A. A. Mogulskii, E. I. Prokopenko, The rate function and the fundamental function for multidimensional compound renewal process, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1449–1463

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.19.100>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.172.240.79

April 26, 2023, 12:54:36

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1449–1463 (2019)
DOI 10.33048/semi.2019.19.100

УДК 519.21
MSC 60K05, 60F10

ФУНКЦИЯ УКЛОНЕНИЙ И БАЗОВАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ОБОБЩЕННОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А.А. МОГУЛЬСКИЙ, Е.И. ПРОКОПЕНКО

ABSTRACT. We consider two multidimensional compound renewal processes $\mathbf{Z}(t)$ and $\mathbf{Y}(t)$. Assuming that the increments satisfy the Cramer's condition, we define and investigate the rate functions and the fundamental functions for the processes $\mathbf{Z}(t)$ and $\mathbf{Y}(t)$.

Keywords: compound multidimensional renewal process, large deviations, Cramer's condition, deviation (rate) function, fundamental function, Legendre transformation.

1. ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Условимся элементы d -мерного Евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ обозначать полужирными буквами, например, $\mathbf{x} = (x_{(1)}, \dots, x_{(d)})$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Скалярное произведение для элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ будем обозначать

$$\mathbf{x}\mathbf{y} := x_{(1)}y_{(1)} + \dots + x_{(d)}y_{(d)}.$$

Норму в $\mathbb{R}^d$ обозначим $|\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}}$. Случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^d$ тоже будем обозначать полужирными буквами, например, $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_{(1)}, \dots, \zeta_{(d)})$. Через

$$\boldsymbol{\xi} = (\tau, \boldsymbol{\zeta}) = (\tau, \zeta_{(1)}, \dots, \zeta_{(d)})$$

будем обозначать случайный вектор (с.в.) в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$.

Пусть заданы «начальный» случайный вектор $\boldsymbol{\xi}_1 = (\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$ и независимая от него последовательность независимых одинаково распределенных случайных

MOGULSKII, A.A., PROKOPENKO, E.I., THE RATE FUNCTION AND THE FUNDAMENTAL FUNCTION FOR MULTIDIMENSIONAL COMPOUND RENEWAL PROCESS.

© 2019 Могульский А.А., Прокопенко Е.И.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №18-11-00129).

Поступила 4 июня 2019 г., опубликована 17 октября 2019 г.

векторов $\xi = (\tau, \zeta)$, $\xi_2 = (\tau_2, \zeta_2)$, $\xi_3 = (\tau_3, \zeta_3), \dots$, где $\tau_1 \geq 0$, $\tau > 0$, $\zeta_1, \zeta \in \mathbb{R}^d$. Обозначим

$$T_0 = 0, \quad \mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}; \quad T_n := \sum_{j=1}^n \tau_j, \quad \mathbf{Z}_n := \sum_{j=1}^n \zeta_j \quad \text{при } n \geq 1.$$

При $t \geq 0$ определим два функционала

$$\eta(t) := \min\{k \geq 0 : T_k > t\}, \quad \nu(t) := \max\{k \geq 0 : T_k \leq t\},$$

так что при всех $t \geq 0$ выполняется $\eta(t) = \nu(t) + 1$.

Первый обобщенный процесс восстановления (о.п.в.) $\mathbf{Z}(t)$ определяется равенствами

$$\mathbf{Z}(t) := \mathbf{Z}_{\nu(t)} \quad \text{при } t \geq 0, \quad \text{так что} \quad \mathbf{Z}(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau_1 > 0; \\ \zeta_1, & \text{если } \tau_1 = 0. \end{cases}$$

Наряду с первым о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ мы будем изучать также второй о.п.в.

$$\mathbf{Y}(t) := \mathbf{Z}_{\eta(t)} = \mathbf{Z}(t) + \zeta_{\eta(t)} \quad \text{при } t \geq 0, \quad \text{так что} \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{cases} \zeta_1, & \text{если } \tau_1 > 0; \\ \zeta_1 + \zeta_2, & \text{если } \tau_1 = 0. \end{cases}$$

Траектории процессов $\mathbf{Z}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$ непрерывны справа.

Обзор результатов по предельным теоремам для о.п.в. можно найти в [1], [2]. Ниже, при формулировании основных результатов настоящей работы мы упомянем известные нам результаты других авторов, относящиеся к близкой проблематике.

В дальнейшем везде будем предполагать, что выполнено условие Крамера в следующем виде

$$[\mathbf{C}_0] \quad \mathbf{E}e^{v|\zeta|} < \infty \quad \text{при некотором } v > 0.$$

Кроме того, везде в настоящей работе мы ограничимся рассмотрением *только однородного* первого о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ и *только однородного* второго о.п.в. $\mathbf{Y}(t)$, для которых *распределение первого вектора* $\xi_1 = (\tau_1, \zeta_1)$ совпадает с распределением «общего» вектора $\xi = (\tau, \zeta)$:

$$\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi$$

и, в частности, выполняется $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{Y}(0) = \zeta_1$.

Во избежание повторений, условие $[\mathbf{C}_0]$ и соглашение $\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi$ напоминаться не будут.

Положим

$$\psi(\lambda, \mu) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau + \mu\zeta}, \quad A(\lambda, \mu) := \ln \psi(\lambda, \mu), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{1+d};$$

$$\mathcal{A} := \{(\lambda, \mu) : A(\lambda, \mu) < \infty\}, \quad \mathcal{A}^{\leq 0} := \{(\lambda, \mu) : A(\lambda, \mu) \leq 0\}.$$

Обозначим

$$\mathcal{A}_Z^{\leq 0} := \{(\lambda, \mu) : A(\lambda, \mu) \leq 0, \lambda \leq \lambda_+\}, \quad \mathcal{A}_Y^{\leq 0} := \{(\lambda, \mu) : A(\lambda, \mu) \leq 0, \mu \in [\mathcal{M}]\},$$

где

$$\lambda_+ := \sup\{\lambda \geq 0 : \mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty\}, \quad \mathcal{M} := \{\mu \in \mathbb{R}^d : \mathbf{E}e^{\mu\zeta} < \infty\},$$

