A. A. Mogulskii, E. I. Prokopenko, Large deviation principle for multidimensional second compound renewal processes in the phase space, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1478–1492

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.102>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:
IP: 54.162.127.20
April 26, 2023, 16:39:51

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1478–1492 (2019)

УДК 519.21

DOI 10.33048/semi.2019.16.102

MSC 60K05, 60F10

ПРИНЦИП БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ВТОРОГО ОБОВЩЕННОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А.А. МОГУЛЬСКИЙ, Е.И. ПРОКОПЕНКО

ABSTRACT. We obtain the large deviation principles for multidimensional second compound renewal processes $\mathbf{Y}(t)$ in the phase space $\mathbb{R}^d$, for this we find and investigate the rate function $D_Y(\boldsymbol{\alpha})$. Also we find asymptotics for the Laplace transform of this process when the time goes to infinity, for this we find and investigate the so-called fundamental function $A_Y(\boldsymbol{\mu})$.

Keywords: compound multidimensional renewal process, large deviations, renewal measure, Cramer's condition, deviation (rate) function, second deviation (rate) function.

1. ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Условимся элементы d -мерного Евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ обозначать полужирными буквами, например, $\mathbf{x} = (x_{(1)}, \dots, x_{(d)})$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Скалярное произведение для элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ будем обозначать

$$\mathbf{x}\mathbf{y} := x_{(1)}y_{(1)} + \dots + x_{(d)}y_{(d)}.$$

Норму в $\mathbb{R}^d$ обозначим $|\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}}$. Случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^d$ тоже будем обозначать полужирными буквами, например, $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_{(1)}, \dots, \zeta_{(d)})$. Через

$$(\tau, \boldsymbol{\zeta}) = (\tau, \zeta_{(1)}, \dots, \zeta_{(d)})$$

будем обозначать случайный вектор в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$.

MOGULSKIY, A.A., PROKOPENKO, E.I., LARGE DEVIATION PRINCIPLE FOR MULTIDIMENSIONAL SECOND COMPOUND RENEWAL PROCESSES IN THE PHASE SPACE.

© 2019 Могульский А.А., Прокопенко Е.И.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН проекты №0314-2019-0008, №0250-2019-0001 и гранта РФФИ №18-01-00101.

Поступила 4 июня 2019 г., опубликована 17 октября 2019 г.

Пусть заданы «начальный» случайный вектор $\xi_1 = (\tau_1, \zeta_1)$ и независимая от него последовательность независимых одинаково распределенных случайных невырожденных векторов $\xi = (\tau, \zeta)$, $\xi_2 = (\tau_2, \zeta_2)$, $\xi_3 = (\tau_3, \zeta_3), \dots$, где $\tau_1 \geq 0$, $\tau > 0$, $\zeta_1, \zeta \in \mathbb{R}^d$. Обозначим

$$T_0 = 0, \quad \mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}; \quad T_n := \sum_{j=1}^n \tau_j, \quad \mathbf{Z}_n := \sum_{j=1}^n \zeta_j \quad \text{при } n \geq 1.$$

При $t \geq 0$ определим два функционала

$$\eta(t) := \min\{k \geq 0 : T_k > t\}, \quad \nu(t) := \max\{k \geq 0 : T_k \leq t\},$$

так что выполняется $\nu(t) = \eta(t) + 1$. Первый обобщенный процесс восстановления (о.п.в.) $\mathbf{Z}(t)$ определяется равенствами

$$\mathbf{Z}(t) := \mathbf{Z}_{\nu(t)} \quad \text{при } t \geq 0, \quad \text{так что} \quad \mathbf{Z}(0) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{если } \tau_1 > 0; \\ \zeta_1, & \text{если } \tau_1 = 0. \end{cases}$$

В работе [4] установлен принцип больших уклонений и логарифмическая асимптотика преобразования Лапласа для процесса $\mathbf{Z}(t)$. Также, в работе [4] приведено сравнение известных результатов с установленными.

В данной же работе мы будем изучать второй о.п.в.

$$\mathbf{Y}(t) := \mathbf{Z}_{\eta(t)} = \mathbf{Z}(t) + \zeta_{\eta(t)} \quad \text{при } t \geq 0, \quad \text{так что} \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{cases} \zeta_1, & \text{если } \tau_1 > 0; \\ \zeta_1 + \zeta_2, & \text{если } \tau_1 = 0. \end{cases}$$

Как оказалось, большие уклонения для процессов $\mathbf{Z}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$ вообще говоря различаются, что следует из данной работы и работы [4].

В известной нам литературе грубая асимптотика больших уклонений изучалась только для процесса $\mathbf{Z}(t)$, причем в том случае, когда функции уклонений для процессов $\mathbf{Z}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$ совпадают. Обзор различных результатов связанных с о.п.в. можно найти в [1].

В дальнейшем везде будем предполагать, что выполнено условие Крамера в следующем виде

$$[\mathbf{C}_0] \quad \mathbf{E}e^{v|\zeta_1|} < \infty, \quad \mathbf{E}e^{v|\zeta|} < \infty \quad \text{при некотором } v > 0.$$

Для $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{1+d}$ положим

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \mu) &:= \mathbf{E}e^{\lambda\tau + \mu\zeta}, & \psi_1(\lambda, \mu) &:= \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1 + \mu\zeta_1}, \\ A(\lambda, \mu) &:= \ln \psi(\lambda, \mu), & A_1(\lambda, \mu) &:= \ln \psi_1(\lambda, \mu). \end{aligned}$$

Определим множества

$$\mathcal{A} := \{(\lambda, \mu) : A(\lambda, \mu) < \infty\}, \quad \mathcal{A}_1 := \{(\lambda, \mu) : A_1(\lambda, \mu) < \infty\}.$$

Ясно, что внутренности $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{A}_1)$ множеств $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ являются областями аналитичности функций $A(\lambda, \mu)$, $A_1(\lambda, \mu)$, соответственно. Обозначим

$$\mathcal{A}^{\leq 0} := \{(\lambda, \mu) : A(\lambda, \mu) \leq 0\}, \quad \mathcal{A}_1^{\leq 0} := \{(\lambda, \mu) : A_1(\lambda, \mu) \leq 0, \quad \mu \in [\mathcal{M}]\},$$

