A. A. Mogulskii, E. I. Prokopenko, Large deviation principle for multidimensional first compound renewal processes in the phase space, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1464–1477

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.101>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:
IP: 54.84.234.179
April 26, 2023, 16:50:59

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1464–1477 (2019)

УДК 519.21

DOI 10.33048/semi.2019.16.101

MSC 60K05, 60F10

ПРИНЦИП БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ПЕРВОГО ОБОВЩЕННОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А.А. МОГУЛЬСКИЙ, Е.И. ПРОКОПЕНКО

ABSTRACT. We obtain the large deviation principles for multidimensional first compound renewal processes $\mathbf{Z}(t)$ in the phase space $\mathbb{R}^d$, for this we find and investigate the rate function $D_Z(\boldsymbol{\alpha})$. Also we find asymptotics for the Laplace transform of this process when the time goes to infinity, for this we find and investigate the so-called fundamental function $A_Z(\boldsymbol{\mu})$.

Keywords: compound multidimensional renewal process, large deviations, renewal measure, Cramer's condition, deviation (rate) function, second deviation (rate) function, fundamental function.

1. ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Условимся элементы d -мерного Евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ обозначать полужирными буквами, например, $\mathbf{x} = (x_{(1)}, \dots, x_{(d)})$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Скалярное произведение для элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ будем обозначать

$$\mathbf{x}\mathbf{y} := x_{(1)}y_{(1)} + \dots + x_{(d)}y_{(d)}.$$

Норму в $\mathbb{R}^d$ обозначим $|\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}}$. Случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^d$ тоже будем обозначать полужирными буквами, например, $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_{(1)}, \dots, \zeta_{(d)})$. Через

$$(\tau, \boldsymbol{\zeta}) = (\tau, \zeta_{(1)}, \dots, \zeta_{(d)})$$

будем обозначать случайный вектор в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$.

MOGULSKIY, A.A., PROKOPENKO, E.I., LARGE DEVIATION PRINCIPLE FOR MULTIDIMENSIONAL FIRST COMPOUND RENEWAL PROCESSES IN THE PHASE SPACE.

© 2019 Могульский А.А., Прокопенко Е.И..

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №18-11-00129).

Поступила 4 июня 2019 г., опубликована 17 октября 2019 г.

Пусть заданы «начальный» случайный вектор $\xi_1 = (\tau_1, \zeta_1)$ и независимая от него последовательность независимых одинаково распределенных случайных невырожденных векторов $\xi = (\tau, \zeta)$, $\xi_2 = (\tau_2, \zeta_2)$, $\xi_3 = (\tau_3, \zeta_3)$, ..., где $\tau_1 \geq 0$, $\tau > 0$, $\zeta_1, \zeta \in \mathbb{R}^d$. Обозначим

$$T_0 = 0, \quad \mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}; \quad T_n := \sum_{j=1}^n \tau_j, \quad \mathbf{Z}_n := \sum_{j=1}^n \zeta_j \quad \text{при } n \geq 1.$$

При $t \geq 0$ определим

$$\nu(t) := \max\{k \geq 0 : T_k \leq t\}.$$

Обобщенный процесс восстановления (о.п.в.) $\mathbf{Z}(t)$ определяется равенствами

$$\mathbf{Z}(t) := \mathbf{Z}_{\nu(t)} \quad \text{при } t \geq 0, \quad \text{так что} \quad \mathbf{Z}(0) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{если } \tau_1 > 0; \\ \zeta_1, & \text{если } \tau_1 = 0. \end{cases}$$

Траектории процесса $\mathbf{Z}(t)$ непрерывны справа. О.п.в. $Z(t)$ изучается в работах [1–5] наряду с процессом

$$\mathbf{Y}(t) := \mathbf{Z}_{\nu(t)+1} = \mathbf{Z}(t) + \zeta_{\nu(t)+1},$$

который тоже называется о.п.в. Для того, чтобы отличать процессы $\mathbf{Z}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$ в [3] предложено их называть *первый* и *второй* о.п.в., соответственно. Как можно извлечь из результатов работ [1, 2], даже в одномерной случае теоремы о больших уклонениях для первого и второго о.п.в. могут, вообще говоря, различаться. Настоящая работа посвящена первому о.п.в.; изучению второго о.п.в. мы планируем посвятить другую работу. Обзор результатов для о.п.в. можно найти в [1, 2]. Ниже, при формулировании основных результатов настоящей работы мы упомянем известные нам результаты других авторов, относящиеся к близкой проблематике.

В дальнейшем везде будем предполагать, что выполнено условие Крамера в следующем виде

$$[\mathbf{C}_0] \quad \mathbf{E}e^{v|\zeta_1|} < \infty, \quad \mathbf{E}e^{v|\zeta|} < \infty \quad \text{при некотором } v > 0.$$

Для $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{1+d}$ положим

$$\psi(\lambda, \mu) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau + \mu\zeta}, \quad \psi_1(\lambda, \mu) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1 + \mu\zeta_1},$$

$$A(\lambda, \mu) := \ln \psi(\lambda, \mu), \quad A_1(\lambda, \mu) := \ln \psi_1(\lambda, \mu).$$

Определим множества

$$\mathcal{A} := \{(\lambda, \mu) : A(\lambda, \mu) < \infty\}, \quad \mathcal{A}_1 := \{(\lambda, \mu) : A_1(\lambda, \mu) < \infty\}.$$

Обозначим (следуя [3], обозначения относящиеся к первому о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ мы снабдим нижним индексом Z):

$$\mathcal{A}^{\leq 0} := \{(\lambda, \mu) : A(\lambda, \mu) \leq 0\}, \quad \mathcal{A}_Z^{\leq 0} := \{(\lambda, \mu) : A(\lambda, \mu) \leq 0, \quad \lambda \leq \lambda_+\},$$

где

$$\lambda_+ := \sup\{\lambda \geq 0 : \mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty\}.$$