$[\mathcal{M}]$ —замыкание множества $\mathcal{M}$. Ясно, что если $\lambda_+ > 0$, то в соответствии с условием $[\mathbf{C}_0]$ внутренность $(\mathcal{A})$ множества $\mathcal{A}$ содержит точку $(\lambda, \mu) = (0, \mathbf{0})$ и является областью аналитичности функции $A(\lambda, \mu)$. Определяющую роль в дальнейшем играют следующие три функции аргумента $\mu \in \mathbb{R}^d$:

$$(1.1) \quad A(\mu) := -\sup\{\lambda : (\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leq 0}\},$$

где, по определению, считаем $\sup\{\lambda : \lambda \in \emptyset\} = -\infty$;

$$(1.2) \quad A_Z(\mu) := \max\{A(\mu), -\lambda_+\}, \quad A_Y(\mu) := \begin{cases} A(\mu), & \text{если } \mu \in [\mathcal{M}]; \\ \infty, & \text{если } \mu \notin [\mathcal{M}]. \end{cases}$$

Как установлено в работах [7], [8] (см. также теоремы 1.3, 1.4 ниже), функции $A_Z(\mu)$, $A_Y(\mu)$ определяют (при некоторых дополнительных условиях) логарифмическую асимптотику при $t \rightarrow \infty$ преобразования Лапласа над распределениями $\mathbf{Z}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$, соответственно. Следуя [1], [2], мы назовем функции $A_Z(\mu)$, $A_Y(\mu)$ *базовыми функциями* (б.ф.) для процессов $\mathbf{Z}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$, соответственно (см. также теоремы 1.3, 1.4 ниже).

Для функции $G = G(\mu)$, отображающей $\mathbb{R}^d$ в множество $(-\infty, \infty]$, определим преобразование Лежандра $G^{\leq} = G^{\leq}(\alpha)$, положив (см., например, [10]):

$$G^{\leq}(\alpha) := \sup_{\mu} \{\mu\alpha - G(\mu)\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^d.$$

Будем называть функцию $H = H(\alpha)$, отображающую $\mathbb{R}^d$ в $[0, \infty]$, *компактной*, если для любого $c \geq 0$ множество $\{\alpha : H(\alpha) \leq c\}$ есть компакт в $\mathbb{R}^d$. Легко показать, что любая компактная функция $H(\alpha)$ полунепрерывна снизу.

Обозначим далее для $\alpha \in \mathbb{R}^d$

$$(1.3) \quad D = D(\alpha) := A^{\leq}(\alpha), \quad D_Z = D_Z(\alpha) := A_Z^{\leq}(\alpha), \quad D_Y = D_Y(\alpha) := A_Y^{\leq}(\alpha).$$

Основные свойства функций $A(\mu)$, $A_Z(\mu)$, $A_Y(\mu)$, $D(\mu)$, $D_Z(\mu)$, $D_Y(\mu)$ мы сформулируем в следующем утверждении:

Теорема 1.1. (i) *Функции $A(\mu)$, $A_Z(\mu)$, $A_Y(\mu)$ выпуклы и полунепрерывны снизу.*

(ii) *Функции $D(\alpha)$, $D_Z(\alpha)$, $D_Y(\alpha)$ выпуклы, полунепрерывны снизу и компактны.*

(iii) *Справедливы следующие формулы*

$$(1.4) \quad A(\mu) = D^{\leq}(\mu), \quad A_Z(\mu) = D_Z^{\leq}(\mu), \quad A_Y(\mu) = D_Y^{\leq}(\mu),$$

так что пары $A(\mu), D(\alpha)$; $A_Z(\mu), D_Z(\alpha)$; $A_Y(\mu), D_Y(\alpha)$ являются парами взаимно сопряженных (относительно преобразования Лежандра) функций.

(iv) *Функции A_Z , A совпадают (и, следовательно, $D_Z = D$), тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$(1.5) \quad \lambda_+ \geq D(\mathbf{0}).$$

В частности, если τ и ζ независимы, то условие (1.5) выполнено.

(v) *Функции A_Y , A совпадают (и, следовательно, $D_Y = D$), тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$(1.6) \quad \mathcal{A}^{\leq 0} \subset \{(\lambda, \mu) : \mu \in [\mathcal{M}]\}.$$

В частности, если τ и ζ независимы, то условие (1.6) выполнено.

(vi) *Если $A(\mu) < \infty$, то $A(-A(\mu), \mu) \leq 0$.*

Теорема 1.1 будет доказана в разделе 2.

Нам понадобятся следующие обозначения. Для $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^{d+1}$ обозначим

$$(1.7) \quad D_{\Lambda}(\theta, \alpha) := \inf_{r>0} r\Lambda\left(\frac{\theta}{r}, \frac{\alpha}{r}\right),$$

где

$$\Lambda(\theta, \alpha) := \sup_{\lambda, \mu} \{\lambda\theta + \mu\alpha - A(\lambda, \mu)\}, \quad (\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

— функция уклонений для случайного вектора (τ, ζ) , которая определяется как преобразование Лежандра функции $A(\lambda, \mu)$ (см., например, [3]):

$$\Lambda(\theta, \alpha) = A^{\Sigma^c}(\theta, \alpha).$$

Функция $D_\Lambda(\theta, \alpha)$ впервые была определена и изучена в [5] и называлась «вторая функция уклонений» для случайного вектора (τ, ζ) . Легко убедиться, что эта функция выпукла и линейчата вдоль любого луча, выходящего из начала координат. Однако свойство полунепрерывности снизу для этой функции может отсутствовать.

В следующем утверждении мы приведем дополнительные свойства функций $D(\alpha)$, $D_Z(\alpha)$, $D_Y(\alpha)$:

Теорема 1.2. (i) Для всех $\alpha \in \mathbb{R}^d$ справедливо

$$(1.8) \quad D(\alpha) = \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leq 0}} \{\lambda + \mu\alpha\};$$

$$(1.9) \quad D_Z(\alpha) = \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}_Z^{\leq 0}} \{\lambda + \mu\alpha\}; \quad D_Y(\alpha) = \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}_Y^{\leq 0}} \{\lambda + \mu\alpha\};$$

(ii) Для всех $\alpha \in \mathbb{R}^d$ справедливо

$$(1.10) \quad D_Z(\alpha) = \inf_{\theta \in [0, 1]} \{D(\theta, \alpha) + \lambda_+(1 - \theta)\},$$

$$(1.11) \quad D_Y(\alpha) = \inf_{\beta} \{D(\beta) + V^{\Sigma^c}(\alpha - \beta)\},$$

