^2 dx dt + \\
 & + C_1 \int_Q \left[f^2 + \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2 \right] dx dt; \tag{34}
 \end{aligned}$$

число $\mathfrak{a}_4$ здесь есть произвольное положительное число, число же C_1 определяется функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$, числом T , областью Ω , а также числом $\mathfrak{a}_4$.

Условие (22) означает, что третье слагаемое левой части (34) неотрицательно. Следовательно, имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_Q (Au_m)^2 dx dt + \frac{\tilde{\delta}_1(T_1 - T)}{2} \int_{\Omega} a^{ij}(x) u_{mx_{i}tt}(x, T) u_{mx_{j}tt}(x, T) dx \leq \\ & \leq \varkappa_4 \sum_{i=1}^n \int_Q u_{mx_{i}t}^2 dx dt + C_1 \int_Q \left[f^2 + \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2 \right] dx dt, \end{aligned} \quad (35)$$

в которой $\varkappa_4$ есть произвольное положительное число, число же C_1 определяется функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$, числами α_0 , α_1 , α_2 и T , областью Ω , а также числом $\varkappa_4$.

Умножим k -ое равенство (25) на функцию $\lambda_k(T - t)c'_k(t)$. Интегрируя по отрезку $[0, T]$ и суммируя, получим равенство

$$\int_Q (T - t)(u_{mtttt} + Au_m)Au_{mt} dx dt = \int_Q (T - t)fAu_{mt} dx dt. \quad (36)$$

Это равенство легко преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \int_Q a^{ij}(x) u_{mx_{i}tt} u_{mx_{j}tt} dx dt + \frac{1}{2} \int_Q (Au_m)^2 dx dt = \\ & - \int_Q (T - t) a^{ij} f_{x_i} u_{mx_{i}t} u_{mx_{j}t} dx dt + \int_{\Omega} a^{ij}(x) u_{mx_{i}tt}(x, T) u_{mx_{j}t}(x, T) dx + \\ & + \frac{3}{2} \int_Q a(x) u_{mtt}^2 dx dt - \int_{\Omega} a(x) u_{mtt}(x, T) u_{mt}(x, T) dx. \end{aligned} \quad (37)$$

Применяя к первым двум слагаемым равенства (37) неравенство Юнга и далее используя неравенство (35), используя также оценку (30) и подбирая число $\varkappa_4$ малым, получим, что для семейства $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^{\infty}$ выполняется априорная оценка

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_Q u_{mx_{i}tt}^2 dx dt + \int_Q (Au_m)^2 dx dt + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{mx_{i}tt}^2(x, T) dx \leq \\ & \leq N_2 \int_Q \left[f^2 + \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2 \right] dx dt, \end{aligned} \quad (38)$$

число N_2 в которой определяется лишь функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$, числами α_0 , α_1 , α_2 и T , а также областью Ω .

Умножим k -ое равенство (25) на функцию $c_k^{(4)}(t)$. Интегрируя по отрезку $[0, T]$ и суммируя, получим равенство

$$\int_Q (u_{mtttt} + Au_m)u_{mtttt} dx dt = \int_Q f u_{mtttt} dx dt.$$

Используя далее неравенство Юнга, оценки (30) и (38), получим третью априорную оценку

$$\int_Q u_{mtttt}^2 dx dt \leq N_3 \int_Q \left[f^2 + \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2 \right] dx dt, \quad (39)$$

число N_3 в которой определяется лишь функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$, числами α_0 , α_1 , α_2 и T , а также областью Ω .

Оценки (30), (38) и (39) означают, что семейство $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^\infty$ равномерно ограничено в пространстве $V_2^{2,4}$. Стандартные рассуждения о выборе из этого семейства слабо сходящейся подпоследовательности (основанные на свойстве рефлексивности гильбертова пространства) дают существование предельной функции $u(x, t)$, принадлежащей пространству $V_2^{2,4}$, являющейся решением уравнения (1) и такой, что для нее выполняются краевые условия (2), (3) и (4). Эта функция и будет искомым решением краевой задачи I.

Пусть теперь для функции $f(x, t)$ выполняется условие б). В равенствах (31) и (36) в слагаемых с функцией $f(x, t)$ выполним интегрирование по частям по переменной t . Повторяя выкладки, которые привели к неравенству (38), получим, что для функций $u_m(x, t)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_Q u_{mx_{i}tt}^2 dx dt + \int_Q (Au_m)^2 dx dt + \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{mx_{i}tt}^2(x, T) dx \leq \\ \leq \mathfrak{a}_5 \int_\Omega [Au_m(x, T)]^2 dx + C_2 \int_Q (f^2 + f_t^2) dx dt, \end{aligned} \quad (40)$$

в котором $\mathfrak{a}_5$ есть произвольное положительное число, число же C_2 определяется функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$, числами α_0 , α_1 , α_2 и T , областью Ω , а также числом $\mathfrak{a}_5$.