где

$$\mathcal{M} := \{\mu \in \mathbb{R}^d : \mathbf{E}e^{\mu\zeta} < \infty\},$$

$[\mathcal{M}]$ —замыкание множества $\mathcal{M}$. Определяющую роль в дальнейшем играют следующие функции аргумента $\mu \in \mathbb{R}^d$:

$$(1.1) \quad A(\mu) := -\sup\{\lambda : (\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leq 0}\},$$

где, по определению, считаем $\sup\{\lambda : \lambda \in \emptyset\} = -\infty$;

$$(1.2) \quad A_Y(\mu) := \begin{cases} A(\mu), & \text{если } \mu \in [\mathcal{M}]; \\ \infty, & \text{если } \mu \notin [\mathcal{M}]. \end{cases}$$

Как будет установлено ниже (см. теорему 2), функция $A_Y(\mu)$ будет определять (при некоторых дополнительных условиях) логарифмическую асимптотику при $t \rightarrow \infty$ преобразования Лапласа над распределением $\mathbf{Y}(t)$. Мы, следуя [1], назовем функцию $A_Y(\mu)$ *базовой функцией* для процесса $\mathbf{Y}(t)$.

Для функции $G = G(\mu)$, отображающей $\mathbb{R}^d$ в множество $(-\infty, \infty]$, определим преобразование Лежандра $G^{\Sigma\epsilon} = G^{\Sigma\epsilon}(\alpha)$, положив:

$$G^{\Sigma\epsilon}(\alpha) := \sup_{\mu} \{\mu\alpha - G(\mu)\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^d.$$

Будем называть функцию $H = H(\alpha)$, отображающую $\mathbb{R}^d$ в $[0, \infty]$, *компактной*, если для любого $c \geq 0$ множество $\{\alpha : H(\alpha) \leq c\}$ есть компакт в $\mathbb{R}^d$. Легко показать, что любая компактная функция $H(\alpha)$ полунепрерывна снизу.

Обозначим далее для $\alpha \in \mathbb{R}^d$

$$(1.3) \quad D = D(\alpha) := A^{\Sigma\epsilon}(\alpha), \quad D_Y = D_Y(\alpha) := A_Y^{\Sigma\epsilon}(\alpha).$$

Как будет установлено ниже (см. теорему 1), функция $D_Y(\alpha)$ будет играть роль (при некоторых дополнительных условиях) функции уклонений при $t \rightarrow \infty$ для процесса $\mathbf{Y}(t)$. Свойства функций $A_Y(\mu)$, $D_Y(\alpha)$ изучены [3]. Приведем некоторые свойства (см. теоремы 1.1, 1.2 из [3]):

Лемма 1.1. (i) *Функции $A(\mu)$, $A_Y(\mu)$ выпуклы и полунепрерывны снизу.*
(ii) *Функции $D(\alpha)$, $D_Y(\alpha)$ выпуклы, полунепрерывны снизу и компактны.*
(iii) *Справедливы следующие формулы*

$$(1.4) \quad A(\mu) = D^{\Sigma\epsilon}(\mu), \quad A_Y(\mu) = D_Y^{\Sigma\epsilon}(\mu),$$

так что пары $A(\mu), D(\alpha)$; $A_Y(\mu), D_Y(\alpha)$ являются парами взаимно сопряженных (относительно преобразования Лежандра) функций.

(iv) *Для всех $\alpha \in \mathbb{R}^d$ справедливо*

$$(1.5) \quad D_Y(\alpha) = \inf_{\beta} \{D(\beta) + V^{\Sigma\epsilon}(\alpha - \beta)\},$$

где

$$(1.6) \quad V(\mu) := \begin{cases} 0, & \text{если } \mu \in [\mathcal{M}]; \\ \infty, & \text{если } \mu \notin [\mathcal{M}]. \end{cases}$$

(v) *Функции A_Y , A совпадают (и, следовательно, $D_Y = D$), тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$(1.7) \quad A^{\leq 0} \subset \{(\lambda, \mu) : \mu \in [\mathcal{M}]\}.$$

Определение. Будем говорить, что семейство $\left\{\frac{\mathbf{X}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ случайных векторов в пространстве $\mathbb{R}^d$ удовлетворяет принципу больших уклонений (п.б.у.) с компактной функцией уклонений (к.ф.у.) $G(\alpha) \geq 0$, если функция $G(\alpha)$ компактна и для любого измеримого множества $B \subset \mathbb{R}^d$ справедливы неравенства

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{X}(t)}{t} \in B \right) \leq -G([B]),$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{X}(t)}{t} \in B \right) \geq -G((B)),$$

в которых для $B \subset \mathbb{R}^d$, $B \neq \emptyset$

$$G(B) := \inf_{\alpha \in B} G(\alpha), \quad G(\emptyset) := \infty,$$

и через $[B]$, (B) обозначены замыкание и внутренность множества B , соответственно.

Заметим, что используя неравенство Чебышева легко показать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\zeta}{t} \in (\alpha)_\varepsilon \right) \leq -V^{\mathfrak{L}^c}(\alpha),$$

где $(\alpha)_\varepsilon = \{\beta \in \mathbb{R}^d : |\alpha - \beta| < \varepsilon\}$ — ε -окрестность точки α в $\mathbb{R}^d$.

Основные результаты настоящей работы представлены теоремами 1, 2 (см. ниже).

Теорема 1. Пусть выполнено условие допустимой неоднородности

$$(1.8) \quad (\mathcal{A}_Y^{\leq 0}) \subset \mathcal{A}_1, \quad \mathcal{M} \subset \{\mu \in \mathbb{R}^d : \mathbf{E}e^{\mu\zeta_1} < \infty\},$$

и, кроме того, дополнительное условие: для некоторого $c_0 > 0$ и любых $\alpha \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$

$$(1.9) \quad \mathbf{P}(\tau \leq c_0) > 0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\tau \geq c_0, \quad \frac{\zeta}{t} \in (\alpha)_\varepsilon \right) \geq -V^{\mathfrak{L}^c}(\alpha).$$

Тогда семейство $\left\{ \frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \right\}_{t>0}$ удовлетворяет п.б.у. в пространстве $\mathbb{R}^d$ с к.ф.у. $D_Y(\alpha)$. Если дополнительно выполнено условие (1.7), то $D_Y = D$, и условие (1.9) является лишним.