где

$$D(\theta, \alpha) := \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leq 0}} \{\lambda\theta + \mu\alpha\}, \quad V(\mu) := \begin{cases} 0, & \text{если } \mu \in [\mathcal{M}]; \\ \infty, & \text{если } \mu \notin [\mathcal{M}]. \end{cases}$$

(iii) Для функции $D_\Lambda(\theta, \alpha)$ (см. (1.7)) имеет место равенство

$$(1.12) \quad (D_\Lambda^{\Sigma^c})^{\Sigma^c}(\theta, \alpha) = D(\theta, \alpha),$$

и для всех $\theta > 0, \alpha \in \mathbb{R}^d$ выполнено

$$(1.13) \quad D(\theta, \alpha) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{\alpha' \in (\alpha)_\varepsilon} D_\Lambda(\theta, \alpha').$$

(iv) Если $\lambda_+ < \infty$, то для функции

$$\widehat{D}_Z(\alpha) := \inf_{\theta \in (0, 1)} \{D(\theta, \alpha) + \lambda_+(1 - \theta)\}$$

имеет место равенство

$$(1.14) \quad (\widehat{D}_Z^{\Sigma^c})^{\Sigma^c}(\alpha) = D_Z(\alpha).$$

Теорема 1.2 будет доказана в разделе 2.

Утверждения теоремы 1.2 используются в работах [7], [8], где, в частности, устанавливаются п.б.у. для процессов $\mathbf{Z}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$ (см. теоремы 1.3, 1.4 ниже, в которых цитируются результаты работ [7], [8] для однородных о.п.в.). Без сомнения, результаты теорем 1.1 и 1.2 будут востребованы и при более детальном изучении о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$, например, при доказательстве п.б.у. для конечномерных распределений или для установления «траекторного» п.б.у. для этих процессов.

Для цитирования для однородных о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$ результатов работ [7], [8] нам нужны следующие два определения:

Определение 1.1. Будем говорить, что семейство $\left\{ \frac{\mathbf{X}(t)}{t} \right\}_{t>0}$ случайных векторов в пространстве $\mathbb{R}^d$ удовлетворяет принципу больших уклонений (п.б.у.) с компактной функцией уклонений (к.ф.у.) $G(\boldsymbol{\alpha}) = G_X(\boldsymbol{\alpha}) \geq 0$, если функция $G(\boldsymbol{\alpha})$ компактна и для любого измеримого множества $B \subset \mathbb{R}^d$ справедливы неравенства

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{X}(t)}{t} \in B \right) \leq -G([B]),$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{X}(t)}{t} \in B \right) \geq -G((B)),$$

в которых для $B \subset \mathbb{R}^d$, $B \neq \emptyset$

$$G(B) := \inf_{\boldsymbol{\alpha} \in B} G(\boldsymbol{\alpha}), \quad G(\emptyset) := \infty,$$

и через $[B]$, (B) обозначены замыкание и внутренность множества B , соответственно.

Определение 1.2. Будем говорить, что выпуклая функция $H(\boldsymbol{\mu}) = H_X(\boldsymbol{\mu}) : \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, \infty]$ является базовой функцией для семейства $\{\mathbf{X}(t)\}_{t \geq 0}$ случайных векторов в пространстве $\mathbb{R}^d$, если для любого $\boldsymbol{\mu} \notin \partial \mathcal{M}_X$ выполнено

$$(1.15) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} e^{\boldsymbol{\mu} \mathbf{X}(t)} = H(\boldsymbol{\mu}),$$

где $\partial \mathcal{M}_X$ — граница замыкания $[\mathcal{M}_X]$ выпуклого множества $\mathcal{M}_X := \{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d : H(\boldsymbol{\mu}) < \infty\}$ конечности $H(\boldsymbol{\mu})$.

Следующее утверждение (доказанное в более общем виде в [7]) показывает, что функции D_Z и A_Z являются к.ф.у. и б.ф. для процесса $\mathbf{Z}(t)$, соответственно.

Теорема 1.3 ([7]). Пусть выполнено условие

$$(1.16) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(\tau \geq t) \geq -\lambda_+.$$

Тогда

- (i) семейство $\left\{ \frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \right\}_{t>0}$ удовлетворяет п.б.у. в пространстве $\mathbb{R}^d$ с к.ф.у. $D_Z(\boldsymbol{\alpha})$;
- (ii) функция A_Z является базовой для процесса $\mathbf{Z}(t)$.

Если дополнительно выполнено условие (1.5), то $A_Z = A$, $D_Z = D$, и условие (1.16) в утверждениях (i), (ii) является лишним.

Ранее в одномерном случае $d = 1$ результаты (i), (ii) теоремы 1.3 были получены в [6]. В работе [9], тоже в одномерном случае $d = 1$ результат (i) теоремы 1.3 был получен для о.п.в. $Z(t)$, построенного по случайным векторам $\{(\tau_k, F(\tau_k))\}_{k \geq 1}$, где $F : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — ограниченная, непрерывная неслучайная функция. В [11], тоже в одномерном случае $d = 1$ асимптотика преобразования Лапласа над распределением о.п.в. $Z(t)$ изучалась при условиях: $E\zeta = 0$, $\{(\lambda, \mu) : \lambda < 0\} \subset \mathcal{A}$.

Обозначим

$$V(\mu) := \begin{cases} 0, & \text{если } \mu \in [\mathcal{M}]; \\ \infty, & \text{если } \mu \notin [\mathcal{M}]. \end{cases}$$

Используя неравенство Чебышева, легко показать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\zeta}{t} \in (\alpha)_\varepsilon \right) \leq -V^{\zeta^c}(\alpha),$$

где $(\alpha)_\varepsilon = \{\beta \in \mathbb{R}^d : |\alpha - \beta| < \varepsilon\}$ — ε -окрестность точки α в $\mathbb{R}^d$.

П.б.у. и логарифмическая асимптотика преобразования Лапласа для процесса $Y(t)$ сформулированы в следующем утверждении (доказанном в более общем виде в [8]):

Теорема 1.4 ([8]). Пусть выполнено условие: для некоторого $c_0 > 0$ и любых $\alpha \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$

$$(1.17) \quad \mathbf{P}(\tau \leq c_0) > 0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\tau \geq c_0, \quad \frac{\zeta}{t} \in (\alpha)_\varepsilon \right) \geq -V^{\zeta^c}(\alpha).$$

Тогда

(i) семейство $\left\{ \frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \right\}_{t>0}$ удовлетворяет п.б.у. в пространстве $\mathbb{R}^d$ с к.ф.у.

