Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. I. Lotov, V. R. Xodjibayev, On a stochastic process with switchings, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1531–1546

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.104>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.197.130.99

April 26, 2023, 15:38:15

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1531–1546 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.104

УДК 519.21

MSC 60G50

О СЛУЧАЙНОМ ПРОЦЕССЕ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

В.И. ЛОТОВ, В.Р. ХОДЖИБАЕВ

ABSTRACT. We study a stochastic process $X(t)$ with switchings between two stationary processes with independent increments while achieving regulatory barriers. We obtain the dual Laplace–Stieltjes transform of the distribution of the process $X(t)$ and its limit as $t \rightarrow \infty$. Under Cramer’s type conditions, the asymptotic representations of these transforms are obtained when the width of the regulating strip is growing. We use known results for regenerative processes and factorization technique for the study in boundary crossing problems for stochastic processes.

Keywords: oscillating stochastic process, stationary process with independent increments, regenerative process, stationary distribution, factorization method.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\xi_i(t)$, $t \geq 0$, $i = 1, 2$, — независимые однородные случайные процессы с независимыми приращениями,

$$\xi_1(0) = \xi_2(0) = 0, \quad m_1 = \mathbf{E}\xi_1(1) > 0, \quad m_2 = \mathbf{E}\xi_2(1) < 0.$$

Траектории процессов предполагаются непрерывными справа. Для произвольного $b > 0$ определим случайные величины

$$(1) \quad \tau_1 = \inf\{t \geq 0 : \xi_1(t) \geq b\}, \quad \tau_2 = \inf\{t \geq 0 : \xi_2(t) \leq -b\}.$$

ЛОТОВ, В.И., ХОДЖИБАЕВ, В.Р., ON A STOCHASTIC PROCESS WITH SWITCHINGS.

© 2019 Лотов В.И., Ходжибаев В.Р.

Работа поддержана РФФ (грант 18-11-00129).

Поступила 20 июня 2019 г., опубликована 21 октября 2019 г.

На промежутке времени $0 \leq t \leq \tau_1 + \tau_2$ случайный процесс $X(t)$ строится следующим образом: $X(0) = 0$, и далее полагаем

$$(2) \quad X(t) = \begin{cases} \min\{\xi_1(t), b\}, & 0 \leq t \leq \tau_1, \\ \max\{b + \xi_2(t - \tau_1), 0\}, & \tau_1 < t \leq \tau_1 + \tau_2. \end{cases}$$

В соответствии с этим определением $X(t)$ совпадает с $\xi_1(t)$ до тех пор, пока впервые не будет достигнут уровень b в момент времени τ_1 , полагаем при этом $X(\tau_1) = b$, игнорируя перескок. При $t > \tau_1$ в качестве приращений процесса $X(t)$ используются приращения процесса $\xi_2(t)$ до тех пор, пока впервые после τ_1 не будет достигнут нулевой уровень в момент времени $\theta_1 := \tau_1 + \tau_2$, $X(\theta_1) = 0$. После чего приращения процесса $X(t)$ вновь переключаются на приращения независимой копии процесса $\xi_1(t)$ до тех пор, пока в некоторый момент времени $\theta_1 + \tau_3$ не будет достигнут уровень b , полагаем $X(\theta_1 + \tau_3) = b$. Затем опять происходит переключение на независимую копию процесса $\xi_2(t)$ до тех пор, пока в некоторый момент времени $\theta_2 := \theta_1 + \tau_3 + \tau_4$ не будет достигнут уровень 0. Как и на предыдущем этапе, полагаем $X(\theta_2) = 0$. При $t > \theta_2$ дальнейшие переключения на независимые копии процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ происходят по той же схеме. Получаемая в итоге последовательность моментов достижения нуля $\{\theta_k, k \geq 0\}$ выглядит следующим образом: $\theta_0 = 0$, $\theta_{k+1} = \theta_k + \tau_{2k+1} + \tau_{2k+2}$. Здесь случайные величины τ_{2k+1} распределены одинаково с τ_1 , случайные величины τ_{2k+2} распределены одинаково с τ_2 , и все они независимы.

Целью данной работы является нахождение преобразования Лапласа — Стилтеса распределения случайного процесса $X(t)$ и его предела при $t \rightarrow \infty$, называемого стационарным распределением. Точные выражения для этих преобразований оказываются весьма сложными. Они найдены в разделе 2 работы (теоремы 1 и 2), и здесь в полной мере используются компоненты так называемой безгранично делимой факторизации, введенной и изученной Б.А. Рогозиным в [1]–[3]. Здесь же обсуждается сложность вычисления полученных выражений, демонстрируются вычисления в некоторых простых ситуациях. В разделе 3 работы проведен асимптотический анализ полученных в теоремах 1 и 2 выражений при условии, что процессы $\xi_i(t)$ удовлетворяют условиям крамеровского типа и $b \rightarrow \infty$. В итоге выделены сравнительно просто устроенные главные части этих выражений и оценены остаточные члены, которые оказываются экспоненциально малыми по сравнению с главными частями (теорема 3). Исследования аналогичных процессов с дискретным временем проведены ранее в [4]; здесь используются метод и техника этой работы. В заключительном разделе 4 настоящей работы приведены аналогичные преобразования Лапласа — Стилтеса для обобщенного процесса восстановления с переключениями.

Из определения ясно, что $X(t)$ является регенерирующим случайным процессом с непрерывным временем. Моменты $\theta_1, \theta_2, \dots$ (последовательные моменты достижений нулевого уровня процессом $X(t)$) являются моментами регенерации, т.к. с вероятностью единица при $t = \theta_k$ процесс $X(t)$ попадает в нуль. Времена между моментами регенерации являются независимыми и одинаково распределенными с θ_1 случайными величинами, $E\theta_1 = E\tau_1 + E\tau_2 < \infty$. Вероятностные характеристики траектории случайного процесса между моментами регенерации являются одинаковыми.

Случайные блуждания и процессы, у которых распределение приращений меняется по мере достижения регулирующих барьеров, часто называют осциллирующими. Изучению разных версий таких процессов посвящен ряд работ, библиографические сведения об этом можно найти в [4].