В случае $d = 1$ множество $\mathcal{M}$ таково, что $[\mathcal{M}] = [\mu_-, \mu_+]$, где

$$\mu_+ = \sup \{ \mu : \mathbf{E}e^{\mu\zeta} < \infty \}, \quad \mu_- = \inf \{ \mu : \mathbf{E}e^{\mu\zeta} < \infty \}.$$

При этом $0 \in (\mathcal{M})$ в силу условия $[\mathbf{C}_0]$; поэтому условие (1.9) выглядит следующим образом: для некоторого $c_0 > 0$ такого, что $\mathbf{P}(\tau \leq c_0) > 0$ выполняется

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(\tau \geq c_0, \zeta \geq t) \geq -\mu_+, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(\tau \geq c_0, \zeta \leq -t) \geq -|\mu_-|.$$

Теорема 2. Пусть выполнено условие допустимой неоднородности (1.8) и дополнительное условие (1.9). Тогда для любого $\mu \notin \partial\mathcal{M}$ имеет место сходимость

$$(1.10) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E}e^{\mu\mathbf{Y}(t)} = A_Y(\mu).$$

При этом в случае (1.7) правая часть (1.10) равна $A(\mu)$ и условие (1.9) является лишним.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1, 2

2.1. **Доказательство теоремы 1.** Теорема 1 вытекает из лемм 2.1–2.3.

Лемма 2.1. (Локальный п.б.у. для процесса $\mathbf{Y}(t)$) Пусть выполнены условия (1.8) и (1.9) теоремы 1. Тогда семейство $\left\{\frac{\mathbf{Y}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ удовлетворяет локальному п.б.у. с к.ф.у. $D_Y(\alpha)$, т.е. для любых $\alpha \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$

$$(2.1) \quad \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\alpha)_\delta \right) \leq -D_Y(\alpha);$$

$$(2.2) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\alpha)_\varepsilon \right) \geq -D_Y(\alpha).$$

Если дополнительно выполнено (1.7), то $D_Y = D$ и условие (1.9) является лишним.

Лемма 2.2. (Экспоненциальная плотность для семейства $\left\{\frac{\mathbf{Y}(t)}{t}\right\}_{t>0}$) Семейство $\left\{\frac{\mathbf{Y}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ случайных векторов экспоненциально плотно, т.е.

$$(2.3) \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{|\mathbf{Y}(t)|}{t} \geq K \right) = -\infty.$$

Леммы 2.1, 2.2 будут доказаны в разделах 3, 4, соответственно.

Следующее утверждение хорошо известно (см., например, § 4.1 в [9]).

Лемма 2.3. Пусть семейство $\left\{\frac{\mathbf{X}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ случайных векторов в $\mathbb{R}^d$ является экспоненциально плотным и удовлетворяет локальному п.б.у. с к.ф.у. $G(\alpha)$. Тогда это семейство удовлетворяет п.б.у. с той же функцией уклонений $G(\alpha)$.

2.2. **Доказательство теоремы 2.** В основе доказательства теоремы 2 лежит лемма 2.4, которая является частным случаем теоремы 4.3.1 в [10].

Лемма 2.4. Пусть семейство $\left\{\frac{\mathbf{X}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ случайных векторов удовлетворяет п.б.у. в пространстве $\mathbb{R}^d$ с к.ф.у. $G(\alpha)$. Пусть для фиксированного $\mu \in \mathbb{R}^d$ выполнено условие

$$(2.4) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} \left(e^{\mu \mathbf{X}(t)}; \mu \mathbf{X}(t) \geq Mt \right) = -\infty.$$

Тогда для этого μ имеет место соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} e^{\mu \mathbf{X}(t)} = \sup_{\alpha} \{\mu \alpha - G(\alpha)\}.$$

Следующее утверждение будет доказано в разделе 4.

Лемма 2.5. Пусть выполнено условие допустимой неоднородности (1.8). Тогда для любого $\mu \in (\mathcal{M})$ выполнено соотношение

$$(2.5) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} \left(e^{\mu \mathbf{Y}(t)}; \mu \mathbf{Y}(t) \geq Mt \right) = -\infty.$$

Осуществим теперь

Доказательство теоремы 2. Пусть сначала $\mu \in (\mathcal{M})$. Тогда в силу теоремы 1 и леммы 2.5 для семейства $\left\{ \frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \right\}$ выполнены условия леммы 2.4 с к.ф.у. $D_Y(\alpha)$. Поэтому в силу леммы 2.4 имеет место соотношение

$$(2.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} e^{\mu \mathbf{Y}(t)} = \sup_{\alpha} \{ \mu \alpha - D_Y(\alpha) \}.$$

Привлекая далее второе соотношение в (1.4), получаем, что правая часть (2.6) равна $A_Y(\mu)$. Таким образом, для случая $\mu \in (\mathcal{M})$ соотношение (1.10) доказано.

Пусть теперь $\mu \notin [\mathcal{M}]$. Тогда $A_Y(\mu) = \infty$, и для доказательства соотношения (1.10) достаточно установить оценку снизу

$$(2.7) \quad L_- := \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} e^{\mu \mathbf{Y}(t)} = \infty.$$

Для любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} L_- &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} \left(e^{\mu \mathbf{Y}(t)}; \frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\alpha)_{\varepsilon} \right) \\ &\geq \mu \alpha - |\mu| \varepsilon + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\alpha)_{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Применяя далее оценку снизу в локальном п.б.у. для $\frac{\mathbf{Y}(t)}{t}$ (см. лемму 2.1), получаем

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\alpha)_{\varepsilon} \right) \geq -D_Y(\alpha),$$

поэтому

$$L_- \geq \mu \alpha - D_Y(\alpha) - |\mu| \varepsilon.$$

Из последнего в силу второго соотношения в утверждении (1.4) леммы 1.1 вытекает оценка снизу (2.7):

$$L_- \geq \sup_{\alpha} \{ \mu \alpha - D_Y(\alpha) \} - |\mu| \varepsilon = A_Y(\mu) - |\mu| \varepsilon = \infty.$$

Теорема 2 доказана. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1

3.1. Дополнительные свойства функций $D(\alpha)$, $D_Y(\alpha)$. Функция уклонений для случайного вектора (τ, ζ) определяется как преобразование Лежандра $A(\lambda, \mu)$ (см., например, [12]):

$$\Lambda(\theta, \alpha) := \sup_{\lambda, \mu} \{ \lambda \theta + \mu \alpha - A(\lambda, \mu) \}, \quad (\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Из теоремы 1.2 в [3] вытекает