$D_Y(\alpha)$;

(ii) функция A_Y является базовой для процесса $\mathbf{Y}(t)$.

Если дополнительно выполнено условие (1.6), то $A_Y = A$, $D_Y = D$, и условие (1.17) в утверждениях (i), (ii) является лишним.

Из теорем 1.3, 1.4 легко вывести

Следствие 1.1. (i) Если $A_Z = A$, то семейство однородных о.п.в. $\left\{ \frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \right\}_{t>0}$

удовлетворяет п.б.у. в пространстве $\mathbb{R}^d$ с к.ф.у. $D(\alpha)$.

(ii) Если $A_Y = A$, то семейство однородных о.п.в. $\left\{ \frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \right\}_{t>0}$ удовлетворяет п.б.у. в пространстве $\mathbb{R}^d$ с к.ф.у. $D(\alpha)$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1.1, 1.2

2.1. Свойства преобразования Лежандра. В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства выпуклых полунепрерывных снизу функций $F = F(u)$, отображающих $\mathbb{R}^d$ в $(-\infty, \infty]$, и преобразований Лежандра над ними. Обозначим класс таких функций через $\mathcal{F} = \mathcal{F}_d$. Известны следующие свойства преобразования Лежандра (см., например, [10]):

[L1] Для любой функции $F \in \mathcal{F}$ справедливо $F^{\zeta^c} \in \mathcal{F}$, т.е. выпуклая полунепрерывная снизу функция переводится преобразованием Лежандра в выпуклую полунепрерывную снизу функцию.

[L₂] Для любой функции $F \in \mathcal{F}$ справедливо

$$(F^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}})^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}} = F,$$

т.е. повторное применение преобразование Лежандра переводит выпуклую полунепрерывную снизу функцию в себя.

Для двух функций $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ определим операцию свертки $*$, положив

$$F_1 * F_2(\mathbf{u}) := \inf_{\mathbf{v}} \{F_1(\mathbf{v}) + F_2(\mathbf{u} - \mathbf{v})\}.$$

Нам понадобится следующее свойство преобразования Лежандра.

[L₃] Для любых $G_1, G_2, F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ справедливо

$$(G_1 * G_2)^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}} = G_1^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}} + G_2^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}}, \quad F_1^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}} * F_2^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}} = (F_1 + F_2)^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}}.$$

В частном случае, когда функции $F_1(\mathbf{u}), F_2(\mathbf{u})$, являются логарифмами преобразований Лапласа распределений независимых случайных величин ξ_1, ξ_2 , свойство [L₃] приведено в монографии [4] (с. 21) как очевидное свойство функций уклонений, соответствующих случайным величинам. Доказательство свойства [L₃] можно найти в [10], теорема 16.4 с.165.

Для произвольной выпуклой функции $F = F(\mathbf{u})$, отображающей $\mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, \infty]$, через $cl F = cl F(\mathbf{u})$ обозначим (см. [10] с.52) наибольшую функцию из класса $\mathcal{F}$, минорирующую F . Иначе говоря: (1) функция $cl F$ принадлежит классу $\mathcal{F}$; (2) она во всех точках $\mathbf{u}$ не превышает $F(\mathbf{u})$; (3) для любой функции $G(\mathbf{u}) \in \mathcal{F}$ из неравенства

$$F(\mathbf{u}) \geq G(\mathbf{u}) \quad \text{для всех } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$$

следует неравенство

$$cl F(\mathbf{u}) \geq G(\mathbf{u}) \quad \text{для всех } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d.$$

Следующее свойство хорошо известно (см., например, [10], теорема 12.2 с.104).

[L₄] Для любой выпуклой функции $F = F(\mathbf{u}): \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, \infty]$, справедливо

$$(F^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}})^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}} = cl F.$$

Нам понадобится еще одно свойство

[L₅] Для любой выпуклой функции $F = F(\mathbf{u}): \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, \infty]$, справедливо

$$(2.1) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{\mathbf{v} \in (\mathbf{u})_\varepsilon} F(\mathbf{v}) = (F^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}})^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}}(\mathbf{u}).$$

Поскольку нам не удалось отыскать доказательства этого свойства в литературе, мы приведем

Доказательство свойства [L₅]. Обозначим левую часть тождества (2.1) через $\tilde{F} = \tilde{F}(\mathbf{u})$. В силу свойства [L₄] нам достаточно доказать

$$(2.2) \quad \tilde{F} = cl F.$$

Для этого достаточно установить, что выполнены свойства (i) – (iv), где (i) функция $\tilde{F}$ выпукла; (ii) функция $\tilde{F}$ полунепрерывна снизу; (iii) функция $\tilde{F}$ во всех точках $\mathbf{u}$ не превышает F ; (iv) для любой функции $G(\mathbf{u}) \in \mathcal{F}$ из неравенства

$$(2.3) \quad F(\mathbf{u}) \geq G(\mathbf{u}) \quad \text{для всех } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$$

следует неравенство

$$(2.4) \quad \tilde{F}(\mathbf{u}) \geq G(\mathbf{u}) \quad \text{для всех } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d.$$

Проверим свойства (i) – (iv). Для множества $B \subset \mathbb{R}^d$ обозначим

$$F(B) := \inf_{\mathbf{v} \in B} F(\mathbf{v}),$$

так что

$$\tilde{F}(\mathbf{u}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F((\mathbf{u})_\varepsilon).$$

(i). Докажем выпуклость функции $\tilde{F}(\mathbf{u})$. Для $p \geq 0, q \geq 0, p+q=1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^d, \varepsilon > 0$ из выпуклости $F(\mathbf{u})$ имеем

$$\begin{aligned} p\tilde{F}(\mathbf{u}_1) + q\tilde{F}(\mathbf{u}_2) &\geq pF((\mathbf{u}_1)_\varepsilon) + qF((\mathbf{u}_2)_\varepsilon) \geq \\ &F(p(\mathbf{u}_1)_\varepsilon + q(\mathbf{u}_2)_\varepsilon) \geq F((p\mathbf{u}_1 + q\mathbf{u}_2)_\varepsilon); \end{aligned}$$

в последнем неравенстве мы воспользовались включением

$$p(\mathbf{u}_1)_\varepsilon + q(\mathbf{u}_2)_\varepsilon \subset (p\mathbf{u}_1 + q\mathbf{u}_2)_\varepsilon.$$

Мы получили неравенство

$$p\tilde{F}(\mathbf{u}_1) + q\tilde{F}(\mathbf{u}_2) \geq F((p\mathbf{u}_1 + q\mathbf{u}_2)_\varepsilon).$$

Устремляя в правой части последнего неравенства $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем требуемое

$$p\tilde{F}(\mathbf{u}_1) + q\tilde{F}(\mathbf{u}_2) \geq \tilde{F}(p\mathbf{u}_1 + q\mathbf{u}_2).$$

Свойство (i) установлено.