Известно (см. [5, гл. 21, теорема 5.1]), что если промежутки времени между моментами регенерации имеют конечное среднее, то существует стационарное распределение для рассматриваемого регенерирующего процесса. Для того, чтобы найти преобразование Лапласа — Стилтеса этого стационарного распределения, нам потребуется сначала найти двойное преобразование

$$\Psi(u, \lambda) := \int_0^{\infty} e^{-ut} \mathbf{E} e^{\lambda X(t)} dt, \quad u > 0, \quad \operatorname{Re} \lambda = 0.$$

Для этих целей будет использоваться упомянутая безгранично делимая факторизация, напомним ее определение и основные свойства.

Пусть $\psi_i(\lambda) = \ln \mathbf{E} e^{\lambda \xi_i(1)}$, $i = 1, 2$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$. Введем функции

$$r_i(u, \lambda) = \frac{u}{u - \psi_i(\lambda)} = u \int_0^{\infty} e^{-ut} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} d_x \mathbf{P}(\xi_i(t) < x) dt.$$

Известно [1], что функции $r_i(u, \lambda)$ при $\operatorname{Re} \lambda = 0, u > 0$ допускают факторизацию $r_i(u, \lambda) = r_{i+}(u, \lambda) r_{i-}(u, \lambda)$, где $r_{i+}(u, \lambda)$ есть преобразование Лапласа — Стилтеса по переменной λ , $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, безгранично делимого распределения, носитель которого содержится на неотрицательной полуоси, а $r_{i-}(u, \lambda)$ есть преобразование Лапласа — Стилтеса при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ безгранично делимого распределения, носитель которого содержится на неположительной полуоси. Функции $r_{i+}(u, \lambda)$ ($r_{i-}(u, \lambda)$) условно называются положительной (отрицательной) компонентами факторизации. В [1] установлено, что

$$\begin{aligned} r_{i+}(u, \lambda) &= u \int_0^{\infty} e^{-ut} \int_0^{\infty} e^{\lambda x} d_x \mathbf{P}(\bar{\xi}_i(t) < x) dt \\ &= \exp \left\{ - \int_0^{\infty} (e^{\lambda x} - 1) d_x \int_0^{\infty} t^{-1} \mathbf{P}(\xi_i(t) > x) e^{-ut} dt \right\}, \\ r_{i-}(u, \lambda) &= u \int_0^{\infty} e^{-ut} \int_{-\infty}^0 e^{\lambda x} d_x \mathbf{P}(\bar{\bar{\xi}}_i(t) > x) dt \\ &= \exp \left\{ \int_{-\infty}^0 (e^{\lambda x} - 1) d_x \int_0^{\infty} t^{-1} \mathbf{P}(\xi_i(t) < x) e^{-ut} dt \right\}, \end{aligned}$$

где $\bar{\xi}_i(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \xi_i(s)$, $\bar{\bar{\xi}}_i(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \xi_i(s)$.

Здесь функция $r_{i+}(u, \lambda)$ аналитична при $\operatorname{Re} \lambda < 0$, непрерывна и не обращается в нуль при $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки, а функция $r_{i-}(u, \lambda)$ обладает аналогичными свойствами в правой полуплоскости.

Если обозначить через $S(A)$ множество функций g , имеющих вид

$$g(\lambda) = \int_A e^{\lambda x} dG(x), \quad \text{где} \quad \int_A |dG(x)| < \infty$$

и A — произвольное борелевское множество, то нетрудно заметить, что

$$r_{i+}(u, \lambda) \in S([0, \infty)), \quad r_{i-}(u, \lambda) \in S((-\infty, 0])$$

как функции переменной λ .

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА — СТИЛТЬЕСА

Для всякой функции $g \in S(\mathbb{R})$ и произвольного борелевского множества $A \subset \mathbb{R}$ положим

$$[g(\lambda)]^A = \int_A e^{\lambda x} dG(x),$$

и пусть $\varphi_i(u) = \mathbf{E}e^{-u\tau_i}$, $i = 1, 2$.

Теорема 1. Для двойного преобразования Лапласа — Стилтеса распределения процесса $X(t)$ при $u > 0$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$ справедливо следующее представление:

$$(3) \quad \Psi(u, \lambda) := \int_0^\infty e^{-ut} \mathbf{E}e^{\lambda X(t)} dt$$

$$= \frac{1}{u(1 - \varphi_1(u)\varphi_2(u))} \left\{ r_{1-}(u, \lambda)[r_{1+}(u, \lambda)]^{[0, b)} + e^{\lambda b} \varphi_1(u) r_{2+}(u, \lambda)[r_{2-}(u, \lambda)]^{(-b, 0]} \right\}.$$

Доказательство. Запишем

$$(4) \quad \int_0^\infty e^{-ut} \mathbf{E}e^{\lambda X(t)} dt = \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty e^{-ut} \mathbf{E}(e^{\lambda X(t)}; \theta_k \leq t < \theta_{k+1}) dt$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty e^{-ut} \mathbf{E}(e^{\lambda X(t)}; \theta_k \leq t < \theta_k + \tau_{2k+1}) dt$$

$$+ \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty e^{-ut} \mathbf{E}(e^{\lambda X(t)}; \theta_k + \tau_{2k+1} \leq t < \theta_{k+1}) dt,$$

и рассмотрим отдельно каждую из сумм в правой части.