Умножим k -ое равенство (25) на функцию $\lambda_k c'_k(t)$. Интегрируя по отрезку $[0, T]$ и суммируя, получим равенство

$$\int_Q (u_{mtttt} + Au_m) Au_{mt} dx dt = \int_Q f Au_{mt} dx dt.$$

Это равенство преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_\Omega [Au_m(x, T)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_\Omega a^{ij}(x) u_{mx_{i}tt}(x, T) u_{mx_{j}tt}(x, T) dx - \\ - \frac{1}{2} \int_\Omega a(x) u_{mtt}^2(x, T) dx = \int_Q f_t Au_m dx dt - \\ - \int_\Omega f(x, T) Au_m(x, T) dx + \alpha_0 \int_\Omega a^{ij}(x) u_{mx_{i}}(x, T) u_{mx_{j}t}(x, T) dx + \\ + \alpha_1 \int_\Omega a^{ij}(x) u_{mx_{i}t}(x, T) u_{mx_{j}t}(x, T) dx + \alpha_2 \int_\Omega a^{ij}(x) u_{mx_{i}tt}(x, T) u_{mx_{j}t}(x, T) dx - \\ - \alpha_0 \int_\Omega a(x) u_{mt}(x, T) u_m(x, T) dx - \alpha_1 \int_\Omega a(x) u_{mt}^2(x, T) dx - \end{aligned}$$

$$-\alpha_2 \int_{\Omega} a(x) u_{mtt}(x, T) u_{mt} dx.$$

Применяя далее неравенство Юнга, оценки (30) и (40), и подбирая число α_5 малым, получим, что для функций $u_m(x, t)$ имеет место априорная оценка

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_Q u_{mx_i tt}^2 dx dt + \int_Q (Au_m)^2 dx dt + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{mx_i tt}^2(x, T) dx + \\ + \int_{\Omega} [Au_m(x, T)]^2 dx \leq N_4 \int_Q (f^2 + f_t^2) dx dt, \end{aligned} \quad (41)$$

число N_4 в которой определяется лишь функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$, числами α_0 , α_1, α_2 и T , а также областью Ω .

Следующая оценка

$$\int_Q u_{mttt}^2 dx dt \leq N_5 \int_Q (f^2 + f_t^2) dx dt \quad (42)$$

очевидным образом вытекает из предыдущих.

Оценки (30), (41) и (42) вновь означают, что семейство $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^{\infty}$ равномерно ограничено в пространстве $V_2^{2,4}$. Используя свойство рефлексивности гильбертова пространства, вновь получим слабо сходящуюся подпоследовательность, пределом которой будет искомое решение краевой задачи I.

Теорема полностью доказана. $\square$

Приведем примеры условий на числа α_0 , α_1 и α_2 , при выполнении которых будут выполняться как условия теоремы единственности (теоремы 2), так и условия теоремы существования (теоремы 5).

Пусть выполняется условие а) теоремы 2. Тогда для малых положительных чисел δ будет выполняться $p_0(\delta) < 0$ и для таких δ при больших положительных числах Θ выполняются неравенства $P(\Theta) \leq 0$, $P_{\delta}(\Theta) \leq 0$, $\tilde{P}_{\delta}(\Theta) \leq 0$. Далее, условие а) означает, что число α_1 неположительно. Но тогда третьи неравенства условий (21) и (22) будут выполняться автоматически. В целом получаем, что условие а) теоремы 2, условия (9), (10) и (11') дают существование и единственность регулярных решений краевой задачи I (при выполнении, естественно, для функций $f(x, t)$ условий теоремы 5).

Пусть теперь выполняется условие

$$p_0 = 0, \quad 2\alpha_1\gamma_1 + \alpha_0^2 > 0. \quad (43)$$

Прежде всего заметим, что это условие влечет неравенства $\alpha_1 \leq 0$, $p_1 > 0$, и что для положительных чисел δ будет выполняться неравенство $p_0(\delta) < 0$. Но тогда для больших положительных чисел Θ вновь будут выполняться условия (21) и (22), и в целом получим, что условия (43), (9), (10), (11') гарантируют существование и единственность регулярных решений краевой задачи I.

Рассмотрим теперь случай

$$p_0 = 0, \quad 2\alpha_1\gamma_1 + \alpha_0^2 = 0. \quad (44)$$

В этом случае будут выполняться неравенства $\alpha_1 \leq 0$, $p_1 > 0$, $\tilde{p}_1 > 0$. Но тогда для малых положительных чисел δ будет выполняться условие б) теоремы 2, и также будут выполняться неравенства $p_1(\delta) > 0$, $\tilde{p}_1(\delta) > 0$. В свою очередь,

эти неравенства и условие (44) означают, что для больших положительных чисел Θ будут выполняться неравенства $P(\Theta) \leq 0$, $P_\delta(\Theta) \leq 0$, $\tilde{P}_\delta(\Theta) \leq 0$, и далее — что будут выполняться условия (21) и (22). В целом получаем, что условия (44), (9), (10) и (11') гарантируют существование и единственность регулярных решений краевой задачи I.

Рассмотрим следующий случай

$$p_0 = 0, \quad 2\alpha_1\gamma_1 + \alpha_0^2 < 0, \quad p_1 > 0. \quad (45)$$

В этом случае выполняются неравенства $\alpha_1 \leq 0$, $\tilde{p}_1(0) > 0$. При малых положительных числах δ будут иметь место неравенства $p_1(\delta) > 0$, $\tilde{p}_1(\delta) > 0$. Неравенство $P(\Theta) \leq 0$ будет выполняться для больших положительных чисел Θ , неравенства $2\alpha_1\theta < \frac{3}{T}$, $2\alpha_1\theta < \frac{3a_0}{a_1T}$ будут выполняться для всех положительных чисел θ . Далее, уравнение $P_\delta(\Theta) = 0$ при малых положительных δ имеет положительный корень Θ_2 , уравнение $\tilde{P}_\delta(\Theta) = 0$ также при малых положительных числах δ имеет положительный корень $\tilde{\theta}_2$, и для чисел θ из интервала $(0, \theta_2)$ или же из интервала $(0, \tilde{\theta}_2)$ будут выполняться требуемые неравенства $P_\delta(\Theta) \leq 0$, $\tilde{P}_\delta(\Theta) \leq 0$. Следовательно, и при выполнении условия (45), условий (9), (10) и (11') краевая задача I будет иметь единственное регулярное решение.