(ii). Докажем полунепрерывность $\tilde{F}$. Фиксируем $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$. Для произвольных $\delta > 0$ и $N < \infty$ найдется $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta, N) > 0$ такое, что

$$F((\mathbf{u})_{2\varepsilon_0}) \geq \min\{\tilde{F}(\mathbf{u}) - \delta, N\}.$$

Пусть $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда найдется $n_0 < \infty$ такое, что при всех $n \geq n_0$

$$(\mathbf{u}_n)_{\varepsilon_0} \subset (\mathbf{u})_{2\varepsilon_0}.$$

Тогда для $n \geq n_0$ справедливо

$$\tilde{F}(\mathbf{u}_n) \geq F((\mathbf{u}_n)_{\varepsilon_0}) \geq F((\mathbf{u})_{2\varepsilon_0}) \geq \min\{\tilde{F}(\mathbf{u}) - \delta, N\},$$

откуда вытекает неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}(\mathbf{u}_n) \geq \min\{\tilde{F}(\mathbf{u}) - \delta, N\}.$$

Поскольку левая часть последнего неравенства не зависит от $\delta > 0$ и $N < \infty$, то, устремляя $\delta \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$, получаем требуемое

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}(\mathbf{u}_n) \geq \tilde{F}(\mathbf{u}).$$

Свойство (ii) доказано.

(iii). Поскольку $F(\mathbf{u}) \geq F((\mathbf{u})_\varepsilon)$, то очевидно, что $F(\mathbf{u}) \geq \tilde{F}(\mathbf{u})$ для всех $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$. Свойство (iii) установлено.

(iv). Докажем теперь импликацию (2.3) $\implies$ (2.4). Из (2.3) следует, что для любых $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \varepsilon > 0$

$$F((\mathbf{u})_\varepsilon) \geq G((\mathbf{u})_\varepsilon).$$

Поэтому для любого $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$

$$\tilde{F}(\mathbf{u}) \geq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} G((\mathbf{u})_\varepsilon) = G(\mathbf{u}),$$

где последнее равенство есть следствие полунепрерывности снизу функции G . Импликация (2.3) $\implies$ (2.4) установлена, свойство (iv) доказано. Таким образом, равенство (2.2) доказано, а с ним, и свойство $[L_5]$. $\square$

2.2. Доказательство теоремы 1.1. (i), (vi). Функция $A(\lambda, \mu)$ при любом фиксированном $\mu \in \mathbb{R}^d$ неограниченно возрастает с ростом λ . Поэтому, учитывая определение (1.1), получаем свойство:

$$(2.5) \quad A(\mu) > -\infty \quad \text{для любого } \mu \in \mathbb{R}^d.$$

Пусть, далее, $A(\mu) < \infty$, и последовательность λ_n такова, что

$$A(\lambda_n, \mu) \leq 0 \quad \text{при всех } n \geq 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = -A(\mu).$$

Тогда, в силу полунепрерывности снизу функции $A(\lambda, \mu)$, получаем

$$A(-A(\mu), \mu) \leq 0.$$

Другими словами, мы установили свойство:

$$(2.6) \quad \text{из } A(\mu) < \infty \quad \text{следует } A(-A(\mu), \mu) \leq 0.$$

Утверждение (vi) теоремы 1.1 установлено.

Убедимся теперь, что функция $A(\mu)$ выпукла: для любых $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $p, q \geq 0$, $p + q = 1$ выполняется

$$(2.7) \quad A(p\mu_1 + q\mu_2) \leq pA(\mu_1) + qA(\mu_2).$$

Если $A(\mu_1) = \infty$, или $A(\mu_2) = \infty$, то неравенство (2.7) выполнено. Если $A(\mu_1) < \infty$ и $A(\mu_2) < \infty$, то в силу (2.6) имеем

$$A(-A(\mu_1), \mu_1) \leq 0, \quad A(-A(\mu_2), \mu_2) \leq 0.$$

Поэтому, в силу выпуклости функции $A(\lambda, \mu)$ справедливо

$$A(-pA(\mu_1) - qA(\mu_2), p\mu_1 + q\mu_2) \leq pA(-A(\mu_1), \mu_1) + qA(-A(\mu_2), \mu_2) \leq 0,$$

т.е.

$$A(-pA(\mu_1) - qA(\mu_2), p\mu_1 + q\mu_2) \leq 0.$$

Из последнего следует $-A(p\mu_1 + q\mu_2) \geq -pA(\mu_1) - qA(\mu_2)$, т.е. (2.7). Выпуклость функции $A(\mu)$ установлена.

Убедимся теперь, что функция $A(\mu)$ полунерывна снизу: для любой последовательности μ_n , сходящейся к μ при $n \rightarrow \infty$

$$(2.8) \quad A_- := \liminf_{n \rightarrow \infty} A(\mu_n) \geq A(\mu).$$

Рассмотрим три случая:

- (1) Пусть $A_- = \infty$, и тогда неравенство (2.8) имеет место.
- (2) Пусть $|A_-| < \infty$, и тогда, не ограничивая общности, можно считать, что

$$A_- = \lim_{n \rightarrow \infty} A(\mu_n), \quad \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$$

(если это не так, то последовательность μ_n можно заменить подходящей подпоследовательностью). Из свойства (2.6) и полунепрерывности снизу функции $A(\lambda, \mu)$ вытекает, что

$$0 \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} A(-A(\mu_n), \mu_n) \geq A(-A_-, \mu).$$

Из последнего следует $-A(\mu) \geq -A_-$, т.е. (2.8).