Ясно, что если $\lambda_+ > 0$, то в соответствии с условием $[\mathbf{C}_0]$ внутренность $(\mathcal{A})$ множества $\mathcal{A}$ содержит точку $(\lambda, \mu) = (0, \mathbf{0})$ и является областью аналитичности функции $A(\lambda, \mu)$. Определяющую роль в дальнейшем играют следующие две функции аргумента $\mu \in \mathbb{R}^d$:

$$(1.1) \quad A(\mu) := -\sup\{\lambda : (\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leq 0}\},$$

где, по определению, считаем $\sup\{\lambda : \lambda \in \emptyset\} = -\infty$;

$$(1.2) \quad A_Z(\mu) := \max\{A(\mu), -\lambda_+\}.$$

Как будет установлено ниже (см. теорему 2), функция $A_Z(\mu)$ будет определять (при некоторых дополнительных условиях) логарифмическую асимптотику при $t \rightarrow \infty$ преобразования Лапласа над распределением $\mathbf{Z}(t)$. Мы, следуя [1], назовем функцию $A_Z(\mu)$ *базовой функцией* для процесса $\mathbf{Z}(t)$.

Для функции $G = G(\mu)$, отображающей $\mathbb{R}^d$ в множество $(-\infty, \infty]$, определим преобразование Лежандра $G^{\Sigma^c} = G^{\Sigma^c}(\alpha)$ (см., например, [13]), положив:

$$G^{\Sigma^c}(\alpha) := \sup_{\mu} \{\mu\alpha - G(\mu)\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^d.$$

Будем называть функцию $H = H(\alpha)$, отображающую $\mathbb{R}^d$ в $[0, \infty]$, *компактной*, если для любого $c \geq 0$ множество $\{\alpha : H(\alpha) \leq c\}$ есть компакт в $\mathbb{R}^d$. Легко показать, что любая компактная функция $H(\alpha)$ полунепрерывна снизу.

Обозначим далее для $\alpha \in \mathbb{R}^d$

$$(1.3) \quad D = D(\alpha) := A^{\Sigma^c}(\alpha), \quad D_Z = D_Z(\alpha) := A_Z^{\Sigma^c}(\alpha).$$

Как будет установлено ниже (см. теорему 1), функция $D_Z(\alpha)$ будет играть роль (при некоторых дополнительных условиях) функции уклонений при $t \rightarrow \infty$ для процесса $\mathbf{Z}(t)$. Свойства функций $A_Z(\mu)$, $D_Z(\alpha)$ изучены в [6]. Приведем некоторые свойства (см. теоремы 1.1, 1.2 из [6]):

Лемма 1.1. (i) *Функции $A(\mu)$, $A_Z(\mu)$ выпуклы и полунепрерывны снизу.*
(ii) *Функции $D(\alpha)$, $D_Z(\alpha)$ выпуклы, полунепрерывны снизу и компактны.*
(iii) *Справедливы следующие формулы*

$$(1.4) \quad A(\mu) = D^{\Sigma^c}(\mu), \quad A_Z(\mu) = D_Z^{\Sigma^c}(\mu),$$

так что пары $A(\mu), D(\alpha)$; $A_Z(\mu), D_Z(\alpha)$ являются парами взаимно сопряженных (относительно преобразования Лежандра) функций.

(iv) *Для всех $\alpha \in \mathbb{R}^d$ справедливо*

$$(1.5) \quad D_Z(\alpha) = \inf_{\theta \in [0,1]} \{D(\theta, \alpha) + \lambda_+(1 - \theta)\}, \quad D(\alpha) = D(1, \alpha),$$

где

$$D(\theta, \alpha) := \sup_{(\lambda, \mu) \in A^{\leq 0}} \{\lambda\theta + \mu\alpha\}.$$

(v) *Функции A_Z , A совпадают (и, следовательно, $D_Z = D$), тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$(1.6) \quad \lambda_+ \geq D(\mathbf{0}).$$

Определение. Будем говорить, что семейство $\left\{\frac{\mathbf{X}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ случайных векторов в пространстве $\mathbb{R}^d$ удовлетворяет принципу больших уклонений (п.б.у.) с компактной функцией уклонений (к.ф.у.) $G(\alpha) \geq 0$, если функция $G(\alpha)$ компактна и для любого измеримого множества $B \subset \mathbb{R}^d$ справедливы неравенства

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{X}(t)}{t} \in B \right) \leq -G([B]),$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{X}(t)}{t} \in B \right) \geq -G((B)),$$

в которых для $B \subset \mathbb{R}^d$, $B \neq \emptyset$

$$G(B) := \inf_{\alpha \in B} G(\alpha), \quad G(\emptyset) := \infty,$$

и через $[B]$, (B) обозначены замыкание и внутренность множества B , соответственно.

Основные результаты настоящей работы представлены теоремами 1, 2 (см. ниже).

Теорема 1. Пусть выполнено условие допустимой неоднородности

$$(1.7) \quad (\mathcal{A}_Z^{\leq 0}) \subset \mathcal{A}_1, \quad \lambda_+^{(\tau_1)} := \sup\{\lambda : \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1} < \infty\} \geq \min\{\lambda_+, D(\mathbf{0})\}.$$

Пусть, кроме того, выполнено дополнительное условие

$$(1.8) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(\tau \geq t) \geq -\lambda_+.$$

Тогда семейство $\left\{\frac{\mathbf{Z}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ удовлетворяет п.б.у. в пространстве $\mathbb{R}^d$ с к.ф.у. $D_Z(\alpha)$. Если дополнительно выполнено условие $\lambda_+ \geq D(\mathbf{0})$, то $D_Z = D$, и условие (1.8) является лишним.

Ранее в одномерном случае $d = 1$ результат теоремы 1 был получен в [7] (для о.п.в. $Z(t)$, построенного по случайным векторам $\{(\tau_k, F(\tau_k))\}_{k \geq 1}$, где $F : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — ограниченная, непрерывная неслучайная функция) и в [8].