Анализ оставшихся случаев (соответствующих неравенству $p_0 > 0$) проводится в целом вполне аналогично анализу предыдущих случаев (хотя и с немного более громоздкими выкладками). Уточним лишь, что некоторые случаи невыполнения условий теорем единственности и существования регулярных решений краевой задачи I будут описаны в следующих пунктах.

Теорема 6. Пусть выполняются условия (9), (10), (11'), условие

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_0 \neq 0, \quad 2\alpha_0 < \left(\frac{\gamma_1^2}{T}\right)^{1/3}, \quad 2\alpha_0 < \gamma_1\bar{\Theta}_2,$$

а также одно из условий а) или б) теоремы 5. Тогда краевая задача I имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $V_2^{2,4}$.

Доказательство. Все рассуждения и выкладки будут вполне аналогичны рассуждениям и выкладкам, проведенным при доказательстве теоремы 5. Вновь будет использоваться метод Галеркина с выбором специального базиса. Необходимые априорные оценки выводятся после анализа равенств

$$\begin{aligned} & - \int_Q (u_{mtttt} + Au_m)[(T_0 - t)u_{mt} - 2u_m] dx dt = - \int_Q f[(T_0 - t)u_{mt} - 2u_m] dx dt, \\ & - \int_Q (u_{mtttt} + Au_m)[(T_0 - t)Au_{mt} + Au_m] dx dt = - \int_Q f[(T_0 - t)Au_{mt} + Au_m] dx dt. \end{aligned}$$

Первое из этих равенств преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \int_Q u_{mtt}^2 dx dt + 3 \int_Q a^{ij} u_{mx_i} u_{mx_j} dx dt - 3 \int_Q au_m^2 dx dt + \\ & + \int_\Omega \{ (T_0 - T)u_{mtt}^2(x, T) - 2\alpha_0(T_0 - T)u_{mt}(x, T)u_m(x, T) - 2\alpha_0u_m^2(x, T) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (T_0 - T) a^{ij} u_{mx_i}(x, T) u_{mx_j}(x, T) - (T_0 - T) a u_m^2(x, T) \} dx = \\
& = -2 \int_Q f [(T_0 - t) u_{mt} + u_m] dx dt.
\end{aligned}$$

Выберем число T_0 так, чтобы выполнялись неравенства

$$T_0 > T, \quad 2\alpha_0 < \gamma_1(T_0 - T)$$

(согласно условию теоремы это возможно). Далее неравенство (7), условие (10) и положительность числа $(T_0 - T)$ позволяют от последнего равенства перейти к неравенству

$$\begin{aligned}
& \int_Q u_{mtt}^2 dx dt + 3a_0 \sum_{i=1}^n \int_Q u_{mx_i}^2 dx dt + 2(T_0 - T) \int_{\Omega} u_{mtt}^2(x, T) dx + \\
& + \int_{\Omega} \{ [\gamma_1(T_0 - T) - 2\alpha_0] u_{mt}^2(x, T) - 2\alpha_0(T_0 - T) u_{mt}(x, T) u_m(x, T) + \\
& + \frac{1}{T} u_{mt}^2(x, T) \} dx \leq \frac{1}{T} \int_{\Omega} u_{mt}^2(x, T) dx + 2 \int_Q |f| |(T_0 - T) u_{mt} + u_m| dx dt.
\end{aligned}$$

Вследствие условий теоремы квадратичная форма

$$\frac{1}{T} u_{mt}^2(x, T) - 2\alpha_0(T_0 - T) u_{mt}(x, T) u_m(x, T) + \gamma_1(T_0 - T) u_m^2(x, T)$$

положительно определена. Это означает, что существует положительное число μ_0 такое, что выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{T} u_{mt}^2(x, T) - 2\alpha_0(T_0 - T) u_{mt}(x, T) u_m(x, T) + \gamma_1(T_0 - T) u_m^2(x, T) \geq \\
& \geq \mu_0 [u_{mt}^2(x, T) + u_m^2(x, T)].
\end{aligned}$$

Выберем число μ_1 так, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < \mu_1 < \min(1, \mu_0 T).$$

Используя неравенство (8) и последнее неравенство, получим

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1 - \mu_1}{T} + \mu_0 - \frac{1}{T} \right) \int_{\Omega} u_{mt}^2(x, T) dx + \mu_0 \int_{\Omega} u_m^2(x, T) dx + 2(T_0 - T) \int_{\Omega} u_{mtt}^2(x, T) dx + \\
& + \mu_1 \int_Q u_{mtt}^2 dx dt + 3a_0 \sum_{i=1}^n \int_Q u_{mx_i}^2 dx dt \leq \\
& \leq 2 \int_Q |f| |(T_0 - T) u_{mt} + u_m| dx dt.
\end{aligned}$$

Учитывая выбор числа μ_1 и применяя неравенство Юнга, получим что для функций $u_m(x, t)$ выполняется априорная оценка

$$\int_Q \left[u_{mtt}^2 + \sum_{i=1}^n u_{mx_i}^2 \right] dx dt + \int_{\Omega} [u_{mtt}^2(x, T) + u_m^2(x, T)] dx \leq R_1 \int_Q f^2 dx dt$$

с постоянной R_1 , определяющейся лишь функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$, числами α_0 и T , а также областью Ω .