(3) В случае $A_- = -\infty$ можно считать, не ограничивая общности, что

$$-\infty = A_- = \lim_{n \rightarrow \infty} A(\mu_n), \quad \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n.$$

Для произвольного $N < \infty$ найдется $n_N < \infty$ такое, что при всех $n \geq n_N$ выполняется $-A(\mu_n) \geq N$. Поскольку при любом фиксированном μ функция $A(\lambda, \mu)$ не убывает по аргументу λ , имеем в силу свойства (2.6)

$$0 \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} A(-A(\mu_n), \mu_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} A(N, \mu_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} A(N, \mu_n) \geq A(N, \mu).$$

Таким образом, для произвольного $N < \infty$ выполнено $A(N, \mu) \leq 0$ и следовательно, $-A(\mu) \geq N$. Последнее означает, что $A(\mu) = -\infty$, что невозможно в силу свойства (2.5), поэтому случай $A_- = -\infty$ невозможен.

Выпуклость и полунепрерывность снизу функции $A(\mu)$ доказаны.

Выпуклость и полунепрерывность снизу функций $A_Z(\mu)$, $A_Y(\mu)$ следуют непосредственно из определений этих функций (1.2) и уже установленных этих свойств для $A(\mu)$. Утверждения (i), (vi) теоремы 1.1 доказаны.

(ii). Выпуклость и полунепрерывность функций $D(\alpha)$, $D_Z(\alpha)$, $D_Y(\alpha)$ являются следствиями свойства $[L_1]$ и определения (1.3).

Докажем компактность функции $D(\alpha)$. Из определения (1.1) и условия $[C_0]$ следует, что функция $A(\mu)$ конечна и непрерывна в некоторой окрестности точки $\mu = 0$. Поэтому найдутся $\delta > 0$ и $C < \infty$ такие, что для любого вектора $\mu \in [(0)_\delta]$ выполняется $A(\mu) \leq C$. Следовательно, отправляясь от определения (1.3), имеем для любого $\alpha \in \mathbb{R}^d$ неравенство

$$D(\alpha) \geq \delta \frac{\alpha}{|\alpha|} \alpha - A\left(\delta \frac{\alpha}{|\alpha|}\right) \geq \delta |\alpha| - C,$$

доказывающее компактность полунепрерывной снизу функции $D(\alpha)$.

Поскольку из определений (1.2) вытекает, что функции $A(\mu)$, $A_Z(\mu)$, $A_Y(\mu)$ совпадают в некоторой окрестности точки $\mu = 0$, то компактность функций $D_Z(\alpha)$, $D_Y(\alpha)$ устанавливается аналогичным образом. Утверждение (ii) доказано.

(iii). Формулы (1.4) вытекают из утверждения (i) и свойства $[L_2]$. Утверждение (iii) теоремы 1.1 доказано.

(iv). В силу определения (1.2) равенство $A_Z = A$ эквивалентно соотношению

$$-\lambda_+ \leq \inf_{\mu} A(\mu).$$

Поскольку из (1.3) следует $\inf_{\mu} A(\mu) = D(0)$, то равенство $A_Z = A$ эквивалентно неравенству $\lambda_+ \geq D(0)$.

(v). В силу определения (1.2) равенство $A_Y = A$ эквивалентно соотношению (2.9)

$$\text{для всех } \mu \notin [\mathcal{M}] \text{ справедливо } A(\mu) = \infty.$$

Но из определения (1.1) следует, что если $A(\mu) = \infty$, то для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется $A(\lambda, \mu) > 0$. Таким образом, (2.9) эквивалентно

$$\text{для всех } \lambda \in \mathbb{R}, \mu \notin [\mathcal{M}] \text{ точка } (\lambda, \mu) \text{ лежит вне } \mathcal{A}^{\leq 0}.$$

Утверждения (iv), (v) теоремы 1.1 и сама теорема 1.1 доказаны. $\square$

2.3. Доказательство теоремы 1.2. (i). Равенство (1.8) следует из определений функций $D(\alpha)$, $A(\mu)$ и цепочки равенств

$$D(\alpha) = \sup_{\mu} \{\mu\alpha - A(\mu)\} = \sup_{\mu} \left\{ \mu\alpha + \sup_{\lambda: A(\lambda, \mu) \leq 0} \{\lambda\} \right\} = \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leq 0}} \{\lambda + \mu\alpha\}.$$

Аналогично устанавливаются оба равенства в (1.9). Пункт (i) доказан.

(ii). Обозначим $\widehat{D}(\alpha)$ правую часть равенства (1.10):

$$(2.10) \quad \widehat{D}(\alpha) := \inf_{\theta \in [0, 1]} \{D(\theta, \alpha) + \lambda_+(1 - \theta)\}.$$

Для установления (2.10) нам достаточно доказать тождество

$$(2.11) \quad \widehat{D}(\alpha) = A_Z^{\leq 0}(\alpha).$$

Рассмотрим функцию

$$X(\lambda, \mu) := \begin{cases} 0, & \text{если } (\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leq 0}; \\ \infty, & \text{если } (\lambda, \mu) \notin \mathcal{A}^{\leq 0}. \end{cases}$$

Поскольку множество $\mathcal{A}^{\leq 0}$ выпукло и замкнуто, то функция X выпукла и полунепрерывна снизу, т.е. принадлежит классу $\mathcal{F}$. Очевидно, что

$$(2.12) \quad D(\theta, \alpha) = \sup_{(\lambda, \mu)} \{\lambda\theta + \mu\alpha - X(\lambda, \mu)\} = X^{\leq 0}(\theta, \alpha).$$

Определим далее функцию

$$V = V(\lambda, \mu) := \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda \leq \lambda_+; \\ \infty, & \text{если } \lambda > \lambda_+. \end{cases}$$

Легко заметить, что функция $V(\lambda, \mu)$ также выпукла и полунепрерывна снизу, а ее преобразование Лежандра имеет вид

$$V^{\leq 0}(\theta, \alpha) := \sup_{\lambda, \mu} \{\lambda\theta + \mu\alpha - V(\lambda, \mu)\} = \begin{cases} \infty, & \text{если } \alpha \neq \mathbf{0} \text{ или } \theta < 0; \\ \lambda_+\theta, & \text{если } \alpha = \mathbf{0} \text{ и } \theta \geq 0. \end{cases}$$

Определим далее функцию

$$\widehat{D}(\theta, \alpha) := \inf_{0 \leq u \leq \theta} \{D(u, \alpha) + \lambda_+(\theta - u)\},$$