Лемма 3.1. (i) Для всех $\alpha \in \mathbb{R}^d$ справедливо

$$(3.1) \quad D(\alpha) = \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leq 0}} \{ \lambda + \mu \alpha \};$$

$$(3.2) \quad D_Y(\alpha) = \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}_Y^{\leq 0}} \{ \lambda + \mu \alpha \}.$$

(ii) Для функции

$$D_{\Lambda}(\theta, \alpha) := \inf_{r>0} r\Lambda\left(\frac{\theta}{r}, \frac{\alpha}{r}\right),$$

для всех $\theta > 0, \alpha \in \mathbb{R}^d$ имеет место равенство

$$(3.3) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon}} D_{\Lambda}(\theta, \alpha') = D(\theta, \alpha),$$

где

$$D(\theta, \alpha) := \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leq 0}} \{\lambda\theta + \mu\alpha\}.$$

Заметим, что функция $D_{\Lambda}(\theta, \alpha)$ впервые была определена и изучена в [13]. Пункт (i) леммы 3.1 нам понадобится для доказательства оценки сверху в л.п.б.у., пункты (ii) — для доказательства оценки снизу.

3.2. Доказательство леммы 2.1. (i). Доказательство оценки сверху в лемме 2.1. Для произвольного $\delta > 0$ имеем

$$(3.4) \quad P_Y(t) := \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\alpha)_{\delta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t),$$

где

$$P_n(t) := \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{Z}_{n+1}}{t} \in (\alpha)_{\delta}, \quad T_n \leq t < T_{n+1}\right).$$

Оценим часть суммы в (3.4) по $n > t^2$:

$$\sum_1 := \sum_{n>t^2} P_n(t) \leq \sum_{n>t^2} \mathbf{P}(T_n \leq t) \leq \sum_{n>t^2} \mathbf{P}(T_n - \tau_1 \leq t).$$

В силу экспоненциального неравенства Чебышева для $(n-1)\mathbf{E}\tau \geq t$ (допускается $\mathbf{E}\tau = +\infty$), имеем

$$\mathbf{P}(T_n - \tau_1 \leq t) \leq e^{-(n-1)\Lambda\left(\frac{t}{n-1}\right)},$$

где $\Lambda(\theta)$ — функция уклонений для случайной величины τ . Поскольку $\mathbf{P}(\tau > 0) = 1$, то $\Lambda(\theta) \uparrow \infty$ при $\theta \downarrow 0$, и поэтому

$$(3.5) \quad \sum_1 \leq \sum_{n>t^2} \mathbf{P}(T_n - \tau_1 \leq t) \leq \sum_{n>t^2} e^{-(n-1)\Lambda\left(\frac{t}{n-1}\right)} \leq \frac{1}{1-e^{-1}} e^{-t^2}.$$

Оценим теперь сумму $\sum_2$ в (3.4) по $1 \leq n \leq t^2$, для чего оценим сверху каждое слагаемое $P_n(t)$. Для произвольного вектора $(\lambda, \mu) \in (\mathcal{A}_Y^{\leq 0})$ и для любого $n \geq 1$ имеем

$$(3.6) \quad P_n(t) = \mathbf{E}\left(e^{\pm\lambda T_n \pm \mu \mathbf{Z}_n}; \mathbf{Z}_{n+1} \in (t\alpha)_{t\delta}, T_n \leq t < T_{n+1}\right).$$

Заметим, далее, что на событии

$$\{\mathbf{Z}_{n+1} \in (t\alpha)_{t\delta}, T_n \leq t < T_{n+1}\}$$

выполняется неравенство

$$(3.7) \quad e^{-\lambda T_n - \mu \mathbf{Z}_n} \leq e^{-\lambda t - \mu \alpha t + \sqrt{d}|\mu|\delta t} \max\{1, e^{\lambda \tau_{n+1}}\} e^{\mu \zeta_{n+1}}.$$

Поэтому из (3.6), (3.7) для всех (λ, μ) из $(\mathcal{A}_Y^{\leq 0})$ справедливо

$$\begin{aligned} P_n(t) &\leq e^{-\lambda t - \mu \alpha t + \sqrt{d}|\mu|\delta t} \mathbf{E} e^{\lambda T_n + \mu \mathbf{Z}_n} \mathbf{E} \max\{1, e^{\lambda \tau_{n+1}}\} e^{\mu \zeta_{n+1}} \\ (3.8) \quad &= e^{-\lambda t - \mu \alpha t + \sqrt{d}|\mu|\delta t} \psi_1(\lambda, \mu) \psi^{n-1}(\lambda, \mu) \mathbf{E} \max\{1, e^{\lambda \tau_{n+1}}\} e^{\mu \zeta_{n+1}} \\ &\leq e^{-\lambda t - \mu \alpha t + \sqrt{d}|\mu|\delta t} \psi_1(\lambda, \mu) \mathbf{E} \max\{1, e^{\lambda \tau_{n+1}}\} e^{\mu \zeta_{n+1}}, \end{aligned}$$

где второй сомножитель $\psi_1(\lambda, \mu)$ в правой части (3.8) конечен в силу условия допустимой неоднородности (1.8), а третий сомножитель оценивается как

$$\mathbf{E} \max\{1, e^{\lambda \tau_{n+1}}\} e^{\mu \zeta_{n+1}} \leq \begin{cases} \mathbf{E} e^{\lambda \tau_{n+1} + \mu \zeta_{n+1}}, & \text{если } \lambda \geq 0; \\ \mathbf{E} e^{\mu \zeta_{n+1}}, & \text{если } \lambda < 0, \end{cases}$$

и, следовательно, конечен при $n = 0$ в силу условия допустимой неоднородности (1.8); при $n \geq 1$ в силу того, что $(\lambda, \mu) \in (\mathcal{A}_Y^{\leq 0})$. Таким образом, из (3.4), (3.5), (3.8) вытекает: для всех $(\lambda, \mu) \in (\mathcal{A}_Y^{\leq 0})$

$$(3.9) \quad L_+(\alpha) := \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\alpha)_\delta \right) \leq -(\lambda + \mu \alpha).$$

Поскольку к любой точке (λ_0, μ_0) границы $\partial \mathcal{A}_Y^{\leq 0}$ можно приблизиться точками (λ_n, μ_n) из внутренней $(\mathcal{A}_Y^{\leq 0})$, то неравенство (3.9) справедливо для всех (λ, μ) из замкнутого выпуклого множества $\mathcal{A}_Y^{\leq 0}$. Из последнего вытекает

$$L_+(\alpha) \leq - \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}_Y^{\leq 0}} \{(\lambda + \mu \alpha)\}.$$

Осталось воспользоваться свойством (3.2):

$$\sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}_Y^{\leq 0}} \{(\lambda + \mu \alpha)\} = D_Y(\alpha).$$

Оценка сверху в лемме 2.1 доказана.