Второе из анонсированных выше равенств после вполне аналогичных изложенных выше выкладкам приводит к априорной оценке одного из видов

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_Q u_{mx_{it}t}^2 dx dt + \int_Q (Au_m)^2 dx dt + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [u_{mx_{it}t}^2(x, T) + u_{mx_{it}}^2(x, T)] dx \leq \\ \leq R_2 \int_Q \left[f^2 + \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2 \right] dx dt, \\ \sum_{i=1}^n \int_Q u_{mx_{it}t}^2 dx dt + \int_Q (Au_m)^2 dx dt + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [u_{mx_{it}t}^2(x, T) + u_{mx_{it}}^2(x, T)] dx \leq \\ \leq R_3 \int_Q [f^2 + f_t^2] dx dt, \end{aligned}$$

в зависимости от того, какое условие на функцию f — а) или б) — выполняется; постоянные R_2 и R_3 здесь определяются функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, числами α_0 и T , а также областью Ω .

Оценка в пространстве $L_2(Q)$ для функций $u_{mtttt}(x, t)$ очевидна. Процедура выбора сходящейся подпоследовательности и доказательство выполнения для предельной функции уравнения (1) осуществляются стандартным образом. $\square$

Очевидно, что необходимые условия теорем 3 и 6 для числа α_0 выполняются при $\alpha_0 < 0$.

Перейдем к исследованию разрешимости краевой задачи II.

Теорема 7. Пусть выполняются условия (9)–(11), а также условие

$$\exists \delta_3 \in [0, 1) : \quad 2\delta_3\beta_0 + \beta_1^2 \leq 0. \quad (46)$$

Тогда для любой функции $f(x, t)$, для которой выполняется одно из условий

- а) $f(x, t) \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_{\frac{1}{2}}(\Omega))$;
- б) $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t) \in L_2(Q)$, $f_{tt}(x, t) \in L_2(Q)$

краевая задача II имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $V_2^{2,4}$.

Доказательство. Вновь будем использовать метод Галеркина с выбором специального базиса.

Семейство приближенных решений краевой задачи II вновь построим с помощью функций $w_k(x)$:

$$u_m(x, t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) w_k(x);$$

функции $c_k(t)$ здесь определяются как решение соответствующих краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$c_k^{(4)}(t) + \lambda_k c_k(t) = f_k(t),$$

$$c_k'(0) = c_k''(0) = c_k'''(0) = 0, \quad c_k''(T) = \beta_0 c_k(T) + \beta_1 c_k'(T).$$

Разрешимость этой краевой задачи в пространстве $W_2^4([0, T])$ вновь следует из единственности ее решений (которая устанавливается фактическим повторением доказательства теоремы 3). И, как и ранее, для доказательства существования решений краевой задачи II достаточно будет установить равномерную ограниченность семейства $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^\infty$ в пространстве $V_2^{2,4}$.

Умножим k -ое равенство (25) на функцию $c_k'''(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, T]$. Суммируя, получим равенство

$$\int_Q (u_{mttt} + Au_m)u_{mttt} dx dt = \int_Q f u_{mttt} dx dt.$$

Это равенство преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_{mttt}^2(x, T) dx + \frac{1 - \delta_3}{2} \int_{\Omega} a^{ij}(x) u_{mx_i t}(x, T) u_{mx_j t}(x, T) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\delta_3 a^{ij}(x) u_{mx_i t}(x, T) u_{mx_j t}(x, T) - 2\beta_0 a^{ij}(x) u_{mx_i}(x, T) u_{mx_j}(x, T) - \\ & - 2\beta_1 a^{ij}(x) u_{mx_i}(x, T) u_{mx_j t}(x, T)] dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) [u_{mt}^2(x, T) - 2\beta_0 u_m^2(x, T) - \\ & - 2\beta_1 u_{mt}(x, T) u_m(x, T)] dx = \int_Q f u_{mttt} dx dt. \end{aligned}$$

При выполнении условия (46) следствием этого равенства будет оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[u_{mttt}^2(x, T) + \sum_{i=1}^n u_{mx_i t}^2(x, T) \right] dx \leq \\ & \leq \mathfrak{a}_6 \int_Q u_{mttt}^2 dx dt + C_3 \int_Q f^2 dx dt, \end{aligned} \quad (47)$$

в которой $\mathfrak{a}_6$ есть произвольное положительное число, число же C_3 определяется функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, а также числами δ_3 и $\mathfrak{a}_6$ (при выводе этой оценки использовались также неравенство Коши–Буняковского и неравенство Юнга).

Умножим теперь k -ое равенство (25) на функцию $((T - t)c_k''(t))'$. Интегрируя по отрезку $[0, T]$, суммируя и далее применяя формулу интегрирования по частям, получим равенство

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \int_Q u_{mttt}^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_Q a^{ij} u_{mx_i t} u_{mx_j t} dx dt - \frac{1}{2} \int_Q a u_{mt}^2 dx dt = \\ & = \int_{\Omega} u_{mttt}(x, T) u_{mtt}(x, T) dx + \int_Q f \left[\frac{\partial}{\partial t} (T - t) u_{mtt} \right] dx dt. \end{aligned}$$

Неравенство Юнга и оценка (47) с выбором числа $\mathfrak{a}_6$ малым позволяет вывести из этого равенства первую априорную оценку для семейства $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^\infty$

приближенных решений краевой задачи II:

$$\begin{aligned} \int_Q \left[u_{mttt}^2 + \sum_{i=1}^n u_{mx_i t}^2 \right] dx dt + \int_{\Omega} \left[u_{mttt}^2(x, T) + \sum_{i=1}^n u_{mx_i t}^2(x, T) \right] dx \leq \\ \leq N_6 \int_Q f^2 dx dt; \end{aligned} \quad (48)$$

постоянная N_6 в этой оценке определяется лишь функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$, а также числами δ_3 и T .