Для каждого $k \geq 0$ при $u > 0$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$ имеем

$$\int_0^\infty e^{-ut} \mathbf{E}(e^{\lambda X(t)}; \theta_k \leq t < \theta_k + \tau_{2k+1}) dt = \int_0^\infty e^{-ut} \mathbf{E}(e^{\lambda \xi_1(t - \theta_k)}; 0 \leq t - \theta_k < \tau_{2k+1}) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-ut} \int_0^t \mathbf{E}(e^{\lambda \xi_1(t-s)}; 0 \leq t - s < \tau_{2k+1}) \mathbf{P}(\theta_k \in ds) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-ut} \mathbf{E}(e^{\lambda \xi_1(t)}; 0 \leq t < \tau_1) dt \mathbf{E}e^{-u\theta_k}.$$

Известно [6], что

$$(u - \psi_1(\lambda)) \int_0^{\infty} e^{-ut} \mathbf{E}(e^{\lambda \xi_1(t)}; 0 \leq t < \tau_1) dt = 1 - r_{1+}^{-1}(u, \lambda) [r_{1+}(u, \lambda)]^{[b, \infty)}.$$

Воспользовавшись соотношениями

$$\frac{u}{u - \psi_1(\lambda)} = r_{1-}(u, \lambda) r_{1+}(u, \lambda), \quad [r_{1+}(u, \lambda)]^{[b, \infty)} = r_{1+}(u, \lambda) - [r_{1+}(u, \lambda)]^{[0, b)}$$

и тем, что $\mathbf{E}e^{-u\theta_k} = (\mathbf{E}e^{-u(\tau_1+\tau_2)})^k = (\varphi_1(u)\varphi_2(u))^k$, приходим к представлению

$$(5) \quad \int_0^{\infty} e^{-ut} \mathbf{E}(e^{\lambda X(t)}; \theta_k \leq t < \theta_k + \tau_{2k+1}) dt \\ = r_{1-}(u, \lambda) u^{-1} [r_{1+}(u, \lambda)]^{[0, b)} (\varphi_1(u)\varphi_2(u))^k.$$

Аналогично имеем

$$(6) \quad \int_0^{\infty} e^{-ut} \mathbf{E}(e^{\lambda X(t)}; \theta_k + \tau_{2k+1} \leq t < \theta_{k+1}) dt \\ = \int_0^{\infty} e^{-ut} \mathbf{E}(e^{\lambda(b+\xi_2(t-\theta_k-\tau_{2k+1}))}; 0 \leq t - \theta_k - \tau_{2k+1} < \tau_{2k+2}) dt \\ = e^{\lambda b} \int_0^{\infty} e^{-ut} \int_0^t \mathbf{E}(e^{\lambda \xi_2(t-s)}; 0 \leq t-s < \tau_{2k+2}) \mathbf{P}(\theta_k + \tau_{2k+1} \in ds) dt \\ = e^{\lambda b} \int_0^{\infty} e^{-ut} \mathbf{E}(e^{\lambda \xi_2(t)}; 0 \leq t < \tau_2) dt \mathbf{E}e^{-u(\theta_k+\tau_1)}.$$

Далее пользуемся соотношениями ([6])

$$(u - \psi_2(\lambda)) \int_0^{\infty} e^{-ut} \mathbf{E}(e^{\lambda \xi_2(t)}; 0 \leq t < \tau_2) dt \\ = 1 - r_{2-}^{-1}(u, \lambda) [r_{2-}(u, \lambda)]^{(-\infty, -b]} = r_{2-}^{-1}(u, \lambda) [r_{2-}(u, \lambda)]^{(-b, 0]},$$

$$\mathbf{E}e^{-u(\theta_k+\tau_{2k+1})} = (\varphi_1(u)\varphi_2(u))^k \varphi_1(u),$$

которые вместе с (6) приводят к равенству

$$(7) \quad \int_0^{\infty} e^{-ut} \mathbf{E}(e^{\lambda X(t)}; \theta_k + \tau_{2k+1} \leq t < \theta_{k+1}) dt \\ = e^{\lambda b} r_{2+}(u, \lambda) u^{-1} [r_{2-}(u, \lambda)]^{(-b, 0]} (\varphi_1(u)\varphi_2(u))^k \varphi_1(u).$$

Подставляя полученные выражения (5) и (7) в (4) и осуществляя суммирование, приходим к (3). Теорема доказана.

Перейдем к нахождению преобразования Лапласа — Стилтеса стационарного распределения процесса $X(t)$. Обозначим

$$F(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X(t) < x), \quad W(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{\lambda x} dF(x).$$

Еще раз отметим, что существование стационарного распределения F обеспечивается условием $\mathbf{E}\theta_1 = \mathbf{E}\tau_1 + \mathbf{E}\tau_2 < \infty$.

Известно, что $W(\lambda) = \lim_{u \rightarrow 0} u\Psi(u, \lambda)$. По этой причине остается домножить правую часть (3) на u и исследовать предельное поведение этого выражения при $u \rightarrow 0$.

Обозначим $\zeta = \sup_{t \geq 0} \xi_2(t)$. В [1] установлено, что

$$\lim_{u \rightarrow 0} r_{2+}(u, \lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\zeta}, \quad \text{если} \quad \int_1^{\infty} t^{-1} \mathbf{P}(\xi_2(t) > 0) dt < \infty.$$

Выполнение последнего условия в нашем случае обеспечивается условием $\mathbf{E}\xi_2(1) < 0$. Также имеет место

$$\lim_{u \rightarrow 0} r_{1-}(u, \lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\eta}, \quad \eta = \inf_{t \geq 0} \xi_1(t),$$

в силу условия $\mathbf{E}\xi_1(1) > 0$. Кроме того,

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{1 - \varphi_1(u)\varphi_2(u)} = \frac{1}{\mathbf{E}(\tau_1 + \tau_2)}, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \varphi_1(u) = 1.$$

В итоге приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Для преобразования Лапласа — Стилтеса стационарного распределения процесса $X(t)$ справедливо следующее представление:

$$(8) \quad W(\lambda) = \frac{1}{a} \mathbf{E}e^{\lambda\eta} \lim_{u \rightarrow 0} [u^{-1} r_{1+}(u, \lambda)]^{[0, b)} + \frac{e^{\lambda b}}{a} \mathbf{E}e^{\lambda\zeta} \lim_{u \rightarrow 0} [u^{-1} r_{2-}(u, \lambda)]^{(-b, 0]},$$

где $a = \mathbf{E}(\tau_1 + \tau_2)$, $u > 0$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$.

Заметим, что присутствие множителя u^{-1} внутри квадратных скобок в формуле (8) связано с тем фактом, что

$$\lim_{u \rightarrow 0} r_{2-}(u, \lambda) = \lim_{u \rightarrow 0} r_{1+}(u, \lambda) = 0$$

(см. [1]).