(ii). Доказательство оценки снизу в лемме 2.1. Докажем сначала без привлечения условия (1.9) более грубую, чем (2.2), оценку

$$(3.10) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{Y(t)}{t} \in (\alpha)_\varepsilon \right) \geq -D(\alpha).$$

Оценка (3.10) является более грубой, чем оценка (2.2) так, как всегда выполнено неравенство $D_Y(\alpha) \leq D(\alpha)$, которое вытекает из определения $A_Y(\mu)$, $A(\mu)$ и соотношений (1.4).

Рассмотрим для $0 < c < \infty$, $0 < R < \infty$, $q \in (0, 1]$ класс $\mathcal{K}(c, R, q)$ случайных векторов $(\tau, \zeta) \in \mathbb{R}^{d+1}$ таких, что $\mathbf{P}(\tau \geq c, |\zeta| \leq R) \geq q$. Рассмотрим для любого $T > 0$ событие

$$\mathcal{B}_T := \{\eta(T) \leq k(T), |\mathbf{Z}_m| \leq mR, \text{ для всех } m \in \{1, \dots, \eta(T)\}\},$$

где

$$\eta(t) = \nu(t) + 1, \quad k(T) := \left\lceil \frac{T}{c} \right\rceil + 1.$$

Лемма 3.2. Пусть однородное случайное блуждание $(T_k, \mathbf{Z}_k)$, $k = 0, 1, \dots$, порождено последовательностью сумм независимых случайных векторов (τ_i, ζ_i) с общим $s(\tau, \zeta)$ распределением и пусть $(\tau, \zeta) \in \mathcal{K}(c, R, q)$. Тогда для любого $T > 0$

$$\mathbf{P}(\mathcal{B}_T) \geq q^{k(T)}.$$

Доказательство. Рассмотрим события

$$C_k := \{\tau_k \geq c, |\zeta_k| \leq R\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда, легко заметить, что выполнено включение

$$\bigcap_{k=1}^{k(T)} C_k \subseteq B_T.$$

Откуда и вытекает утверждение леммы 3.2. $\square$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству оценки снизу (3.10). Рассмотрим для произвольных фиксированных $r > 0$, $\varepsilon > 0$ и достаточно малого $\delta > 0$ при $n := [rt]$ событие

$$C_t(\varepsilon, \delta) := \left\{ \frac{T_n}{n} \in \frac{t}{n}(1 - \delta)_\delta, \quad \frac{\mathbf{Z}_n}{n} \in \frac{t}{n}(\boldsymbol{\alpha})_{\frac{\varepsilon}{2}} \right\}.$$

На этом событии сумма T_n находится левее значения t и расстояние $\mathcal{T} := t - T_n$ лежит в пределах

$$(3.11) \quad \mathcal{T} \in (0, 2t\delta).$$

Рассмотрим «новое» блуждание

$$\{(T'_k, \mathbf{Z}'_k); k \geq 0\}, \quad (T'_k, \mathbf{Z}'_k) := (T_{n+k} - T_n, \mathbf{Z}_{n+k} - \mathbf{Z}_n),$$

которое не зависит от блуждания

$$\{(T_k, \mathbf{Z}_k); 0 \leq k \leq n\}.$$

Для нового блуждания рассмотрим событие

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}} = \{\eta'(\mathcal{T}) \leq k(\mathcal{T}), |\mathbf{Z}'_m| \leq mR, \text{ для всех } m \in \{1, \dots, \eta'(\mathcal{T})\}\},$$

связанное с моментом $\eta'(T)$ первого прохождения случайного уровня $\mathcal{T}$. Очевидно, что для некоторых $0 < c < \infty$, $0 < R < \infty$, $q \in (0, 1]$ выполняется $(\tau, \zeta) \in \mathcal{K}(c, R, q)$, поэтому можно воспользоваться леммой 3.2. Заметим прежде, что на событии $C_t(\varepsilon, \delta) \cap \mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ справедливо $\nu(t) = n + \eta'(\mathcal{T}) - 1$, поэтому

$$(3.12) \quad \mathbf{Y}(t) = \mathbf{Z}_n + \mathbf{Z}'_{\eta'(\mathcal{T})}.$$

В силу выбора события $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ и в силу (3.11) справедлива оценка

$$|\mathbf{Z}'_{\eta'(\mathcal{T})}| \leq k(\mathcal{T})R \leq \left(\frac{\mathcal{T}}{c} + 1\right)R \leq t \left(\frac{2\delta R}{c} + \frac{R}{t}\right).$$

Тогда при

$$\frac{2\delta R}{c} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad \frac{R}{t} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

имеет место включение

$$\left\{ \frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon \right\} \supset C_t(\varepsilon, \delta) \cap \mathcal{B}_{\mathcal{T}}.$$

Следовательно, используя лемму 3.2, имеем

$$\begin{aligned}
 (3.13) \quad \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\alpha)_\varepsilon \right) &\geq \mathbf{P} (\mathcal{B}_T \cap C_t(\varepsilon, \delta)) = \int_0^\infty \mathbf{P} (\mathcal{B}_T \cap C_t(\varepsilon, \delta), \mathcal{T} \in dT) \\
 &= \int_0^\infty \mathbf{P} (\mathcal{B}_T) \mathbf{P} (C_t(\varepsilon, \delta), \mathcal{T} \in dT) \\
 &\geq \int_0^\infty q^{k(T)} \mathbf{P} (C_t(\varepsilon, \delta), \mathcal{T} \in dT) = \mathbf{E} \left(q^{k(\mathcal{T})}; C_t(\varepsilon, \delta) \right);
 \end{aligned}$$