Умножим k -ое равенство (25) на функцию $-\lambda_k c_k'''(t)$. Интегрируя по отрезку $[0, T]$, суммируя и далее применяя формулу интегрирования по частям, получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} a^{ij}(x) u_{mx_i ttt}(x, T) u_{mx_j ttt}(x, T) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) u_{mttt}^2(x, T) dx + \\ + \frac{1 - \delta_3}{2} \int_{\Omega} [Au_{mt}(x, T)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ \delta_3 [Au_{mt}(x, T)]^2 - \\ - 2\beta_1 Au_m(x, T) Au_{mt}(x, T) - 2\beta_0 [Au_m(x, T)]^2 \} dx = \int_Q f Au_{mttt} dx dt. \end{aligned} \quad (49)$$

Пусть выполняется условие а) теоремы. Имеет место равенство

$$\int_Q f Au_{mttt} dx dt = - \int_Q a^{ij} f_{x_i} u_{mx_j ttt} dx dt + \int_Q f a u_{mttt} dx dt.$$

Используя это равенство, условие (46) и оценку (48), получим, что следствием (49) будет оценка

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{mx_i ttt}^2(x, T) dx + \int_{\Omega} [Au_{mt}(x, T)]^2 dx \leq \varkappa_7 \sum_{i=1}^n \int_Q u_{mx_i ttt}^2 dx dt + \\ + C_4 \int_Q \left[f^2 + \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2 \right] dx dt, \end{aligned} \quad (50)$$

число $\varkappa_7$ в которой является произвольным положительным числом, число же C_4 определяется функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$, а также числами δ_3 , T и $\varkappa_7$.

Умножим k -ое равенство (25) на функцию $-\lambda_k ((T-t)c_k''(t))'$. После интегрирования по отрезку $[0, T]$, суммирования и применения формулы интегрирования по частям, получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \int_Q a^{ij} u_{mx_i ttt} u_{mx_j ttt} dx dt + \frac{1}{2} \int_Q (Au_{mt})^2 dx dt - \frac{3}{2} \int_Q a u_{mttt}^2 dx dt = \\ = \int_{\Omega} a^{ij}(x) u_{mx_i ttt}(x, T) u_{mx_j tt}(x, T) dx - \int_Q a(x) u_{mttt}(x, T) u_{mtt}(x, T) dx + \\ + \int_Q (T-t) a^{ij} f_{x_i} u_{mx_j ttt} dx dt - \int_Q a^{ij} f_{x_i} u_{mx_j tt} dx dt - \end{aligned}$$

$$- \int_Q (T-t) f a u_{mttt} dx dt + \int_Q f a u_{mtt} dx dt.$$

Неравенство Юнга и оценка (50) с выбором числа ε_7 малым позволяют вывести из этого равенства вторую априорную оценку для семейства $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^\infty$ приближенных решений краевой задачи II:

$$\begin{aligned} & \int_Q \left[(Au_{mt})^2 + \sum_{i=1}^n u_{mx_i ttt}^2 \right] dx dt + \int_\Omega [Au_{mt}(x, T)]^2 dx + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{mx_i ttt}^2(x, T) dx \leq N_7 \int_Q \left[f^2 + \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2 \right] dx dt; \end{aligned} \quad (51)$$

постоянная N_7 в этой оценке определяется лишь функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$, а также числами δ_3 и T .

Для получения следующей оценки умножим k -ое равенство (25) на функцию $\lambda_k c_k(t)$. Интегрируя по отрезку $[0, T]$ и суммируя, получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_Q (Au_m)^2 dx dt = - \int_Q a^{ij} u_{mx_i t} u_{mx_j ttt} dx dt + \int_Q a u_{mt} u_{mttt} dx dt + \\ & + \int_\Omega a^{ij}(x) u_{mx_i ttt}(x, T) u_{mx_j}(x, T) dx - \int_Q a(x) u_m(x, T) u_{mttt}(x, T) dx + \\ & + \int_Q f A u_m dx dt. \end{aligned}$$

Следствием этого равенства и неравенства (51) является оценка

$$\begin{aligned} & \int_Q (Au_m)^2 dx dt \leq \varepsilon_8 \left[\int_\Omega u_m^2(x, T) dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{mx_i}^2(x, T) dx \right] + \\ & + C_5 \int_Q \left[f^2 + \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2 \right] dx dt, \end{aligned} \quad (52)$$

в которой ε_8 есть произвольное положительное число, число же C_5 определяется функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$, а также числами δ_3 , T и ε_8 .

Имеют место неравенства

$$\begin{aligned} & \int_\Omega u_m^2(x, T) dx \leq K_0 \int_Q (u_m^2 + u_{mt}^2) dx dt, \\ & \int_\Omega u_{mx_i}^2(x, T) dx \leq K_0 \int_Q (u_{mx_i}^2 + u_{mx_i t}^2) dx dt, \end{aligned}$$

с постоянной K_0 , определяющейся лишь числом T — см. [6, 7]. Далее, правые части этих неравенств оцениваются сверху с помощью второго основного

неравенства для эллиптических операторов [7]. В результате получим оценки

$$\int_{\Omega} u_m^2(x, T) dx \leq K_1 \left[\int_Q (Au_m)^2 dx dt + \int_Q (Au_{mt})^2 dx dt \right], \quad (53)$$

$$\int_{\Omega} u_{mx_i}^2(x, T) dx \leq K_1 \left[\int_Q (Au_m)^2 dx dt + \int_Q (Au_{mt})^2 dx dt \right], \quad (54)$$

число K_1 в которых определяется лишь функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$, числом T и областью Ω .