Обозначим

$$\mathcal{M}_Z := \{\mu \in \mathbb{R}^d : A_Z(\mu) < \infty\}.$$

множество в пространстве $\mathbb{R}^d$, во всех точках которого конечна функция $A_Z(\mu)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условие допустимой неоднородности (1.7) и дополнительное условие (1.8). Тогда для любого $\mu \notin \partial \mathcal{M}_Z$ имеет место сходимость

$$(1.9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}e^{\mu \mathbf{Z}(t)} = A_Z(\mu).$$

При этом в случае $\lambda_+ \geq D(\mathbf{0})$ правая часть (1.9) равна $A(\mu)$ и условие (1.8) является лишним.

Ранее в одномерном случае $d = 1$ результат теоремы 2 был получен в [9]. В [10], тоже в одномерном случае асимптотика преобразования Лапласа над распределением о.п.в. $Z(t)$ изучалась при условиях: $\mathbf{E}\zeta = 0$, $\{(\lambda, \mu) : \lambda < 0\} \subset \mathcal{A}$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1, 2

2.1. **Доказательство теоремы 1.** Теорема 1 вытекает из лемм 2.1–2.3.

Лемма 2.1. (Локальный п.б.у. для процесса $\mathbf{Z}(t)$) Пусть выполнены условия (1.7) и (1.8) теоремы 1.1. Тогда семейство $\left\{\frac{\mathbf{Z}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ удовлетворяет локальному п.б.у. с к.ф.у. $D_Z(\alpha)$, т.е. для любых $\alpha \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$

$$(2.10) \quad \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\alpha)_\delta\right) \leq -D_Z(\alpha);$$

$$(2.11) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\alpha)_\varepsilon\right) \geq -D_Z(\alpha).$$

Если дополнительно $\lambda_+ \geq D(0)$, то $D_Z = D$, и условие (1.8) является лишним.

Лемма 2.2. (Экспоненциальная плотность для семейства $\left\{\frac{\mathbf{Z}(t)}{t}\right\}_{t>0}$) Семейство $\left\{\frac{\mathbf{Z}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ случайных векторов экспоненциально плотно, т.е.

$$(2.12) \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{|\mathbf{Z}(t)|}{t} \geq K \right) = -\infty.$$

Леммы 2.1, 2.2 будут доказаны в разделах 3, 4, соответственно.

Следующее утверждение хорошо известно (см., например, § 4.1 в [11]).

Лемма 2.3. Пусть семейство $\left\{\frac{\mathbf{X}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ случайных векторов в $\mathbb{R}^d$ является экспоненциально плотным и удовлетворяет локальному п.б.у. с к.ф.у. $G(\alpha)$. Тогда это семейство удовлетворяет п.б.у. с той же функцией уклонений $G(\alpha)$.

2.2. Доказательство теоремы 2. В основе доказательства теоремы 2 лежит лемма 2.4, которая является частным случаем теоремы 4.3.1 в [12].

Лемма 2.4. Пусть семейство $\left\{\frac{\mathbf{X}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ случайных векторов удовлетворяет п.б.у. в пространстве $\mathbb{R}^d$ с к.ф.у. $G(\alpha)$. Пусть для фиксированного $\mu \in \mathbb{R}^d$ выполнено условие

$$(2.13) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}(e^{\mu \mathbf{X}(t)}; \mu \mathbf{X}(t) \geq Mt) = -\infty.$$

Тогда для этого μ имеет место соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} e^{\mu \mathbf{X}(t)} = \sup_{\alpha} \{\mu \alpha - G(\alpha)\}.$$

Следующее утверждение будет доказано в разделе 4.

Лемма 2.5. Пусть выполнено условие допустимой неоднородности (1.7). Тогда для любого $\mu \in (\mathcal{M}_Z)$ выполнено соотношение

$$(2.14) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}(e^{\mu \mathbf{Z}(t)}; \mu \mathbf{Z}(t) \geq Mt) = -\infty.$$

Осуществим теперь

Доказательство теоремы 2. Пусть сначала $\mu \in (\mathcal{M}_Z)$. Тогда в силу теоремы 1 и леммы 2.5 для семейства $\left\{\frac{\mathbf{Z}(t)}{t}\right\}$ выполнены условия леммы 2.4 с к.ф.у. $D_Z(\alpha)$. Поэтому в силу леммы 2.4 имеет место соотношение

$$(2.15) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} e^{\mu \mathbf{Z}(t)} = \sup_{\alpha} \{\mu \alpha - D_Z(\alpha)\}.$$

Привлекая далее второе соотношение в (1.4), получаем, что правая часть (2.15) равна $A_Z(\mu)$. Таким образом, для случая $\mu \in (\mathcal{M}_Z)$ соотношение (1.9) доказано.

Пусть теперь $\mu \notin [\mathcal{M}_Z]$. Тогда $A_Z(\mu) = \infty$, и для доказательства соотношения (1.9) достаточно установить оценку снизу

$$(2.16) \quad L_- := \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} e^{\mu \mathbf{Z}(t)} = \infty.$$

Для любых $\alpha \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} L_- &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} \left(e^{\mu \mathbf{Z}(t)}; \frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\alpha)_\varepsilon \right) \\ &\geq \mu \alpha - |\mu| \varepsilon + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\alpha)_\varepsilon \right). \end{aligned}$$

Применяя далее оценку снизу в локальном п.б.у. для $\frac{\mathbf{Z}(t)}{t}$ (см. лемму 2.1), получаем

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\alpha)_\varepsilon \right) \geq -D_Z(\alpha),$$

поэтому

$$L_- \geq \mu \alpha - D_Z(\alpha) - |\mu| \varepsilon.$$

Из последнего в силу второго соотношения в утверждении (1.4) леммы 1.1 вытекает оценка снизу (2.16):

$$L_- \geq \sup_{\alpha} \{ \mu \alpha - D_Z(\alpha) \} - |\mu| \varepsilon = A_Z(\mu) - |\mu| \varepsilon = \infty.$$