Таким образом, стационарное распределение случайного процесса $X(t)$ складывается из свёртки распределения случайной величины η с функцией G_1 , преобразование Лапласа — Стилтеса которой равно

$$\int_{[0, b)} e^{\lambda x} dG_1(x) = \frac{1}{a} \lim_{u \rightarrow 0} [u^{-1} r_{1+}(u, \lambda)]^{[0, b)},$$

и свертки распределения ζ с функцией G_2 , преобразование Лапласа — Стилтеса которой равно

$$\int_{(0, b]} e^{\lambda x} dG_2(x) = \frac{e^{\lambda b}}{a} \lim_{u \rightarrow 0} [u^{-1} r_{2-}(u, \lambda)]^{(-b, 0]}.$$

Асимптотическое поведение функций $\mathbf{P}(\zeta \geq x)$ и $\mathbf{P}(\eta \leq -x)$ при $x \rightarrow \infty$ хорошо известно (см., напр., [2], [3]). В общем случае явные выражения для указанных распределений неизвестны.

Далее рассмотрим одну простую ситуацию, когда функции G_1 и G_2 легко вычисляются в явном виде. Пусть

$$\begin{aligned}\psi_1(\lambda) &= a_1\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\lambda x} - 1)dS_1(x), & -\int_{-1}^0 x dS_1(x) < \infty, & \quad a_1 < 0, \\ \psi_2(\lambda) &= a_2\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\lambda x} - 1)dS_2(x), & \int_0^1 x dS_2(x) < \infty, & \quad a_2 > 0,\end{aligned}$$

и пусть $dS_1(x) = k_1 e^{-\alpha x} dx$ при $x > 0$, $dS_2(x) = k_2 e^{\beta x} dx$ при $x < 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Это означает, что положительные скачки процесса $\xi_1(t)$ распределены показательно с параметром α , а отрицательные скачки процесса $\xi_2(t)$ распределены показательно с параметром β . В этих условиях

$$\begin{aligned}\psi_1(\lambda) &= a_1\lambda + \int_{-\infty}^0 (e^{\lambda x} - 1)dS_1(x) - \frac{k_1\lambda}{\alpha(\lambda - \alpha)}, \\ \psi_2(\lambda) &= a_2\lambda + \int_0^{\infty} (e^{\lambda x} - 1)dS_2(x) - \frac{k_2\lambda}{\beta(\lambda + \beta)},\end{aligned}$$

и функции

$$\psi_{1-}(\lambda) := a_1\lambda + \int_{-\infty}^0 (e^{\lambda x} - 1)dS_1(x) \quad \left(\psi_{2+}(\lambda) := a_2\lambda + \int_0^{\infty} (e^{\lambda x} - 1)dS_2(x) \right)$$

соответствуют убывающему (возрастающему) процессу. Уравнение $u - \psi_{2+}(\lambda) = 0$ не имеет решений в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$, так как

$$\operatorname{Re}(u - \psi_{2+}(\lambda)) = \operatorname{Re} u - a_2 x_1 - \int_0^{\infty} (e^{x_1 x} \cos y_1 - 1)dS_2(x) > 0, \quad \lambda = x_1 + iy_1.$$

Заметим также, что

$$\frac{u - \psi_2(\lambda)}{u - \psi_{2+}(\lambda)} = 1 + \frac{k_2\lambda}{\beta(\lambda + \beta)(u - \psi_{2+}(\lambda))} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow -\infty$$

в силу сходимости $\psi_2(\lambda) \rightarrow -\infty$ при $\lambda \rightarrow -\infty$. Кроме того, при $\operatorname{Re} \lambda = 0$, $\operatorname{Re} u > 0$, выполняется $\operatorname{Re}(u - \psi_2(\lambda)) > 0$, $\operatorname{Re}(u - \psi_{2+}(\lambda))^{-1} \geq 0$.

Из свойств функции $u - \psi_2(\lambda)$ следует, что она не получает приращения аргумента при прохождении переменной λ вдоль прямоугольного контура с вершинами в точках $(0, -iT)$, $(0, iT)$, $(-iT, iT)$, $(-iT, -iT)$ при достаточно больших T . Поскольку эта функция имеет единственный полюс при $\operatorname{Re} \lambda < 0$ в точке $\lambda = -\beta$, в силу принципа аргумента уравнение $u - \psi_2(\lambda) = 0$ имеет единственное решение $\lambda_-(u)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Принимая во внимание, что $\mathbf{E}\xi_2(1) = m_2 < 0$, функция $\psi_2(\lambda)$ выпукла на $(-\beta, 0)$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\beta+0} \psi_2(\lambda) = \infty, \quad \psi_2(0) = 0,$$

приходим к выводу, что $\lambda_-(u) \rightarrow 0$ и $\lambda_-(u) = u/m_2 + o(u)$ при $u \rightarrow 0$. Ясно (см. [1]), что если $u = 0$, то $r_{2-}(0, \lambda)$ обращается в единицу при $\lambda = 0$ в тех случаях, когда $\mathbf{P}(\eta < \infty) = 1$.

Таким образом, мы выполним все требования к компонентам факторизации, положив

$$r_{2-}(u, \lambda) = \frac{(\beta + \lambda)\lambda_-(u)}{\beta(\lambda_-(u) - \lambda)}, \quad r_{2+}(u, \lambda) = \frac{\beta r_2(u, \lambda)(\lambda_-(u) - \lambda)}{\lambda_-(u)(\beta + \lambda)}.$$

Совершенно аналогично находим

$$r_{1+}(u, \lambda) = \frac{\lambda_+(u)(\alpha - \lambda)}{\alpha(\lambda_+(u) - \lambda)}, \quad r_{1-}(u, \lambda) = \frac{\alpha r_1(u, \lambda)(\lambda_+(u) - \lambda)}{\lambda_+(u)(\alpha - \lambda)},$$