Неравенства (50)–(54) вместе с неравенством Юнга и выбором числа $\varkappa_8$ малым дают третью априорную оценку для семейства $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^{\infty}$ приближенных решений краевой задачи II:

$$\int_Q (Au_m)^2 dx dt \leq N_8 \int_Q \left[f^2 + \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2 \right] dx dt; \quad (55)$$

постоянная N_8 в этой оценке определяется лишь функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$, числами δ_3 и T , а также областью Ω .

Последняя априорная оценка

$$\int_Q u_{mttt}^2 dx dt \leq N_9 \int_Q \left[f^2 + \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2 \right] dx dt \quad (56)$$

очевидным образом вытекает из предыдущих оценок (48), (52) и (55); постоянная N_9 в этой оценке определяется лишь функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$, числами δ_3 и T , а также областью Ω .

Оценки (48), (52), (55) и (56) означают, что семейство $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^{\infty}$ приближенных решений краевой задачи II равномерно ограничено в пространстве $V_2^{2,4}$. Используя вновь свойство рефлексивности гильбертова пространства, нетрудно найти слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{m_k}(x, t)\}_{k=1}^{\infty}$, пределом которой и будет решение краевой задачи II.

Пусть теперь выполняется условие б) теоремы. Имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_Q f Au_{mttt} dx dt &= \int_Q f_{tt} Au_{mt} dx dt - \int_{\Omega} f_t(x, T) Au_{mt}(x, T) dx + \\ &+ \beta_0 \int_{\Omega} f(x, T) Au_m(x, T) dx + \beta_1 \int_{\Omega} f(x, T) Au_{mt}(x, T) dx. \end{aligned}$$

Используя его, от (49) нетрудно перейти к неравенству

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{mx_i ttt}^2(x, T) dx + \int_{\Omega} [Au_{mt}(x, T)]^2 dx &\leq \varkappa_9 \int_Q (Au_{mt})^2 dx dt + \\ &+ C_6 \int_Q [f^2 + f_t^2 + f_{tt}^2] dx dt, \end{aligned} \quad (57)$$

в котором ε_9 есть произвольное положительное число, число же C_6 определяется лишь функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$, а также числами β_0 , β_1 , δ_3 , T и ε_9 .

Имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \int_Q a^{ij} u_{mx_i ttt} u_{mx_j ttt} dx dt + \frac{1}{2} \int_Q (Au_{mt})^2 dx dt - \frac{3}{2} \int_Q a u_{mttt}^2 dx dt = \\ & = \int_{\Omega} a^{ij}(x) u_{mx_i ttt}(x, T) u_{mx_j ttt}(x, T) dx - \int_Q a(x) u_{mttt}(x, T) u_{mtt}(x, T) dx + \\ & \quad + \int_Q (T-t) f_{tt} A u_{mt} dx dt - \int_Q f_t A u_{mt} dx dt \end{aligned}$$

(получаемое после умножения (25) на функцию $-\lambda_k((T-t)c_k''(t))'$, интегрирования по отрезку $[0, T]$ и суммирования). Это равенство вместе с неравенством (57) дает априорную оценку

$$\begin{aligned} & \int_Q \left[(Au_{mt})^2 + \sum_{i=1}^n u_{mx_i ttt}^2 \right] dx dt + \int_{\Omega} [Au_{mt}(x, T)]^2 dx + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{mx_i ttt}^2(x, T) dx \leq N_9 \int_Q [f^2 + f_t^2 + f_{tt}^2] dx dt, \end{aligned} \quad (58)$$

постоянная N_9 в этой оценке определяется лишь функциями $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a(x)$, а также числами δ_3 и T .

Следующие оценки

$$\int_Q (Au_m)^2 dx dt \leq N_9 \int_Q [f^2 + f_t^2 + f_{tt}^2] dx dt, \quad (59)$$

$$\int_Q u_{mttt}^2 dx dt \leq N_{10} \int_Q [f^2 + f_t^2 + f_{tt}^2] dx dt \quad (60)$$

выводятся с использованием оценок (48) и (58), а также второго основного неравенства для эллиптических операторов. Из оценок (48), (58)–(60) вновь вытекает равномерная ограниченность семейства $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^{\infty}$ приближенных решений краевой задачи II в пространстве $V_2^{2,4}$ и далее — существование подпоследовательности, сходящейся к искомому решению краевой задачи II.

Теорема полностью доказана. $\square$

Замечание 1. Из доказанных по ходу рассуждений оценок следует, что граничные значения $u(x, T)$, $u_t(x, T)$, $u_{tt}(x, T)$ обладают дополнительной гладкостью, не обеспечиваемой принадлежностью решения $u(x, t)$ пространству $V_2^{2,4}$. Так, например, из оценки (41) следует (после предельного перехода на соответствующей подпоследовательности), что $u(x, T) \in W_2^2(\Omega)$.

Замечание 2. Краевые задачи I и II в случаях $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ или $\beta_0 = \beta_1 = 0$ изучены в работе [5]. Условия разрешимости этой работы на функцию $f(x, t)$ соответствуют условиям б) теорем 4 или 5. Условия же а) являются новыми.

2. ПРИМЕРЫ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ.

Приведем несколько примеров, показывающих, что при нарушении условий теорем 1–4 может иметь место неединственность решений.

Пример 1.