при этом, на событие $C_t(\varepsilon, \delta)$ справедливо $\mathcal{T} \leq 2t\delta$. Следовательно,

$$\mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\alpha)_\varepsilon \right) \geq q^{\frac{2t\delta}{c}+1} \mathbf{P} (C_t(\varepsilon, \delta)).$$

В силу известной оценки снизу (локальный п.б.у. для случайного блуждания) (см., например, теорему 1.2.1 в [9])

$$(3.14) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} (C_t(\varepsilon, \delta)) \geq -r\Lambda \left(\frac{1-\delta}{r}, \frac{\alpha}{r} \right),$$

получаем

$$L_-(\alpha, \varepsilon) := \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\alpha)_\varepsilon \right) \geq -r\Lambda \left(\frac{1-\delta}{r}, \frac{\alpha}{r} \right) + \frac{2\delta}{c} \ln q.$$

Максимизируя правую часть последнего неравенства по $r > 0$, получаем для $\beta := \frac{1}{1-\delta}\alpha$

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq -D_\Lambda(1-\delta, \alpha) + \frac{2\delta}{c} \ln q = -(1-\delta)D_\Lambda(1, \beta) + \frac{2\delta}{c} \ln q.$$

Выбирая далее $\alpha' \in (\alpha)_\varepsilon$ и $\varepsilon' > 0$ такие, что $(\alpha')_{\varepsilon'} \subset (\alpha)_\varepsilon$, получаем для $\beta' := \frac{1}{1-\delta}\alpha'$

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq -(1-\delta)D_\Lambda(1, \beta') + \frac{2\delta}{c} \ln q.$$

Максимизируя правую часть последнего неравенства по $\alpha' \in (\alpha)_\varepsilon$, получаем

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq -(1-\delta) \inf_{\alpha'=(1-\delta)\beta' \in (\alpha)_\varepsilon} D_\Lambda(1, \beta') + \frac{2\delta}{c} \ln q.$$

Поскольку для любого $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ и всех достаточно малых $\delta > 0$ правая часть последнего неравенства не превосходит

$$-(1-\delta) \inf_{\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon'}} D_\Lambda(1, \alpha') + \frac{2\delta}{c} \ln q,$$

то, переходя к пределу по $\delta \rightarrow 0$, получаем

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq - \inf_{\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon'}} D_\Lambda(1, \alpha').$$

Переходя далее в правой части последнего неравенства к пределу по $\varepsilon' \rightarrow 0$, получаем в силу (3.3)

$$(3.15) \quad L_-(\alpha, \varepsilon) \geq - \lim_{\varepsilon' \downarrow 0} \inf_{\alpha' \in (\alpha)_{\varepsilon'}} D_\Lambda(1, \alpha') = -D(1, \alpha) = -D(\alpha)$$

Последнее равенство следует из (3.1). Более грубая, чем (2.2), оценка (3.10) установлена. Таким образом, оценка (2.2) доказана в случае, когда $D_Y = D$, без привлечения условия (1.9).

Рассмотрим теперь случай, когда функции $D = D(\alpha)$ и $D_Y = D_Y(\alpha)$ различны и выполнено дополнительное условие (1.9).

Рассмотрим для $0 < c < \infty$, $0 < R < \infty$, $q \in (0, 1]$ класс $\mathcal{K}(c, c_0, R, q)$ случайных векторов $(\tau, \zeta) \in \mathbb{R}^{d+1}$ таких, что

$$\mathbf{P}(c \leq \tau \leq c_0, |\zeta| \leq R) \geq q,$$

где константа c_0 из условия (1.9).

Зафиксируем $\beta \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ и построим три события B_t , C_t , D_t таким образом, что выполняется включение

$$(3.16) \quad \left\{ \frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\alpha)_{4\varepsilon} \right\} \supset B_t \cap C_t \cap D_t.$$

В качестве C_t выберем событие

$$C_t := \left\{ \frac{\mathbf{Z}_n}{n} \in \frac{t}{n}((1-2\delta)\beta)_\varepsilon, \quad \frac{T_n}{n} \in \frac{t}{n}(1-2\delta)_\delta \right\},$$

где константу $\delta > 0$ выберем позже, $n = [rt]$. Рассмотрим далее, как и ранее, «новое» блуждание

$$\{(T'_k, \mathbf{Z}'_k); k \geq 0\}, \quad (T'_k, \mathbf{Z}'_k) := (T_{n+k} - T_n, \mathbf{Z}_{n+k} - \mathbf{Z}_n),$$

на траекториях которого, для $\chi'(T) := t - T'_n$, определим событие

$$B_t := \{\eta'(\mathcal{T}) \leq k(\mathcal{T}), \quad \chi'(\mathcal{T}) \leq c_0, \quad |\mathbf{Z}'_m| \leq mR, \quad 1 \leq m \leq \eta'(\mathcal{T})\},$$

связанное с первым прохождением координатой T'_k случайного уровня

$$\mathcal{T} := t - T_n - c_0.$$

Аналогично доказательству леммы 3.2 и неравенству (3.13) получаем

$$(3.17) \quad \mathbf{P}(B_t \cap C_t) \geq \mathbf{E}(q^{k(\mathcal{T})}; C_t).$$

Наконец, определим третье событие

$$D_t := \left\{ \tau_{n+\eta'(\mathcal{T})+1} \geq c_0, \quad \frac{\zeta_{n+\eta'(\mathcal{T})+1}}{t} \in ((1-2\delta)(\alpha - \beta))_\delta \right\},$$

которое не зависит от первых двух. На событии

$$B_t \cap C_t \cap D_t,$$

выполняется $\eta(t) = n + \eta'(\mathcal{T}) + 1$, поэтому

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Z}_n + \mathbf{Z}'_{\eta'(\mathcal{T})} + \zeta_{n+\eta'(\mathcal{T})+1},$$

а также

$$\mathcal{T} \leq 3t\delta - c_0, \quad |\mathbf{Z}'_{\eta'(\mathcal{T})}| \leq k(\mathcal{T})R \leq \left(\frac{3t\delta - c_0}{c} + 1 \right) R.$$