Теорема 2 доказана. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1

3.1. Дополнительные свойства функций $D(\alpha)$, $D_Z(\alpha)$. Функция *уклонений* для случайного вектора (τ, ζ) определяется как преобразование Лежандра $A(\lambda, \mu)$ (см., например, [14]):

$$\Lambda(\theta, \alpha) := \sup_{\lambda, \mu} \{ \lambda \theta + \mu \alpha - A(\lambda, \mu) \}, \quad (\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Из теоремы 1.2 в [6] вытекает

Лемма 3.1. (i) Для всех $\alpha \in \mathbb{R}^d$ справедливо

$$(3.17) \quad D_Z(\alpha) = \sup_{(\lambda, \mu) \in A_Z^{\leq 0}} \{ \lambda + \mu \alpha \}.$$

(ii) Для функции

$$D_\Lambda(\theta, \alpha) := \inf_{r > 0} r \Lambda \left(\frac{\theta}{r}, \frac{\alpha}{r} \right),$$

для всех $\theta > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^d$ имеет место равенство

$$(3.18) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{\alpha' \in (\alpha)_\varepsilon} D_\Lambda(\theta, \alpha') = D(\theta, \alpha),$$

(iii) Если $\lambda_+ < \infty$, то для функции

$$\widehat{D}_Z(\alpha) := \inf_{\theta \in (0,1)} \{ D(\theta, \alpha) + \lambda_+(1 - \theta) \}$$

имеет место равенство

$$(3.19) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{\alpha' \in (\alpha)_\varepsilon} \widehat{D}_Z(\alpha') = D_Z(\alpha).$$

Заметим, что функция $D_\Lambda(\theta, \alpha)$ впервые была определена и изучена в [15]. Пункт (i) леммы 3.1 нам понадобится для доказательства оценки сверху в л.п.б.у., пункты (ii), (iii) — для доказательства оценки снизу.

3.2. **Доказательство леммы 2.1.** (i). Доказательство оценки сверху (2.10).

Имеем

(3.20)

$$\mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\delta, \quad \tau_1 < t \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t), \quad P_n(t) := \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Z}_n}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\delta, \quad T_n \leq t < T_{n+1} \right).$$

Оценим сначала часть суммы в (3.20) по $n > t^2$:

$$\sum_1 := \sum_{n > t^2} P_n(t) \leq \sum_{n > t^2} \mathbf{P}(T_n \leq t) \leq \sum_{n > t^2} \mathbf{P}(T_n - \tau_1 \leq t) =: P_t.$$

В силу экспоненциального неравенства Чебышева при $n \geq t^2 + 1$, $\mathbf{E}\tau \geq \frac{t}{n-1} \geq \frac{1}{t}$ имеем

$$\mathbf{P}(T_n - \tau_1 \leq t) \leq e^{-(n-1)\Lambda_\tau(\frac{1}{t})},$$

где $\Lambda_\tau(u) := \sup_\lambda \{\lambda u - \ln \mathbf{E} e^{\lambda \tau}\}$. Поскольку $\Lambda_\tau(\frac{1}{t}) \geq 1$ при всех достаточно больших t , то

$$(3.21) \quad \sum_1 \leq P_t \leq \frac{1}{1 - e^{-1}} e^{-t^2}.$$

Оценим теперь сумму $\sum_2$ в (3.20) по $1 \leq n \leq t^2$, для чего оценим сверху каждое слагаемое $P_n(t)$. Для произвольного вектора $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in (\mathcal{A}_Z^{\leq 0})$, имеем

$$(3.22) \quad P_n(t) = \mathbf{E} \left(e^{\pm \lambda T_n \pm \boldsymbol{\mu} \mathbf{Z}_n}; \frac{\mathbf{Z}_n}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\delta, \quad T_n \leq t < T_{n+1} \right).$$

На событии

$$\left\{ \frac{\mathbf{Z}_n}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\delta, \quad T_n \leq t < T_{n+1} \right\}$$

имеет место неравенство

$$(3.23) \quad e^{-\lambda T_n - \boldsymbol{\mu} \mathbf{Z}_n} \leq e^{-\lambda t - \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\alpha} t + \sqrt{d} |\boldsymbol{\mu}| \delta t} \max\{1, e^{\lambda \tau_{n+1}}\}.$$

Следовательно, из (3.22), (3.23) получаем

$$(3.24) \quad \begin{aligned} P_n(t) &\leq e^{-\lambda t - \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\alpha} t + \sqrt{d} |\boldsymbol{\mu}| \delta t} \mathbf{E} \max\{1, e^{\lambda \tau_{n+1}}\} e^{\lambda T_n + \boldsymbol{\mu} \mathbf{Z}_n} \\ &\leq e^{-\lambda t - \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\alpha} t + \sqrt{d} |\boldsymbol{\mu}| \delta t} \mathbf{E} \max\{1, e^{\lambda \tau_{n+1}}\} \psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \psi^{n-1}(\lambda, \boldsymbol{\mu}), \end{aligned}$$

причем второй множитель в правой части (3.24) конечен в силу $\lambda < \lambda_+$, третий конечен в силу условия допустимой неоднородности (1.7), а последний не превосходит 1, так как $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_Z^{\leq 0}$. Таким образом, в силу (3.20)–(3.24) имеем для произвольных $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in (\mathcal{A}_Z^{\leq 0})$ неравенство

$$L_+ := \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\delta, \quad \tau_1 < t \right) \leq -(\lambda + \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\alpha}).$$

Поскольку к любой точке $(\lambda_0, \boldsymbol{\mu}_0)$ границы $\partial \mathcal{A}_Z^{\leq 0}$ можно приблизиться точками $(\lambda_n, \boldsymbol{\mu}_n)$ из внутренности $(\mathcal{A}_Z^{\leq 0})$, то последнее неравенство справедливо для всех $(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ из замкнутого выпуклого множества $\mathcal{A}_Z^{\leq 0}$. Следовательно, мы доказали, что

$$L_+ \leq - \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_Z^{\leq 0}} \{\lambda + \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\alpha}\} = -D_Z(\boldsymbol{\alpha}).$$

Последнее равенство выполнено в силу равенства (3.17).