Пусть выполняется условие

$$\alpha_0 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 \neq 0. \quad (61)$$

Рассмотрим однородную краевую задачу (23), (24). Решение $c_k(t)$ этой задачи имеет вид

$$c_k(t) = C_1 e^{\mu_k t} + C_2 e^{-\mu_k t} + C_3 \cos \mu_k t + C_4 \sin \mu_k t;$$

μ_k здесь есть положительные числа, для которого выполняется $\lambda_k = -\mu_k^4$. Краевые условия (24) дают для определения чисел C_1 – C_4 алгебраическую систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 + C_2 - C_4 = 0, \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0, \\ (\mu_k^2 - \alpha_1)C_1 e^{\mu_k T} - (\mu_k^2 - \alpha_1)C_2 e^{-\mu_k T} + \\ + (\mu_k^2 + \alpha_1)C_3 \sin \mu_k T - (\mu_k^2 + \alpha_1)C_4 \cos \mu_k T = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что выполняется

$$C_3 = 0, \quad C_2 = -C_1, \quad C_4 = -2C_1,$$

$$C_1 [(\mu_k^2 - \alpha_1)e^{\mu_k T} + (\mu_k^2 - \alpha_1)e^{-\mu_k T} + 2(\mu_k^2 + \alpha_1) \cos \mu_k T] = 0.$$

Отсюда следует, что если число $(\mu_k^2 - \alpha_1)e^{\mu_k T} + (\mu_k^2 - \alpha_1)e^{-\mu_k T} + 2(\mu_k^2 + \alpha_1) \cos \mu_k T$ равно нулю, то число C_1 может быть произвольным, и тем самым задача (23), (24) будет иметь нетривиальное решение. Равенство

$$(\mu_k^2 - \alpha_1)e^{\mu_k T} + (\mu_k^2 - \alpha_1)e^{-\mu_k T} + 2(\mu_k^2 + \alpha_1) \cos \mu_k T = 0$$

позволяет вычислить число α_1 :

$$\alpha_1 = \alpha_{1,k} = \frac{\mu_k^2 (e^{\mu_k T} + e^{-\mu_k T} + 2 \cos \mu_k T)}{e^{\mu_k T} + e^{-\mu_k T} - 2 \cos \mu_k T}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Таким образом, если в краевой задаче I выполняется условие (61), и если число α_1 совпадает с одним из чисел $\alpha_{1,k}$, то задача (23), (24) будет иметь нетривиальное решение $c_k(t)$, сама же однородная задача I будет иметь нетривиальное решение

$$u(x, t) = c_k(t)w_k(x).$$

Заметим, что числа $\alpha_{1,k}$ будут корректно определены для всех чисел k , поскольку знаменатель $e^{\mu_k T} + e^{-\mu_k T} - 2 \cos \mu_k T$ не обращается в нуль.

Пример 2.

Пусть теперь выполняется условие

$$\alpha_0 \neq 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0. \quad (62)$$

Вновь рассмотрим краевую задачу (23), (24). Решение этой задачи вновь имеет вид (62), но для чисел C_1, C_2, C_3, C_4 в рассматриваемом случае будет иметь

место следующая система

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 - C_2 + C_4 = 0, \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0, \\ (\mu_k^3 - \alpha_0)C_1 e^{\mu_k T} - (\mu_k^3 + \alpha_0)C_2 e^{-\mu_k T} + \\ (\mu_k^3 - \alpha_0)C_3 \sin \mu_k T - (\mu_k^3 + \alpha_0)C_4 \cos \mu_k T = 0. \end{cases}$$

Имеют место равенства $C_3 = 0$, $C_2 = -C_1$, $C_4 = -2C_1$,

$$C_1 [(\mu_k^3 - \alpha_0)e^{\mu_k T} + (\mu_k^3 + \alpha_0)e^{-\mu_k T} + 2(\mu_k^3 + \alpha_0) \cos \mu_k T] = 0.$$

Отсюда получаем, что C_1 будет произвольным, если выполняется

$$\alpha_0 = \alpha_{0,k} = \frac{\mu_k^3 (e^{\mu_k T} + e^{-\mu_k T} + 2 \cos \mu_k T)}{e^{\mu_k T} - e^{-\mu_k T} - 2 \sin \mu_k T}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для таких чисел $\alpha_{0,k}$ при выполнении условия (62) функция

$$u(x, t) = c_k(t)w_k(x)$$

будет представлять собой нетривиальное решение однородной краевой задачи I.

Пример 3.

Пусть выполняется условие

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_1 \neq 0.$$

Для решения $c_k(t)$ краевые условия дают алгебраическую систему

$$\begin{cases} C_1 - C_2 + C_4 = 0, \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0, \\ C_1 - C_2 - C_4 = 0, \\ (\mu_k - \beta_1)C_1 e^{\mu_k T} + (\mu_k + \beta_1)C_2 e^{-\mu_k T} - \\ - (\mu_k \cos \mu_k T - \beta_1 \sin \mu_k T)C_3 - (\mu_k \sin \mu_k T + \beta_1 \cos \mu_k T)C_4 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $C_4 = 0$, $C_2 = C_1$, $C_3 = 2C_1$,

$$\begin{aligned} &(\mu_k - \beta_1)C_1 e^{\mu_k T} + (\mu_k + \beta_1)C_2 e^{-\mu_k T} - \\ &- 2(\mu_k \cos \mu_k T - \beta_1 \sin \mu_k T)C_1 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что C_1 будет произвольным, если выполняется

$$\beta_1 = \beta_{1,k} = \frac{\mu_k [e^{\mu_k T} + e^{-\mu_k T} - 2 \cos \mu_k T]}{e^{\mu_k T} - e^{-\mu_k T} + 2 \sin \mu_k T}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тем самым, при выполнении условия $\beta_0 = 0$, $A_1 \neq 0$ и при совпадении числа β_1 с одним из чисел $\beta_{1,k}$ однородная краевая задача II будет иметь нетривиальное решение.