и заметим (см. определение (2.10) функции $\widehat{D}(\alpha)$), что

$$(2.13) \quad \widehat{D}(\alpha) = \widehat{D}(1, \alpha).$$

С другой стороны, учитывая вид функции $V^{\leq 0}(\theta, \alpha)$, получаем равенства

$$\begin{aligned} \widehat{D}(\theta, \alpha) &= \inf_{0 \leq u \leq \theta} \{D(u, \alpha) + V^{\leq 0}(\theta - u, \mathbf{0})\} \\ &= \inf_{0 \leq u < \infty, \beta \in \mathbb{R}^d} \{D(u, \beta) + V^{\leq 0}(\theta - u, \alpha - \beta)\}. \end{aligned}$$

Учитывая тот факт, что $D(\theta, \alpha) = \infty$ для $\theta < 0$ получаем

$$(2.14) \quad \widehat{D}(\theta, \alpha) = \inf_{\theta, \beta} \{D(u, \beta) + V^{\leq 0}(\theta - u, \alpha - \beta)\} = D * V^{\leq 0}(\theta, \alpha).$$

Положим

$$\widehat{X}(\lambda, \mu) := X(\lambda, \mu) + V(\lambda, \mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } (\lambda, \mu) \in \mathcal{A}_Z^{\leq 0}; \\ \infty, & \text{если } (\lambda, \mu) \notin \mathcal{A}_Z^{\leq 0}. \end{cases}$$

Тогда, используя (2.12), (2.14) и свойство $[\mathbf{L}_3]$, получаем

$$\widehat{D}(\theta, \alpha) = X^{\mathfrak{L}^e} * V^{\mathfrak{L}^e}(\theta, \alpha) =$$

$$(2.15) \quad (X + V)^{\mathfrak{L}^e}(\theta, \alpha) = \widehat{X}^{\mathfrak{L}^e}(\theta, \alpha) = \sup_{(\lambda, \mu)} \left\{ \lambda\theta + \mu\alpha - \widehat{X}(\lambda, \mu) \right\}.$$

Убедимся, далее, что справедливо тождество

$$(2.16) \quad A_Z(\mu) = - \sup_{\lambda} \left\{ \lambda - \widehat{X}(\lambda, \mu) \right\}.$$

Действительно

$$\begin{aligned} A_Z(\mu) &= \max \{ -\lambda_+, A(\mu) \} = \max \{ -\lambda_+, - \sup \{ \lambda : (\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leq 0} \} \} \\ &= - \min \{ \lambda_+, \sup \{ \lambda : (\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leq 0} \} \} = - \sup \{ \lambda : (\lambda, \mu) \in \mathcal{A}_Z^{\leq 0} \} \\ &= - \sup_{\lambda} \left\{ \lambda - \widehat{X}(\lambda, \mu) \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая (2.13), (2.15), (2.16), находим

$$\begin{aligned} \widehat{D}(\alpha) &= \widehat{D}(1, \alpha) = \sup_{(\lambda, \mu)} \left\{ \lambda + \mu\alpha - \widehat{X}(\lambda, \mu) \right\} \\ &= \sup_{\mu} \left\{ \mu\alpha + \sup_{\lambda} \left\{ \lambda - \widehat{X}(\lambda, \mu) \right\} \right\} = \sup_{\mu} \{ \mu\alpha - A_Z(\mu) \}. \end{aligned}$$

Тем самым мы доказали равенство (2.11), а вместе с ним и равенство (1.10).

Докажем теперь (1.11). Для этого обозначим правую часть (1.11) через $G_Y(\alpha)$ и используя операцию $*$, получим:

$$G_Y(\alpha) := \inf_{\beta} \{ D(\beta) + V^{\mathfrak{L}^e}(\alpha - \beta) \} = D * V^{\mathfrak{L}^e}(\alpha).$$

Тогда из свойства $[\mathbf{L}_3]$ имеем

$$G_Y^{\mathfrak{L}^e}(\mu) = (D * V^{\mathfrak{L}^e})^{\mathfrak{L}^e}(\mu) = D^{\mathfrak{L}^e}(\mu) + V(\mu) = A(\mu) + V(\mu) = A_Y(\mu).$$

Следовательно,

$$(G_Y^{\mathfrak{L}^e})^{\mathfrak{L}^e}(\alpha) = A_Y^{\mathfrak{L}^e}(\alpha) = D_Y(\alpha).$$

Поскольку $G_Y \in \mathcal{F}$, то в силу свойства $[\mathbf{L}_2]$ левая часть последнего равенства совпадает с $G_Y(\alpha)$. Равенство (1.11) установлено. Пункт (ii) доказан.

(iii). Для доказательства (1.12) докажем прежде тождество

$$(2.17) \quad D_{\Lambda}^{\mathfrak{L}^e}(\lambda, \mu) = D^{\mathfrak{L}^e}(\lambda, \mu),$$

где, напомним,

$$D^{\mathfrak{L}^e}(\lambda, \mu) := \sup_{(\theta, \alpha)} \{ \lambda\theta + \mu\alpha - D(\theta, \alpha) \}$$

— преобразование Лежандра выпуклой функции $D(\theta, \alpha)$, которая определена в пункте (ii) теоремы 1.2. Имеем

$$\begin{aligned} D_{\Lambda}^{\mathfrak{L}^c}(\lambda, \mu) &= \sup_{(\theta, \alpha)} \left\{ \lambda\theta + \mu\alpha - \inf_{r>0} r\Lambda\left(\frac{\theta}{r}, \frac{\alpha}{r}\right) \right\} = \sup_{(\theta, \alpha)} \sup_{r>0} \left\{ \lambda\theta + \mu\alpha - r\Lambda\left(\frac{\theta}{r}, \frac{\alpha}{r}\right) \right\} \\ &= \sup_{r>0} \left\{ r \sup_{(\theta, \alpha)} \left\{ \lambda\frac{\theta}{r} + \mu\frac{\alpha}{r} - \Lambda\left(\frac{\theta}{r}, \frac{\alpha}{r}\right) \right\} \right\} = \sup_{r>0} rA(\lambda, \mu) \\ &= X(\lambda, \mu) := \begin{cases} 0, & \text{если } (\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leq 0}; \\ \infty, & \text{если } (\lambda, \mu) \notin \mathcal{A}^{\leq 0}. \end{cases} \end{aligned}$$

Очевидно, что (см. определение $D(\theta, \alpha)$ в пункте (ii) теоремы 1.2)

$$D(\theta, \alpha) = \sup_{(\lambda, \mu)} \{ \lambda\theta + \mu\alpha - X(\lambda, \mu) \}, \quad X(\lambda, \mu) = D^{\mathfrak{L}^c}(\lambda, \mu),$$

поэтому тождество (2.17) доказано. Применяя к левой и правой частям (2.17) преобразование Лежандра, получаем в силу свойства $[\mathbf{L}_2]$ формулу (1.12).