Получили

$$(3.25) \quad L_+ \leq -D_Z(\boldsymbol{\alpha}).$$

Оценим теперь

$$\mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\alpha)_\delta, \quad \tau_1 \geq t \right) = \mathbf{P}(\tau_1 \geq t, \quad \mathbf{0} \in (\alpha)_\delta).$$

Очевидно, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(\tau_1 \geq t, \mathbf{0} \in (\alpha)_\delta) \leq \begin{cases} -\lambda_+^{(\tau_1)}, & \text{если } \alpha = \mathbf{0}; \\ -\infty, & \text{если } \alpha \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Поэтому в силу условия допустимой неоднородности (см. второе соотношение в (1.7)) и равенства $D_Z(0) = \min \{\lambda_+, D(0)\}$, которое следует из первого равенства в (1.5)), имеем

$$(3.26) \quad \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\alpha)_\delta, \quad \tau_1 \geq t \right) \leq -D_Z(\alpha).$$

Из (3.25), (3.26) следует оценка сверху (2.10).

(ii). Доказательство оценки снизу (2.11). Рассмотрим сначала случай $\lambda_+ < D(0)$, и тогда выполнено дополнительное условие (1.8). Для произвольных фиксированных $\theta \in (0, 1)$, $r > 0$, $\varepsilon > 0$ и для достаточно малого $\delta > 0$ при $n := [rt]$ имеем

$$\mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\alpha)_\varepsilon \right) \geq \mathbf{P} \left(\frac{T_n}{n} \in \frac{t}{n}(\theta)_\delta, \quad \frac{\mathbf{Z}_n}{n} \in \frac{t}{n}(\alpha)_\varepsilon \right) \mathbf{P}(\tau_{n+1} \geq t(1 - \theta + 2\delta)).$$

В силу известной оценки снизу (локальный п.б.у. для случайного блуждания) (см., например, теорему 1.2.1 в [11])

$$(3.27) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left(\frac{T_n}{n} \in \frac{t}{n}(\theta)_\delta, \quad \frac{\mathbf{Z}_n}{n} \in \frac{t}{n}(\alpha)_\varepsilon \right) \geq -\Lambda \left(\frac{\theta}{r}, \frac{\alpha}{r} \right),$$

и в силу условия (1.8) имеем

$$(3.28) \quad \begin{aligned} L_-(\alpha, \varepsilon) &:= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\alpha)_\varepsilon \right) \\ &\geq -r\Lambda \left(\frac{\theta}{r}, \frac{\alpha}{r} \right) - \lambda_+(1 - \theta + 2\delta). \end{aligned}$$

Покажем, что правая часть (3.28) может быть заменена на $-D_Z(\alpha)$. Устремляя δ к нулю и максимизируя правую часть (3.28) по $r > 0$, получаем

$$(3.29) \quad L_-(\alpha, \varepsilon) \geq -D_\Lambda(\theta, \alpha) - \lambda_+(1 - \theta).$$

Выберем теперь произвольные $\alpha' \in (\alpha)_\varepsilon$ и $\varepsilon' > 0$ такие, что выполняется $(\alpha')_{\varepsilon'} \subset (\alpha)_\varepsilon$. Применяя (3.29) для α' и ε' , получаем

$$(3.30) \quad L_-(\alpha, \varepsilon) \geq L_-(\alpha', \varepsilon') \geq -D_\Lambda(\theta, \alpha') - \lambda_+(1 - \theta).$$

Максимизируя далее правую часть (3.30) по $\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon'}$, получаем для любого $\varepsilon' \in (0, \varepsilon]$

$$(3.31) \quad L_-(\alpha, \varepsilon) \geq -\inf_{\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon'}} D_\Lambda(\theta, \alpha') - \lambda_+(1 - \theta).$$

Поскольку в силу (3.18) справедливо

$$\lim_{\varepsilon' \downarrow 0} \inf_{\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon'}} D_\Lambda(\theta, \alpha') = D(\theta, \alpha),$$

то из (3.31) получаем

$$(3.32) \quad L_-(\alpha, \varepsilon) \geq -D(\theta, \alpha) - \lambda_+(1 - \theta).$$

Выберем опять произвольные $\alpha' \in (\alpha)_\varepsilon$ и $\varepsilon' > 0$ такие, что выполняется $(\alpha')_{\varepsilon'} \subset (\alpha)_\varepsilon$. Применяя неравенство (3.32) для α' и ε' , получаем

$$(3.33) \quad L_-(\alpha, \varepsilon) \geq L_-(\alpha', \varepsilon') \geq -D(\theta, \alpha') - \lambda_+(1 - \theta).$$

Максимизируя правую часть (3.33) по $\theta \in (0, 1)$, приходим к неравенству

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq - \inf_{\theta \in (0, 1)} \{D(\theta, \alpha) + \lambda_+(1 - \theta)\} =: -\hat{D}_Z(\alpha').$$

Максимизируя правую часть последнего неравенства по $\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon'}$, приходим к неравенству

$$(3.34) \quad L_-(\alpha, \varepsilon) \geq - \inf_{\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon'}} \hat{D}_Z(\alpha').$$

Тогда из (3.19), (3.34) получаем

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq -D_Z(\alpha)$$

—требуемое неравенство (2.11) для рассматриваемого случая $\lambda_+ < D(0)$.

Докажем теперь оценку (2.11) в случае $\lambda_+ \geq D(0)$, и тогда дополнительное условие (1.8) отсутствует.