Имеем

$$\frac{\mathbf{Y}(t)}{t} - \alpha = \left(\frac{\mathbf{Z}_n}{t} - (1-2\delta)\beta \right) + \frac{\mathbf{Z}'_{\eta'(\mathcal{T})}}{t} + \left(\frac{\zeta_{n+\eta'(\mathcal{T})+1}}{t} - (1-2\delta)(\alpha - \beta) \right) - 2\delta\alpha,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathbf{Y}(t)}{t} - \alpha \right| &\leq \left| \frac{\mathbf{Z}_n}{t} - (1-2\delta)\beta \right| + \left| \frac{\mathbf{Z}'_{\eta'(\mathcal{T})}}{t} \right| + \left| \frac{\zeta_{n+\eta'(\mathcal{T})+1}}{t} - ((1-2\delta)(\alpha - \beta)) \right| + 2\delta|\alpha| \\ &< \varepsilon + \left(\frac{3\delta}{c} - \frac{c_0}{ct} + \frac{1}{t} \right) R + \delta + |\alpha|2\delta. \end{aligned}$$

Выбираем $\delta > 0$ и $t > 0$ таким образом, что

$$\left(\frac{3\delta}{c} - \frac{c_0}{ct} + \frac{1}{t} \right) R < \varepsilon, \quad \delta < \varepsilon, \quad 2|\alpha|\delta < \varepsilon,$$

получаем включение (3.16). Используя (3.17), (3.16), получаем неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\alpha)_{4\varepsilon} \right) &\geq \mathbf{P} (B_t \cap C_t \cap D_t) = \mathbf{P} (B_t \cap C_t) \mathbf{P} (D_t) \\ &\geq q^{\frac{3\delta t - c_0 + c}{c}} \mathbf{P} (C_t) \mathbf{P} (D_t). \end{aligned}$$

Из последнего выводим

$$\begin{aligned} L_-(\alpha, \varepsilon) &:= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{Y}(t)}{t} \in (\alpha)_{4\varepsilon} \right) \\ &\geq \frac{3\delta}{c} \ln q + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} (C_t) + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P} (D_t) \\ &=: \frac{3\delta}{c} \ln q + L_1 + L_2. \end{aligned}$$

Оцениваем L_1 аналогично (3.14), L_2 — с помощью условия (1.9), получаем

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq \frac{3\delta}{c} \ln q - r\Lambda \left(\frac{1-2\delta}{r}, \frac{(1-2\delta)\beta}{r} \right) - V^{\mathcal{L}e}((1-2\delta)(\alpha - \beta)).$$

Максимизируя правую часть последнего неравенства по $r > 0$, получаем

$$\begin{aligned} L_-(\alpha, \varepsilon) &\geq \frac{3\delta}{c} \ln q - D_\Lambda(1-2\delta, (1-2\delta)\beta) - V^{\mathcal{L}e}((1-2\delta)(\alpha - \beta)) \\ &= \frac{3\delta}{c} \ln q - (1-2\delta)D_\Lambda(1, \beta) - (1-2\delta)V^{\mathcal{L}e}(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Устремляя далее $\delta \rightarrow 0$, получаем неравенство

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq -D_\Lambda(1, \beta) - V^{\mathcal{L}e}(\alpha - \beta).$$

Повторяя далее с очевидными изменениями последовательность соотношений, которые использовались ранее для доказательства оценки снизу (3.15), мы приходим к неравенству

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq -D(\beta) - V^{\mathcal{L}e}(\alpha - \beta).$$

Максимизируя правую часть последнего неравенства по $\beta \in \mathbb{R}^d$, и используя свойство (1.5), получаем требуемое

$$L_-(\alpha, \varepsilon) \geq -\inf_{\beta} \{D(\beta) + V^{\mathcal{L}e}(\alpha - \beta)\} = -D_Y(\alpha).$$

Оценка снизу в лемме 2.1 доказана. Лемма 2.1 доказана.

□

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ 2.2, 2.5

Доказательство леммы 2.2 повторяет с очевидными изменениями доказательство леммы 2.2 в [4], поэтому мы опускаем это доказательство.

Доказательство леммы 2.5 в идейном плане близко к доказательству леммы 2.5 в [4]; однако есть существенные отличия. Поэтому мы приводим полное

Доказательство леммы 2.5. Пусть $\mu = \mathbf{0}$. Тогда

$$\mathbf{E}(e^{\mu \mathbf{Y}(t)}; \mu \mathbf{Y}(t) \geq Mt) = \mathbf{P}(0 \geq Mt) = 0,$$

и соотношение (2.5) очевидным образом выполняется.

Пусть теперь $\mu \neq \mathbf{0}$, $\mu \in (\mathcal{M})$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$(1 + \varepsilon)\mu \in (\mathcal{M}), \quad \mathbf{E}e^{(1+\varepsilon)\mu \zeta_1} < \infty.$$

Следовательно, $A((1 + \varepsilon)\mu) < \infty$. Выберем $\lambda = -A((1 + \varepsilon)\mu)$, тогда

$$(4.1) \quad A(\lambda, (1 + \varepsilon)\mu) \leq 0.$$

И, следовательно, для этих фиксированных λ , μ , ε имеем

$$\begin{aligned} E_t(\mu, M) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}(e^{\mu \mathbf{Z}_{n+1}}; T_n \leq t < T_{n+1}, \mu \mathbf{Z}_{n+1} \geq Mt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}(e^{\pm \lambda T_n + (1+\varepsilon)\mu \mathbf{Z}_{n+1} - \varepsilon \mu \mathbf{Z}_{n+1}}; T_n \leq t < T_{n+1}, \mu \mathbf{Z}_{n+1} \geq Mt) \\ &\leq e^{|\lambda|t - \varepsilon Mt} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}(e^{\lambda T_n + (1+\varepsilon)\mu \mathbf{Z}_{n+1}}; T_n \leq t < T_{n+1}, \mu \mathbf{Z}_{n+1} \geq Mt) \\ &=: e^{|\lambda|t - \varepsilon Mt} \sum_{n=0}^{\infty} E_n. \end{aligned}$$

При $n = 0$ для некоторого $C_1 < \infty$ имеем

$$E_0 = \mathbf{E}(e^{(1+\varepsilon)\mu \zeta_1}; \tau_1 > t, \mu \zeta_1 \geq Mt) \leq \mathbf{E}e^{(1+\varepsilon)\mu \zeta_1} < C_1.$$