где $\lambda_+(u)$ — единственное решение уравнения $u - \psi_1(\lambda) = 0$ в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $u > 0$, $\lambda_+(u) = u/m_1 + o(u)$ при $u \rightarrow 0$. Далее, как и в [4],

$$\begin{aligned} [r_{1+}(u, \lambda)]^{[0, b]} &= \frac{\lambda_+(u)}{\alpha} \left[\frac{\lambda - \alpha}{\lambda - \lambda_+(u)} \right]^{[0, b]} \\ &= \frac{\lambda_+(u)}{\alpha} \left(\frac{\lambda - \alpha}{\lambda - \lambda_+(u)} - \frac{\lambda_+(u) - \alpha}{\lambda - \lambda_+(u)} e^{(\lambda - \lambda_+(u))b} \right), \\ \lim_{u \rightarrow 0} [u^{-1} r_{1+}(u, \lambda)]^{[0, b]} &= \frac{1}{\alpha m_1} \left(\frac{\lambda - \alpha}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda} e^{\lambda b} \right) = \frac{1}{\alpha m_1} \left(1 + \alpha \int_{[0, b]} e^{\lambda y} dy \right). \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\lim_{u \rightarrow 0} e^{\lambda b} [u^{-1} r_{2-}(u, \lambda)]^{(-b, 0]} = \frac{1}{\beta |m_2|} \left(e^{\lambda b} + \beta \int_{(0, b]} e^{\lambda y} dy \right).$$

В этом примере величина перескока $\xi_1(\tau_1) - b$ имеет показательное распределение с параметром α , поэтому $\mathbf{E}\xi_1(\tau_1) = b + 1/\alpha$. Аналогично $\mathbf{E}\xi_2(\tau_2) = -b - 1/\beta$. В соответствии с тождеством Вальда

$$\mathbf{E}\xi_1(\tau_1) = m_1 \mathbf{E}\tau_1, \quad \mathbf{E}\xi_2(\tau_2) = m_2 \mathbf{E}\tau_2,$$

откуда находим

$$a = \mathbf{E}\tau_1 + \mathbf{E}\tau_2 = \frac{b + 1/\alpha}{m_1} + \frac{b + 1/\beta}{|m_2|}.$$

Аналогичным образом можно найти в явном виде $\mathbf{E}e^{\lambda \zeta}$ ($\mathbf{E}e^{\lambda \eta}$), если отрицательные (положительные) скачки процесса $\xi_1(t)$ ($\xi_2(t)$) распределены показательно. Описанным в [4] способом можно найти в явном виде представление для функции G_1 (G_2) в случае, когда $\int_0^\infty (e^{\lambda x} - 1) dS_1(x)$ ($\int_{-\infty}^0 (e^{\lambda x} - 1) dS_2(x)$) является рациональной функцией. Последнее имеет место, например, если положительные (отрицательные) скачки процесса распределены как сумма конечного числа независимых показательно распределенных случайных величин. Таким образом, двойное преобразование $\Psi(u, \lambda)$ и, следовательно, преобразование Лапласа — Стильеса $W(\lambda)$ стационарного распределения процесса $X(t)$ можно найти в явном виде, если функции $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$ являются рациональными. Однако в этих случаях вычисления становятся весьма громоздкими.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Здесь будем предполагать, что для функций $\psi_i(\lambda) = \ln \mathbf{E} e^{\lambda \xi_i(1)}$, $i = 1, 2$, имеют место представления

$$(9) \quad \psi_i(\lambda) = \alpha_i \lambda + \frac{\sigma_i^2 \lambda^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x) dS_i(x),$$

в которых α_i, σ_i — некоторые вещественные числа,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dS_i(x) < \infty, \quad S_i(-\infty) = S_i(\infty) = 0.$$

Отметим, что для выполнения представлений (9) достаточно предположить конечность $\mathbf{E} \xi_i^2(1)$.

Далее будут использоваться разные полезные свойства функций $\psi_i(\lambda)$ и компонент безгранично делимой факторизаций функций $r_i(u, \lambda)$, ($i = 1, 2$) (например, аналитичность, равномерная ограниченность в рассматриваемых областях значений переменных u и λ), изученные в работе [3], и которые имеют место при некоторых дополнительных ограничениях на распределения $\xi_i(1)$. Приведем эти условия.

$$(10) \quad \mathbf{E} e^{\lambda \xi_1(1)} < \infty \quad \text{при } 0 \leq \lambda \leq \lambda_1, \quad \lambda_1 > 0, \quad \limsup_{\substack{|\lambda| \rightarrow \infty \\ 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \lambda_1}} \frac{|\mathbf{E} \exp\{\lambda \xi_1(1)\}|}{\mathbf{E} \exp\{\operatorname{Re} \lambda \xi_1(1)\}} < 1,$$

$$(11) \quad \mathbf{E} e^{\lambda \xi_2(1)} < \infty \quad \text{при } \lambda_2 \leq \lambda \leq 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad \limsup_{\substack{|\lambda| \rightarrow \infty \\ \lambda_2 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq 0}} \frac{|\mathbf{E} \exp\{\lambda \xi_2(1)\}|}{\mathbf{E} \exp\{\operatorname{Re} \lambda \xi_2(1)\}} < 1.$$

Условия (10), (11) являются усилением свойства хребтовости соответственно функций $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda)$ (см. [3]). Они эквивалентны следующим: при достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|\operatorname{Im} \lambda| > \delta$

$$\psi_1(\operatorname{Re} \lambda) \geq \operatorname{Re} \psi_1(\lambda) + \varepsilon, \quad 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \lambda_1,$$

$$\psi_2(\operatorname{Re} \lambda) \geq \operatorname{Re} \psi_2(\lambda) + \varepsilon, \quad \lambda_2 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq 0.$$

Достаточными условиями, обеспечивающими выполнения условий (10), (11), будут, в частности, неравенства $\sigma_i^2 > 0$ или наличие абсолютно непрерывных компонент у $S_i(x)$, $i = 1, 2$.