Докажем теперь формулу (1.13). Обозначим правую часть (1.13) через $\widehat{D}_{\Lambda}(\theta, \alpha)$:

$$\widehat{D}_{\Lambda}(\theta, \alpha) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon}} D_{\Lambda}(\theta, \alpha').$$

Поскольку

$$\inf_{\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon}} D_{\Lambda}(\theta, \alpha') \geq \inf_{(\theta', \alpha') \in ((\theta, \alpha))_{\varepsilon}} D_{\Lambda}(\theta', \alpha'),$$

то в силу свойства $[\mathbf{L}_5]$ имеем:

$$\widehat{D}_{\Lambda}(\theta, \alpha) \geq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{(\theta', \alpha') \in ((\theta, \alpha))_{\varepsilon}} D_{\Lambda}(\theta', \alpha') = (D_{\Lambda}^{\mathfrak{L}^c})^{\mathfrak{L}^c}(\theta, \alpha).$$

Используя далее равенство (1.12), получаем

$$(2.18) \quad \widehat{D}_{\Lambda}(\theta, \alpha) \geq D(\theta, \alpha).$$

Далее, из определения функции $D_{\Lambda}(\theta, \alpha)$ для всех $\theta', \theta > 0$ имеем

$$D_{\Lambda}(\theta', \alpha') = \frac{\theta}{\theta'} D_{\Lambda}\left(\theta, \alpha' \frac{\theta}{\theta'}\right),$$

следовательно, в силу (1.12) и $[\mathbf{L}_5]$

$$\begin{aligned} (2.19) \quad D(\theta, \alpha) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{(\theta', \alpha') \in ((\theta, \alpha))_{\varepsilon}} D_{\Lambda}(\theta', \alpha') = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{(\theta', \alpha') \in ((\theta, \alpha))_{\varepsilon}} \frac{\theta}{\theta'} D_{\Lambda}\left(\theta, \alpha' \frac{\theta}{\theta'}\right) \\ &\geq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{(\theta', \alpha') \in ((\theta, \alpha))_{\varepsilon}} (1 - \varepsilon) D_{\Lambda}\left(\theta, \alpha' \frac{\theta}{\theta'}\right) = \lim_{\delta \downarrow 0} \inf_{\alpha' \in (\alpha)_{\delta}} D_{\Lambda}(\theta, \alpha') \\ &= \widehat{D}_{\Lambda}(\theta, \alpha). \end{aligned}$$

Из (2.18), (2.19) вытекает равенство (1.13). Пункт (iii) доказан.

(iv). Для любого $c > 0$ имеем

$$cD(\theta, \alpha) = D(c\theta, c\alpha), \quad cD^{\mathfrak{L}^c}(\lambda, \mu) = cX(\lambda, \mu) = X(\lambda, \mu) = D^{\mathfrak{L}^c}(\lambda, \mu).$$

Поэтому для $\theta \in (0, 1]$ справедливо

$$D(\theta, \alpha) = \theta D(1, \frac{\alpha}{\theta}).$$

Докажем сначала, что для любого μ

$$(2.20) \quad \widehat{D}_Z^{\mathfrak{S}\epsilon}(\mu) = A_Z(\mu).$$

При $\lambda_+ < \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \widehat{D}_Z^{\mathfrak{S}\epsilon}(\mu) &= \sup_{\alpha} \left\{ \mu\alpha - \widehat{D}_Z(\alpha) \right\} = \sup_{\alpha} \left\{ \mu\alpha - \inf_{\theta \in (0,1)} \left\{ \theta D\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) + \lambda_+(1-\theta) \right\} \right\} \\ &= \sup_{\alpha} \sup_{\theta \in (0,1)} \left\{ \mu\alpha - \theta D\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) - \lambda_+(1-\theta) \right\} \\ &= \sup_{\theta \in (0,1)} \left\{ \theta \sup_{\alpha} \left\{ \mu \frac{\alpha}{\theta} - D\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) \right\} - \lambda_+(1-\theta) \right\} \\ &= \sup_{\theta \in (0,1)} \{ \theta A(\mu) - \lambda_+(1-\theta) \} = A_Z(\mu). \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы использовали определение функции $A_Z(\mu)$ (см. (1.2)). Формула (2.20) установлена. Применяя к левой и правой частям (2.20) преобразование Лежандра, получаем формулу (1.14). Теорема 1.2 доказана. $\square$

REFERENCES

- [1] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition. I*, Siberian Mathematical Journal, **59**:3 (2018), 491–513. MR3879625
- [2] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition. II*, Siberian Mathematical Journal, **59**:4 (2018), 731–750. MR3879647
- [3] A.A. Borovkov, *Probability Theory*, London: Springer-Verlag, 2013. MR3086572
- [4] A.A. Borovkov, *Asymptotic analysis of random walks. Rapidly decreasing distributions of increments*, Moscow: Fizmatlit, 2013. Zbl 1351.60003
- [5] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *The second rate function and the asymptotic problems of renewal and hitting the boundary for multidimensional random walks*, Sib. Math. J., **37**:4 (1996), 647–682. MR1643358
- [6] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Properties of the deviation rate function and the asymptotics for the Laplace transform of the distribution of a compound renewal process*, Teor. Veroyatnost. i Primenen., **64**:4 (2019), 625–641.
- [7] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Large deviation principle for multidimensional first compound renewal processes in the phase space*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 1464–1492.
- [8] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Large deviation principle for multidimensional second compound renewal processes in the phase space*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 1478–1492.
- [9] R. Lefevre, M. Mariani, L. Zambotti, *Large deviations for renewal processes*, Stochastic Processes and their Applications, **121**:10 (2011), 2243–2271. MR2822776
- [10] Rockafellar R.T., *Convex Analysis*, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1970. MR0274683
- [11] B. Tsirelson, *From uniform renewal theorem to uniform large and moderate deviations for renewal-reward processes*, Electron. Commun. Probab. **18**:52 (2013), 1–13. MR3078015

ANATOLII ALFREDOVICH MOGULSKII
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 4, PR. KOPTYUGA AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 1, PIROGOVA STR.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: mogul@math.nsc.ru

EVGENII IGOREVICH PROKOPENKO
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
1, PIROGOVA STR.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
4, KOPTYUGA AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: evgenii.prokopenko@gmail.com