Заметим, что поскольку все числа μ_k положительны, то знаменатель $e^{\mu_k T} - e^{-\mu_k T} + 2 \sin \mu_k T$ не будет обращаться в нуль, и тем самым все числа $\beta_{1,k}$ корректно определены.

Пример 4.

Рассмотрим случай

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_0 \neq 0.$$

Так же как в вышеприведенных примерах получаем систему

$$\begin{cases} C_1 - C_2 + C_4 = 0, \\ C_1 + C_2 - C_4 = 0, \\ C_1 - C_2 - C_4 = 0, \\ (\mu_k^2 - \beta_0)C_1 e^{\mu_k T} + (\mu_k^2 - \beta_0)C_2 e^{-\mu_k T} - \\ - (\mu_k^2 + \beta_0)C_3 \cos \mu_k T - (\mu_k + \beta_0)C_4 \sin \mu_k T = 0. \end{cases}$$

Аналогично изложенному выше имеем $C_4 = 0$, $C_2 = C_1$, $C_3 = 2C_1$,

$$C_1 [(\mu_k^2 - \beta_0)e^{\mu_k T} + (\mu_k^2 - \beta_0)e^{-\mu_k T} - 2(\mu_k^2 + \beta_0) \cos \mu_k T] = 0,$$

$$\beta_0 = \beta_{0,k} = \frac{\mu_k^2 [e^{\mu_k T} + e^{-\mu_k T} - 2 \cos \mu_k T]}{e^{\mu_k T} + e^{-\mu_k T} + 2 \cos \mu_k T}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для таких чисел $\beta_{0,k}$ в случае $\beta_1 = 0$ однородная краевая задача II имеет нетривиальное решение.

3. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ.

1. В краевых задачах I и II коэффициенты α_0 , α_1 , α_2 , β_0 и β_1 вполне могут быть функциями, зависящими от пространственных переменных $x_1, \dots, x_n$. Выкладки и условия будут весьма громоздкими, но суть полученных результатов не изменится.

2. Коэффициенты a^{ij} , a оператора A вполне могут быть функциями, зависящими от переменной t . Априорные оценки при этом будут доказываться вполне аналогично тому, как доказывались априорные оценки в п. 2, но вместо метода Галеркина нужно будет использовать метод продолжения по параметру в сочетании с методом регуляризации (подобно тому, как это было сделано в [5]).

3. В целом аналогично, но с более громоздкими условиями и выкладками, изучаются существование и единственность решений краевых задач I и II для уравнений

$$u_{tttt} + \sum_{k=1}^3 p_k(x, t) \frac{\partial^k u}{\partial t^k} + Au = f(x, t).$$

4. Вместо краевого условия (2) можно задавать и иные условия — условия второй или третьей краевых задач.

5. Эллиптический оператор A второго порядка можно заменить эллиптическим оператором произвольного порядка (с естественным добавлением краевых условий на поверхности S).

REFERENCES

- [1] A.I. Kozhanov, N.R. Pinigina, *Boundary Value Problems for Certain Classes of Higher-Order Composite Type Equations*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 842–853. Zbl 1347.35184
- [2] V.N. Vragov, *K Teorii Kraevykh Zadach dlya Uravneniy Smeshannogo Tipa v Prostranstve*, Differentsial. Uravn., **13**:6 (1977), 1098–1105. Zbl 0395.35067

- [3] V.N. Vragov, *O Postanovke i Razreshimosti Kraevykh Zadach dlya Uravneniy SmeshannoSostavnogo Tipa*, In: Matematicheskiy Analiz i Smezhnye Voprosy Matematiki, Novosibirsk: Nauka, 1978, 5–13.
- [4] I.E. Egorov, V.E. Fedorov, *Neklassicheskie Uravneniya Matematicheskoy Fiziki Vysokogo Poryadka*, Novosibirsk: Vychisl. Tsentr SO RAN, 1995.
- [5] A.I. Kozhanov, N.R. Pinigina, *Boundary Value Problems for some Higher-Order Nonclassical Differential Equations*, Math. Notes, **101**:3 (2017), 467–474. Zbl 1370.35217
- [6] S.S. Sobolev, *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, Translations of Mathematical Monographs, **90**, Providence, RI: American Mathematical Soc., 1991. Zbl 0732.46001
- [7] O.A. Ladyzhenskaia, N.N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, New York–London: Academic Press, 1968. Zbl 0164.13002
- [8] J.L. Lions, *Some Methods of Solving Nonlinear Boundary Value Problems*, Moscow: Mir, 1973.
- [9] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Soc., Providence, Rhode Island, 2003.
- [10] A.G. Sveshnikov, A.I. Bogolyubov, V.V. Kravtsov, *Lektsyi po Matematicheskoy Fizike*, MGU, Moscow: Nauka, 2004.

ALEXANDR IVANOVICH KOZHANOV
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
4, KOPTYUGA AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: kozhanov@math.nsc.ru

BAHYTBEK KOSHANOV
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MATHEMATICAL MODELING,
125, PUSHKIN STR.,
ALMATY, 050010, KAZAKHSTAN
E-mail address: koshanov@list.ru, koshanov@math.kz

JANAT SULTANGAZIEVA
ABAI PEDAGOGICAL UNIVERSITY,
13, DOSTYK AVE.,
ALMATY, 050010, KAZAKHSTAN
E-mail address: zhanat_87@mail.ru