Дополнительно предполагается выполненным условие

$$(12) \quad \text{Если } \sigma_i^2 = 0 \text{ то } \int_{-1}^1 |x| dS_i(x) < \infty \text{ и } \alpha_i - \int_{-\infty}^{\infty} x dS_i(x) \neq 0, \quad i = 1, 2,$$

то есть требуется существование у процессов $\xi_i(t)$ диффузионной компоненты или сноса. Для u , близких к нулю, $u \geq 0$, условие (10) ((11)) обеспечивают наличие единственного неотрицательного (неположительного) решения $\lambda_1(u)$ ($\lambda_2(u)$) уравнения $u - \psi_1(\lambda) = 0$ ($u - \psi_2(\lambda) = 0$). Здесь с необходимостью $r_{1+}^{-1}(u, \lambda_1(u)) = 0$ ($r_{2-}^{-1}(u, \lambda_2(u)) = 0$) и имеют место соотношения

$$\lambda_1(u) = \frac{u}{m_1} + o(u), \quad \lambda_2(u) = \frac{u}{m_2} + o(u), \quad u \rightarrow \infty.$$

Далее с помощью представления (3) и аналитических свойств компонент факторизации выделим главный член двойного преобразования над распределением случайного процесса $X(t)$ вблизи точки $u = 0$ с оценкой остаточного члена. Затем, устремив u к нулю, найдем асимптотическое представление для преобразования Лапласа — Стильтеса стационарного распределения. Следуя [6], обозначим

$$v_u(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_1(u))r_{1+}(u, \lambda)}{\lambda_1(u)}$$

Тогда из результатов работы [6] сразу следует, что при некоторых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$

$$\begin{aligned} [r_{1+}(u, \lambda)]^{[b, \infty)} &= \lambda_1(u) \left[\frac{v_u(\lambda)}{\lambda - \lambda_1(u)} \right]^{[b, \infty)} \\ &= \frac{\lambda_1(u)v_u(\lambda_1(u))e^{(\lambda - \lambda_1(u))b}}{\lambda_1(u) - \lambda} + \lambda_1(u) \int_b^\infty e^{\lambda x} dH_u^{(1)}(x), \end{aligned}$$

где при любом $x \geq 0$ равномерно по u , $0 < u < \delta$,

$$(13) \quad \int_{b+x}^\infty |dH_u^{(1)}(y)| = O(e^{-\varepsilon(b+x)}), \quad b \rightarrow \infty.$$

Принимая во внимание, что $r_{1+}^{-1}(u, \lambda_1(u)) = 0$, получаем

$$v_u(\lambda_1(u)) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1(u)} \frac{\lambda - \lambda_1(u)}{\lambda_1(u)r_{1+}^{-1}(u, \lambda)} = \frac{1}{\lambda_1(u)(r_{1+}^{-1})'(u, \lambda_1(u))},$$

где

$$(r_{1+}^{-1})'(u, \lambda_1(u)) = \left. \frac{\partial r_{1+}^{-1}(u, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_1(u)}.$$

Для удобства записи обозначим

$$h_1(u, \lambda) = \frac{1}{(\lambda_1(u) - \lambda)(r_{1+}^{-1})'(u, \lambda_1(u))}.$$

Таким образом, имеет место следующая

Лемма 1. Пусть выполнены условия (10) и (12). Тогда найдутся числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для $0 < u < \delta$ и $\operatorname{Re} \lambda = 0$ имеет место представление

$$(14) \quad [r_{1+}(u, \lambda)]^{[b, \infty)} = h_1(u, \lambda)e^{(\lambda - \lambda_1(u))b} + \lambda_1(u) \int_b^\infty e^{\lambda x} dH_u^{(1)}(x)$$

с равномерной оценкой (13).

Заметим, что последнее слагаемое в правой части (14) отсутствует, если положительные скачки процесса распределены показательно с параметром α . В этом случае имеет место

$$h_1(u, \lambda) = \frac{\lambda_1(u)(\lambda_1(u) - \alpha)}{\alpha(\lambda_1(u) - \lambda)}.$$

Аналогично, если обозначим

$$h_2(u, \lambda) = \frac{1}{(\lambda - \lambda_2(u))(r_{2-}^{-1})'(u, \lambda_2(u))},$$

приходим к утверждению следующей леммы.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (11) и (12). Тогда найдутся числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для $0 < u < \delta$ и $\operatorname{Re} \lambda = 0$ имеет место представление

$$(15) \quad [r_{2-}(u, \lambda)]^{(-\infty, b]} = h_2(u, \lambda) e^{(\lambda_2(u) - \lambda)b} + \lambda_2(u) \int_{-\infty}^{-b} e^{\lambda x} dH_u^{(2)}(x),$$

в котором при любом $x \geq 0$ равномерно по u , $0 < u < \delta$,

$$(16) \quad \int_{-\infty}^{-b-x} |dH_u^{(2)}(y)| = O(e^{-\varepsilon(b+x)}), \quad b \rightarrow \infty.$$

Таким образом, при выполнении условий леммы 1

$$\begin{aligned} r_{1-}(u, \lambda) u^{-1} [r_{1+}(u, \lambda)]^{[0, b)} &= u^{-1} (r_1(u, \lambda) - r_{1-}(u, \lambda) [r_{1+}(u, \lambda)]^{[b, \infty)}) \\ &= \frac{1 - r_{1+}^{-1}(u, \lambda) [r_{1+}(u, \lambda)]^{[b, \infty)}}{u - \psi_1(\lambda)} \\ &= \frac{1 - r_{1+}^{-1}(u, \lambda) \left(h_1(u, \lambda) e^{(\lambda - \lambda_1(u))b} + \lambda_1(u) \int_b^\infty e^{\lambda x} dH_u^{(1)}(x) \right)}{u - \psi_1(\lambda)}. \end{aligned}$$

Отметим, что в силу условий $m_1 > 0$, $\lambda_1(u) = \frac{u}{m_1} + o(u)$, $u \rightarrow 0$, выражение

$$\frac{\lambda_1(u)}{r_{1+}(u, \lambda)(u - \psi_1(\lambda))} = \frac{\lambda_1(u)}{u} r_{1-}(u, \lambda)$$

не обращается в нуль при $u \geq 0$ и $\operatorname{Re} \lambda = 0$, оно является преобразованием Лапласа — Стильеса функции с ограниченной равномерно по u полной вариацией, поэтому в представлении

$$\frac{\lambda_1(u) r_{1+}^{-1}(u, \lambda) \int_b^\infty e^{\lambda x} dH_u^{(1)}(x)}{u - \psi_1(\lambda)} = \frac{\lambda_1(u)}{u} r_{1-}(u, \lambda) \int_b^\infty e^{\lambda x} dH_u^{(1)}(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{\lambda x} dV_u(x)$$