Для того, чтобы оценить сверху E_n при $n \geq 1$, определим последовательность $\{(\hat{\tau}_k, \hat{\zeta}_k)\}_{k \geq 1}$ независимых случайных векторов, положив для борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^{d+1}$

$$\mathbf{P}((\hat{\tau}_k, \hat{\zeta}_k) \in B) := \frac{1}{\psi_k(\lambda, (1 + \varepsilon)\mu)} \mathbf{E}(e^{\lambda \tau_k + (1+\varepsilon)\mu \zeta_k}; (\tau_k, \zeta_k) \in B),$$

где $\psi_k(\lambda, (1 + \varepsilon)\mu) := \mathbf{E}e^{\lambda \tau_k + (1+\varepsilon)\mu \zeta_k}$. По этой последовательности построим суммы $(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{Z}}_n)$. Используя новые обозначения, имеем для $n \geq 1$

$$\begin{aligned} E_n &= \mathbf{E}(e^{\lambda T_n + (1+\varepsilon)\mu \mathbf{Z}_n + (1+\varepsilon)\mu \zeta_{n+1}}; T_n \leq t < T_{n+1}, \mu \mathbf{Z}_n + \mu \zeta_{n+1} \geq Mt) \\ &= \psi_1(\lambda, (1 + \varepsilon)\mu) \psi_2^{n-1}(\lambda, (1 + \varepsilon)\mu) \mathbf{P}(\hat{T}_n \leq t < \hat{T}_{n+1}, \mu \hat{\mathbf{Z}}_{n+1} \geq Mt) \\ &\leq \psi_1(\lambda, (1 + \varepsilon)\mu) \psi_2^{n-1}(\lambda, (1 + \varepsilon)\mu) \mathbf{P}(\hat{T}_n \leq t). \end{aligned}$$

Поскольку в силу (4.1) имеем $(\lambda, (1 + \varepsilon)\mu) \in \mathcal{A}_Y^{\leq 0}$, то $\psi_2(\lambda, (1 + \varepsilon)\mu) \leq 1$ и в силу условия допустимой неоднородности (1.8) $\psi_1(\lambda, (1 + \varepsilon)\mu) \leq C$ для некоторого $C < \infty$. Поэтому

$$(4.2) \quad E_t(\mu, M) \leq CC_1 e^{|\lambda|t - \varepsilon Mt} \sum_1, \quad \sum_1 := \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(\hat{T}_n \leq t).$$

В силу экспоненциального неравенства Чебышева для $(n - 1)\mathbf{E}\hat{\tau} \geq t$, имеем

$$\mathbf{P}(\hat{T}_n \leq t) \leq \mathbf{P}(\hat{T}_n - \hat{\tau}_1 \leq t) \leq e^{-(n-1)\hat{\Lambda}(\frac{t}{n-1})},$$

где $\hat{\Lambda}(\alpha)$ —функция уклонений для случайной величины $\hat{\tau} := \hat{\tau}_2$. Поскольку $\mathbf{P}(\hat{\tau} > 0) = 1$, то $\hat{\Lambda}(\alpha) \uparrow \infty$ при $\alpha \downarrow 0$, и поэтому при $t \rightarrow \infty$

$$(4.3) \quad \sum_{n \geq t^2} \mathbf{P}(\hat{T}_n - \hat{\tau}_1 \leq t) \leq \sum_{n \geq t^2} e^{-(n-1)\hat{\Lambda}(\frac{t}{n-1})} = o(1).$$

Следовательно, при всех достаточно больших t

$$\sum_1 = \sum_{1 \leq n \leq t^2-1} \mathbf{P}(\hat{T}_n - \hat{\tau}_1 \leq t) + \sum_{n \geq t^2} \mathbf{P}(\hat{T}_n - \hat{\tau}_1 \leq t) \leq t^2 - 1 + o(1) \leq t^2,$$

то, при тех же t , в силу (4.2) имеем для любого M и для выбранных ранее фиксированных $\lambda, \mu, \varepsilon$ неравенство

$$E_t(\mu, M) \leq Ce^{|\lambda|t - \varepsilon M t^2}.$$

Поскольку из последнего неравенства вытекает соотношение (2.5), то лемма 2.5 доказана. $\square$

REFERENCES

- [1] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition. I*, Siberian Mathematical Journal, **59**:3 (2018), 491–514. MR3879625
- [2] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition. II*, Siberian Mathematical Journal, **59**:4 (2018), 731–750. MR3879647
- [3] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *The rate function and the fundamental function for multidimensional compound renewal process*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 1449–1463.
- [4] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Large deviation principle for multidimensional first compound renewal processes in the phase space*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 1464–1477.
- [5] R. Lefevere, M. Mariani, L. Zambotti, *Large deviations for renewal processes*, In Stochastic Processes and their Applications, **121**:10 (2011), 2243–2271. MR2822776
- [6] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Large deviation principles for the finite-dimensional distributions of compound renewal processes*, Sib. Math. J., **56**:1 (2015), 28–53. MR3407938
- [7] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Properties of the deviation rate function and the asymptotics for the Laplace transform of the distribution of a compound renewal process*, Teor. Veroyatnost. i Primenen., **64**:4 (2019), 625–641.
- [8] B. Tsirelson, *From uniform renewal theorem to uniform large and moderate deviations for renewal-reward processes*, Electron. Commun. Probab. **18**:52 (2013), 1–13. MR3078015
- [9] A.A. Borovkov, *Asymptotic analysis of random walks. Rapidly decreasing distributions of increments*, Moscow: Fizmatlit, 2013. Zbl 1351.60003
- [10] A. Dembo, O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, Berlin: Springer-Verlag, 2010. MR2571413
- [11] Rockafellar R.T., *Convex Analysis*, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1970. MR0274683
- [12] A.A. Borovkov, *Probability Theory*, London: Springer-Verlag, 2013. MR3086572
- [13] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *The second rate function and the asymptotic problems of renewal and hitting the boundary for multidimensional random walks*, Sib. Math. J., **37**:4 (1996), 647–682. MR1643358

ANATOLII ALFREDOVICH MOGULSKII
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
4, KOPTYUGA AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
1, PIROGOVA STR.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: `mogul@math.nsc.ru`

EVGENII IGOREVICH PROKOPENKO
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
1, PIROGOVA STR.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
4, KOPTYUGA AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: `evgenii.prokopenko@gmail.com`