Рассмотрим для $0 < c < \infty$, $0 < R < \infty$, $q \in (0, 1]$ класс $\mathcal{K}(c, R, q)$ случайных векторов $(\tau, \zeta) \in \mathbb{R}^{d+1}$ таких, что $\mathbf{P}(\tau \geq c, |\zeta| \leq R) \geq q$. Рассмотрим для любого $T > 0$ событие

$$\mathcal{B}_T := \{\eta(T) \leq k(T), |\mathbf{Z}_m| \leq mR, \text{ для всех } m \in \{1, \dots, \eta(T)\}\},$$

где

$$\eta(t) = \nu(t) + 1, \quad k(T) := \left\lceil \frac{T}{c} \right\rceil + 1.$$

Лемма 3.2. Пусть однородное случайное блуждание $(T_k, \mathbf{Z}_k)$, $k = 0, 1, \dots$, порождено последовательностью сумм независимых случайных векторов (τ_i, ζ_i) с общим с (τ, ζ) распределением и пусть $(\tau, \zeta) \in \mathcal{K}(c, R, q)$. Тогда для любого $T > 0$

$$\mathbf{P}(B_T) \geq q^{k(T)}.$$

Доказательство. Рассмотрим события

$$C_k := \{\tau_k \geq c, |\zeta_k| \leq R\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда, легко заметить, что выполнено включение

$$\bigcap_{k=1}^{k(T)} C_k \subseteq B_T.$$

Откуда и вытекает утверждение леммы 3.2. $\square$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству оценки снизу (2.11). Рассмотрим для произвольных фиксированных $r > 0$, $\varepsilon > 0$ и для достаточно малого $\delta > 0$ при $n := [rt]$ событие

$$C_t(\varepsilon, \delta) := \left\{ \frac{T_n}{n} \in \frac{t}{n}(1 - \delta)_\delta, \quad \frac{\mathbf{Z}_n}{n} \in \frac{t}{n}(\alpha)_{\frac{\varepsilon}{2}} \right\}.$$

На этом событии сумма T_n находится левее значения t и расстояние $\mathcal{T} := t - T_n$ лежит в пределах

$$(3.35) \quad \mathcal{T} \in (0, 2t\delta).$$

Рассмотрим «новое» блуждание

$$\{(T'_k, \mathbf{Z}'_k); k \geq 0\}, \quad (T'_k, \mathbf{Z}'_k) := (T_{n+k} - T_n, \mathbf{Z}_{n+k} - \mathbf{Z}_n),$$

которое не зависит от блуждания

$$\{(T_k, \mathbf{Z}_k); 0 \leq k \leq n\}.$$

Для нового блуждания рассмотрим событие

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}} = \{\eta'(\mathcal{T}) \leq k(\mathcal{T}), \quad |\mathbf{Z}'_m| \leq mR, \quad \text{для всех } m \in \{1, \dots, \eta'(\mathcal{T})\}\},$$

связанное с моментом $\eta'(T)$ первого прохождения случайного уровня $\mathcal{T}$. Очевидно, что для некоторых $0 < c < \infty$, $0 < R < \infty$, $q \in (0, 1]$ выполняется $(\tau, \zeta) \in \mathcal{K}(c, R, q)$, поэтому можно воспользоваться леммой 3.2. Заметим прежде, что на событии $C_t(\varepsilon, \delta) \cap \mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ справедливо $\nu(t) = n + \eta'(\mathcal{T}) - 1$, поэтому

$$(3.36) \quad \mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}_n + \mathbf{Z}'_{\eta'(\mathcal{T})-1}.$$

В силу выбора события $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ и в силу (3.35) справедлива оценка

$$|\mathbf{Z}'_{\eta'(\mathcal{T})-1}| \leq \frac{\mathcal{T}R}{c} \leq \frac{2t\delta R}{c},$$

поэтому при $\frac{2\delta R}{c} \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ выполняется включение

$$\left\{ \frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\alpha)_{\varepsilon} \right\} \supset C_t(\varepsilon, \delta) \cap \mathcal{B}_{\mathcal{T}}.$$

Следовательно, используя лемму 3.2, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\alpha)_{\varepsilon} \right) &\geq \mathbf{P}(\mathcal{B}_{\mathcal{T}} \cap C_t(\varepsilon, \delta)) = \int_0^{\infty} \mathbf{P}(\mathcal{B}_{\mathcal{T}} \cap C_t(\varepsilon, \delta), \mathcal{T} \in dT) \\ &= \int_0^{\infty} \mathbf{P}(\mathcal{B}_{\mathcal{T}}) \mathbf{P}(C_t(\varepsilon, \delta), \mathcal{T} \in dT) \\ &\geq \int_0^{\infty} q^{k(T)} \mathbf{P}(C_t(\varepsilon, \delta), \mathcal{T} \in dT) = \mathbf{E} \left(q^{k(\mathcal{T})}; C_t(\varepsilon, \delta) \right); \end{aligned}$$

при этом, на событии $C_t(\varepsilon, \delta)$ справедливо $\mathcal{T} \leq 2t\delta$. Следовательно,

$$\mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\alpha)_{\varepsilon} \right) \geq q^{\frac{2t\delta}{c} + 1} \mathbf{P}(C_t(\varepsilon, \delta)).$$

Используя далее оценку (3.27), получаем

$$\begin{aligned} L_-(\alpha, \varepsilon) &:= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Z}(t)}{t} \in (\alpha)_{\varepsilon} \right) \\ &\geq -r\Lambda \left(\frac{1-\delta}{r}, \frac{\alpha}{r} \right) + \frac{2\delta}{c} \ln q. \end{aligned}$$

Максимизируя правую часть последнего неравенства по $r > 0$, получаем для $\beta := \frac{1}{1-\delta}\alpha$

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq -D_{\Lambda}(1-\delta, \alpha) + \frac{2\delta}{c} \ln q = -(1-\delta)D_{\Lambda}(1, \beta) + \frac{2\delta}{c} \ln q.$$