имеет место

$$(17) \quad \int_{-\infty}^\infty |dV_u(x)| = O(e^{-\varepsilon b}), \quad b \rightarrow \infty$$

равномерно по u . Следовательно, в условиях леммы 1 имеем

$$r_{1-}(u, \lambda) u^{-1} [r_{1+}(u, \lambda)]^{[0, b)} = \frac{1 - r_{1+}^{-1}(u, \lambda) h_1(u, \lambda) e^{(\lambda - \lambda_1(u))b}}{u - \psi_1(\lambda)} + \int_{-\infty}^\infty e^{\lambda x} dV_u(x)$$

с оценкой (17). С учетом (15) и (16) аналогичным образом устанавливается, что в условиях леммы 2

$$r_{2+}(u, \lambda) u^{-1} [r_{2-}(u, \lambda)]^{(-b, 0]} = \frac{1 - r_{2-}^{-1}(u, \lambda) h_2(u, \lambda) e^{(\lambda_2(u) - \lambda)b}}{u - \psi_2(\lambda)} + \int_{-\infty}^\infty e^{\lambda x} dU_u(x),$$

где имеет место

$$(18) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |dU_u(x)| = O(e^{-\varepsilon b}), \quad b \rightarrow \infty$$

равномерно по u . Подставляя полученные асимптотические представления в формулу (3), приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (10), (11) и (12). Тогда найдутся числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для $0 < u < \delta$ и $\operatorname{Re} \lambda = 0$ имеет место представление

$$\begin{aligned} \Psi(u, \lambda) = & \frac{1}{1 - \varphi_1(u)\varphi_2(u)} \times \\ & \times \left\{ \frac{1 - r_{1+}^{-1}(u, \lambda)h_1(u, \lambda)e^{(\lambda - \lambda_1(u))b}}{u - \psi_1(\lambda)} + e^{\lambda b}\varphi_1(u) \frac{1 - r_{2-}^{-1}(u, \lambda)h_2(u, \lambda)e^{(\lambda_2(u) - \lambda)b}}{u - \psi_2(\lambda)} \right\} \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dV_u(x) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dU_u(x), \end{aligned}$$

в котором последние два слагаемых в правой части удовлетворяют оценкам (17) и (18).

В силу условия (10) при $0 < u < \delta$ функция $r_{1+}^{-1}(u, \lambda)$ аналитична в точке $\lambda_1(u)$, $r_{1+}^{-1}(u, \lambda(u)) = 0$, поэтому можно записать следующее разложение Тейлора в окрестности точки $\lambda_1(u)$:

$$r_{1+}^{-1}(u, \lambda) = (\lambda - \lambda_1(u))(r_{1+}^{-1})'(u, \lambda_1(u)) + \frac{(\lambda - \lambda_1(u))^2}{2}(r_{1+}^{-1})''(u, \lambda_1(u)) + \dots,$$

откуда следует

$$\begin{aligned} r_{1+}^{-1}(u, \lambda)h_1(u, \lambda) &= 1 + (\lambda_1(u) - \lambda) \frac{(r_{1+}^{-1})''(u, \lambda_1(u))}{2(r_{1+}^{-1})'(u, \lambda_1(u))} + \dots, \\ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - r_{1+}^{-1}(u, \lambda)h_1(u, \lambda)e^{(\lambda - \lambda_1(u))b}}{u - \psi_1(\lambda)} &= \frac{\lambda}{\psi_1(\lambda)} \left(\frac{e^{\lambda b} - 1}{\lambda} + e^{\lambda b} \frac{(r_{1+}^{-1})''(0, 0)}{2(r_{1+}^{-1})'(0, 0)} + \dots \right). \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} r_{2-}^{-1}(u, \lambda)h_2(u, \lambda) &= 1 + (\lambda - \lambda_2(u)) \frac{(r_{2-}^{-1})''(u, \lambda_2(u))}{2(r_{2-}^{-1})'(u, \lambda_2(u))} + \dots, \\ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - r_{2-}^{-1}(u, \lambda)h_2(u, \lambda)e^{(\lambda_2(u) - \lambda)b}}{u - \psi_2(\lambda)} &= \frac{\lambda}{\psi_2(\lambda)} \left(\frac{(r_{2-}^{-1})''(0, 0)}{2(r_{2-}^{-1})'(0, 0)} + \dots \right). \end{aligned}$$

В итоге получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (10), (11) и (12). Тогда при некотором $\varepsilon > 0$ и $\operatorname{Re} \lambda = 0$ имеет место представление

$$\begin{aligned} W(\lambda) = & \frac{\lambda}{a\psi_1(\lambda)} \left(\frac{e^{\lambda b} - 1}{\lambda} + e^{\lambda b} \left(\frac{(r_{1+}^{-1})''(0, 0)}{2(r_{1+}^{-1})'(0, 0)} + \lambda \frac{(r_{1+}^{-1})'''(0, 0)}{6(r_{1+}^{-1})'(0, 0)} + \dots \right) \right) \\ & + \frac{\lambda}{a\psi_2(\lambda)} \left(\frac{(r_{2-}^{-1})''(0, 0)}{2(r_{2-}^{-1})'(0, 0)} + \lambda \frac{(r_{2-}^{-1})'''(0, 0)}{6(r_{2-}^{-1})'(0, 0)} + \dots \right) + O(e^{-\varepsilon b}), \quad b \rightarrow \infty, \quad a = m_1 + m_2. \end{aligned}$$

4. ОБОБЩЁННЫЙ ПРОЦЕСС ВОССТАНОВЛЕНИЯ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

В предыдущем пункте, где установлено асимптотическое представление для стационарного распределения процесса, требуется существование у процессов $\xi_i(t)$, $i = 1, 2$, диффузионной компоненты или сноса (см. условие (12)). Тем самым из рассмотрения исключаются ступенчатые процессы. Поэтому здесь рассмотрим случай, когда процессы $\xi_i(t)$, $i = 1, 2$, являются обобщёнными процессами восстановления.