Выбирая далее $\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon}$ и $\varepsilon' > 0$ такие, что $(\alpha')_{\varepsilon'} \subset (\alpha)_{\varepsilon}$, получаем для $\beta' := \frac{1}{1-\delta}\alpha'$

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq -(1-\delta)D_{\Lambda}(1, \beta') + \frac{2\delta}{c} \ln q.$$

Максимизируя правую часть последнего неравенства по $\alpha' \in (\alpha)_\varepsilon$, получаем

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq -(1 - \delta) \inf_{\alpha' = (1 - \delta)\beta' \in (\alpha)_\varepsilon} D_\Lambda(1, \beta') + \frac{2\delta}{c} \ln q.$$

Поскольку для любого $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ и всех достаточно малых $\delta > 0$ правая часть последнего неравенства не превосходит

$$-(1 - \delta) \inf_{\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon'}} D_\Lambda(1, \alpha') + \frac{2\delta}{c} \ln q,$$

то, переходя к пределу по $\delta \rightarrow 0$, получаем

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq - \inf_{\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon'}} D_\Lambda(1, \alpha').$$

Переходя далее в правой части последнего неравенства к пределу по $\varepsilon' \rightarrow 0$, получаем в силу (3.18)

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq - \lim_{\varepsilon' \downarrow 0} \inf_{\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon'}} D_\Lambda(1, \alpha') = -D(1, \alpha) = -D_Z(\alpha)$$

(мы воспользовались тем, что при $\lambda_+ \geq D(0)$ последнее равенство имеет место — свойство (v) леммы 1.1).

Оценка (2.11) доказана. Лемма 2.1 доказана. $\square$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ 2.2, 2.5

Доказательство леммы 2.2. Для любого $K \in (0, \infty)$ имеем

$$\begin{aligned} \{|Z(t)| \geq Kt\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{T_n \leq t < T_{n+1}, |Z_n| \geq Kt\} \\ &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ T_n \leq t < T_{n+1}, \sum_{k=1}^n \gamma_k \geq Kt \right\}, \end{aligned}$$

где $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин с общим с $\gamma = |\zeta_1| + |\zeta_2|$ распределением. Поэтому для любого $M < \infty$

$$(4.37) \quad \mathbf{P}(|Z(t)| \geq K) \leq P_1(t, M) + P_2(t, M, K),$$

где

$$P_1(t, M) := \sum_{n \geq Mt} \mathbf{P}(T_n - T_1 \leq t), \quad P_2(t, M, K) := Mt \mathbf{P}(\gamma_1 + \dots + \gamma_{[Mt]} \geq Kt).$$

В силу экспоненциального неравенства Чебышева для $(n-1)\mathbf{E}\tau \geq t$ (допускается $\mathbf{E}\tau = +\infty$), имеем

$$\mathbf{P}(T_n - T_1 \leq t) \leq e^{-(n-1)\Lambda\left(\frac{t}{n-1}\right)},$$

где $\Lambda(\theta)$ — функция уклонений для случайной величины τ . Поскольку $\mathbf{P}(\tau > 0) = 1$, то $\Lambda(\theta) \uparrow \infty$ при $\theta \downarrow 0$, и поэтому

$$\sum_{n \geq Mt} \mathbf{P}(T_n - \tau_1 \leq t) \leq \sum_{n \geq Mt} e^{-(n-1)\Lambda\left(\frac{1}{M}\right)} = \frac{e^{-Mt\Lambda\left(\frac{1}{M}\right)}}{1 - e^{-M\Lambda\left(\frac{1}{M}\right)}}.$$

Далее, слагаемые γ_k удовлетворяют моментному условию $[\mathbf{C}_0]$. Поэтому для любого $N < \infty$ найдутся $M_N < \infty$ и $K_N < \infty$ такие, что

$$(4.38) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln P_1(t, M_N) \leq -N, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln P_2(t, M_N, K_N) \leq -N.$$

В свою очередь, из соотношений (4.37), (4.38) вытекает утверждение леммы 2.2. Лемма 2.2 доказана. $\square$

Доказательство леммы 2.5. Пусть $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$. Тогда

$$E_t(\boldsymbol{\mu}, M) := \mathbf{E}(e^{\boldsymbol{\mu} \mathbf{Z}(t)}; \boldsymbol{\mu} \mathbf{Z}(t) \geq Mt) = \mathbf{P}(0 \geq Mt) = 0,$$

и соотношение (2.14) очевидным образом выполняется.

Пусть теперь $\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\mu} \in (\mathcal{M}_Z)$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $(1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu} \in (\mathcal{M}_Z)$, т.е. $A((1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \leq A_Z((1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) < \infty$. Возьмём $\lambda = -A((1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu})$, тогда

$$(4.39) \quad A(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \leq 0.$$

Поэтому для этих фиксированных λ , $\boldsymbol{\mu}$, ε имеем

$$\begin{aligned} E_t(\boldsymbol{\mu}, M) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}(e^{\boldsymbol{\mu} \mathbf{Z}_n}; T_n \leq t < T_{n+1}, \boldsymbol{\mu} \mathbf{Z}_n \geq Mt) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(e^{\pm \lambda T_n + (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu} \mathbf{Z}_n - \varepsilon \boldsymbol{\mu} \mathbf{Z}_n}; T_n \leq t < T_{n+1}, \boldsymbol{\mu} \mathbf{Z}_n \geq Mt) \\ &\leq e^{|\lambda|t - \varepsilon Mt} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(e^{\lambda T_n + (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu} \mathbf{Z}_n}; T_n \leq t < T_{n+1}, \boldsymbol{\mu} \mathbf{Z}_n \geq Mt) \\ &=: e^{|\lambda|t - \varepsilon Mt} \sum_1. \end{aligned}$$

Для того, чтобы оценить сверху сумму $\sum_1$, определим последовательность $\{(\hat{\tau}_k, \hat{\boldsymbol{\zeta}}_k)\}_{k \geq 1}$ независимых случайных векторов, положив для борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^{d+1}$

$$\mathbf{P}((\hat{\tau}_k, \hat{\boldsymbol{\zeta}}_k) \in B) := \frac{1}{\psi_k(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu})} \mathbf{E}(e^{\lambda \tau_k + (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\zeta}_k}; (\tau_k, \boldsymbol{\zeta}_k) \in B),$$

где $\psi_k(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) := \mathbf{E}e^{\lambda \tau_k + (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\zeta}_k}$. По этой последовательности построим суммы $(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{Z}}_n)$. Используя новые обозначения, представим каждое слагаемое суммы $\sum_1$ в виде

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(e^{\lambda T_n + (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu} \mathbf{Z}_n}; T_n \leq t < T_{n+1}, \boldsymbol{\mu} \mathbf{Z}_n \geq Mt) \\ &= \psi_1(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \psi_2^{n-1}(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \mathbf{P}(\hat{T}_n \leq t < \hat{T}_n + \tau_{n+1}, \boldsymbol{\mu} \hat{\mathbf{Z}}_n \geq Mt) \\ &\leq \psi_1(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \psi_2^{n-1}(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \mathbf{P}(\hat{T}_n \leq t). \end{aligned}$$

Поскольку в силу (4.39) имеем $(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_Z^{\leq 0}$, то $\psi_2(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \leq 1$ и в силу условия допустимой неоднородности (1.7) $\psi_1(\lambda, (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\mu}) \leq C$ для некоторого $C < \infty$. Поэтому

$$(4.40) \quad E_t(\boldsymbol{\mu}, M) \leq C e^{|\lambda|t - \varepsilon Mt} \sum_2, \quad \sum_2 := \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(\hat{T}_n \leq t).$$

В силу экспоненциального неравенства Чебышева для $(n - 1)\mathbf{E}\hat{\tau} \geq t$, имеем

$$\mathbf{P}(\hat{T}_n \leq t) \leq \mathbf{P}(\hat{T}_n - \hat{\tau}_1 \leq t) \leq e^{-(n-1)\hat{\Lambda}(\frac{t}{n-1})},$$

где $\hat{\Lambda}(\alpha)$ —функция уклонений для случайной величины $\hat{\tau} := \hat{\tau}_2$. Поскольку $\mathbf{P}(\hat{\tau} > 0) = 1$, то $\hat{\Lambda}(\alpha) \uparrow \infty$ при $\alpha \downarrow 0$, и поэтому при $t \rightarrow \infty$

$$(4.41) \quad \sum_{n \geq t^2} \mathbf{P}(\hat{T}_n - \hat{\tau}_1 \leq t) \leq \sum_{n \geq t^2} e^{-(n-1)\hat{\Lambda}(\frac{t}{n-1})} = o(1).$$

Следовательно, при всех достаточно больших t

$$\sum_2 = \sum_{1 \leq n \leq t^2-1} \mathbf{P}(\hat{T}_n - \hat{\tau}_1 \leq t) + \sum_{n \geq t^2} \mathbf{P}(\hat{T}_n - \hat{\tau}_1 \leq t) \leq t^2 - 1 + o(1) \leq t^2,$$

так что при тех же t в силу (4.40) имеем для любого M и для выбранных ранее фиксированных $\lambda, \mu, \varepsilon$ неравенство

$$E_t(\mu, M) \leq Ce^{|\lambda|t - \varepsilon Mt} t^2.$$

Поскольку из последнего неравенства вытекает соотношение (2.14), то лемма 2.5 доказана. $\square$

REFERENCES

- [1] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition. I*, Siberian Mathematical Journal, **59**:3 (2018), 491–514. MR3879625
- [2] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition. II*, Siberian Mathematical Journal, **59**:4 (2018), 731–750. MR3879647
- [3] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. I*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 475–502. Zbl 1395.60102
- [4] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. II*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 503–527. Zbl 1395.60102 Zbl 1395.60103
- [5] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Integro-local theorems for multidimensional compound renewal processes, when Cramer's condition holds. III*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 528–553. Zbl 1395.60104
- [6] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *The rate function and the fundamental function for multidimensional renewal process*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 1449–1463.
- [7] R. Lefevre, M. Mariani, L. Zambotti, *Large deviations for renewal processes*, Stochastic Processes and their Applications, **121**: 10 (2011), 2243–2271. MR2822776
- [8] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Large deviation principles for the finite-dimensional distributions of compound renewal processes*, Sib. Math. J., **56**:1 (2015), 28–53. MR3407938
- [9] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Properties of the deviation rate function and the asymptotics for the Laplace transform of the distribution of a compound renewal process*, Teor. Veroyatnost. i Primenen., **64**:4 (2019), 625–641.
- [10] B. Tsirelson, *From uniform renewal theorem to uniform large and moderate deviations for renewal-reward processes*, Electron. Commun. Probab. **18**:52 (2013), 1–13. MR3078015
- [11] A.A. Borovkov, *Asymptotic analysis of random walks. Rapidly decreasing distributions of increments*, Moscow: Fizmatlit, 2013. Zbl 1351.60003
- [12] A. Dembo, O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, Berlin: Springer-Verlag, 2010. MR2571413
- [13] Rockafellar R.T., *Convex Analysis*, Princeton: Princeton University Press, 1970. MR0274683
- [14] A.A. Borovkov, *Probability Theory*, London: Springer-Verlag, 2013. MR3086572
- [15] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *The second rate function and the asymptotic problems of renewal and hitting the boundary for multidimensional random walks*, Sib. Math. J., **37**:4 (1996), 647–682. MR1643358

ANATOLII ALFREDOVICH MOGULSKII
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
4, KOPTYUGA AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
1, PIROGOVA STR.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: mogul@math.nsc.ru

EVGENII IGOREVICH PROKOPENKO
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
1, PIROGOVA STR.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
4, KOPTYUGA AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: evgenii.prokopenko@gmail.com