Пусть $\{\xi_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\eta_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty}$, $j = 1, 2$, — взаимно независимые последовательности независимых случайных величин, одинаково распределённых внутри каждой последовательности,

$$a_1 = \mathbf{E}\xi_1^{(1)} > 0, \quad a_2 = \mathbf{E}\xi_1^{(2)} < 0, \quad \mathbf{P}(\eta_1^{(j)} > 0) = 1, \quad j = 1, 2.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} S_0^{(j)} &= 0, \quad S_k^{(j)} = \xi_1^{(j)} + \xi_2^{(j)} + \dots + \xi_k^{(j)}, \\ \eta_j(t) &= \max\{k \geq 1 : \eta_1^{(j)} + \eta_2^{(j)} + \dots + \eta_k^{(j)} < t\}, \\ \xi_j(t) &= S_{\eta_j(t)}^{(j)}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Случайные процессы $\xi_j(t)$, $j = 1, 2$, называются обобщёнными процессами восстановления. Если случайные величины $\eta_1^{(j)}$ показательны распределены, то процессы $\xi_j(t)$ являют собой обобщённые пуассоновские процессы.

Далее введем случайный процесс $Y(t)$, у которого происходят переключения между процессами $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Происходят переключения по той же схеме, что и для рассмотренного ранее процесса $X(t)$. Вводятся сначала моменты достижения границ по формулам (1), затем определяется процесс $Y(t)$ по формуле (2) (с заменой $X(t)$ на $Y(t)$) сначала на интервале времени $0 \leq t \leq \tau_1 + \tau_2$, а затем точно так же и на последующих циклах регенерации. Последовательные моменты достижения нуля $\{\theta_k, k \geq 0\}$ выглядят следующим образом: $\theta_0 = 0$, $\theta_{k+1} = \theta_k + \tau_{2k+1} + \tau_{2k+2}$. Здесь случайные величины τ_{2k+1} распределены одинаково с τ_1 , случайные величины τ_{2k+2} распределены одинаково с τ_2 , и все они независимы.

Наша цель, как и выше, состоит в нахождении преобразований Лапласа — Стилтеса распределения обобщённого процесса восстановления $Y(t)$ и его стационарного распределения:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(u, \lambda) &= \int_0^{\infty} e^{-ut} \mathbf{E} e^{\lambda Y(t)} dt, \\ \bar{W}(\lambda) &= \int_0^{\infty} e^{\lambda x} dF(x), \quad F(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Y(t) < x). \end{aligned}$$

Искомые представления без труда выводятся из соответствующих результатов [4] для случайных блужданий с переключениями. По этой причине мы ограничимся кратким изложением.

Как и в доказательстве теоремы 1, используем представление

$$\bar{\Psi}(u, \lambda) = \int_0^\infty e^{-ut} \mathbf{E} e^{\lambda Y(t)} dt = \sum_{k=0}^\infty (I_k^{(1)} + I_k^{(2)}),$$

где при каждом $k \geq 0$

$$\begin{aligned} I_k^{(1)} &= \int_0^\infty e^{-ut} \mathbf{E}(e^{\lambda Y(t)}; \theta_k \leq t < \theta_k + \tau_{2k+1}) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-ut} \mathbf{E}(e^{\lambda \xi_1(t)}; 0 \leq t < \tau_1) dt \mathbf{E} e^{-u\theta_k}, \\ I_k^{(2)} &= \int_0^\infty e^{-ut} \mathbf{E}(e^{\lambda Y(t)}; \theta_k + \tau_{2k+1} \leq t < \theta_{k+1}) dt \\ &= e^{\lambda b} \int_0^\infty e^{-ut} \mathbf{E}(e^{\lambda \xi_2(t)}; 0 \leq t < \tau_2) dt \mathbf{E} e^{-u(\theta_k + \tau_1)}. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим регенерирующий случайный процесс с дискретным временем Y_n , введенный и изученный в [4]. Пусть для произвольного числа $b > 0$

$$N_1 = \min\{n \geq 1 : S_n^{(1)} \geq b\}, \quad N_2 = \min\{n \geq 1 : S_n^{(2)} \leq -b\}.$$

На промежутке времени $0 \leq n \leq T_1 := N_1 + N_2$ случайное блуждание $\{Y_n\}$ определяется следующим образом:

$$Y_n = \begin{cases} \min\{S_n^{(1)}, b\}, & 0 \leq n \leq N_1, \\ \max\{b + S_{n-N_1}^{(2)}, 0\}, & N_1 < n \leq N_1 + N_2. \end{cases}$$

При $n > T_1$ траектория эволюционирует по той же схеме, более подробно см. [4]. Тем самым определен регенерирующий процесс с дискретным временем, с моментами регенерации $T_1, T_1 + T_2, \dots$, где целочисленные случайные величины $T_1, T_2, \dots$ независимы и одинаково распределены. Вероятностные характеристики случайного блуждания между моментами регенерации являются одинаковыми, $\mathbf{E}T_1 = \mathbf{E}N_1 + \mathbf{E}N_2 < \infty$.

Обозначим

$$\varphi_j(\lambda) = \mathbf{E} e^{\lambda \xi_1^{(j)}}, \quad f_j(u) = \mathbf{E} e^{-u \eta_1^{(j)}}, \quad j = 1, 2.$$

Воспользовавшись формулой полной вероятности, легко проверить, что при $u > 0$ и $\operatorname{Re} \lambda = 0$

$$(19) \quad \int_0^\infty e^{-ut} (\mathbf{E} e^{\lambda \xi_1(t)}; 0 \leq t < \tau_1) dt = \frac{1 - f_1(u)}{u} \sum_{n=0}^\infty f_1^n(u) \mathbf{E}(e^{\lambda S_n^{(1)}}; 0 \leq n < N_1),$$

$$(20) \quad \int_0^\infty e^{-ut} (\mathbf{E} e^{\lambda \xi_2(t)}; 0 \leq t < \tau_2) dt = \frac{1 - f_2(u)}{u} \sum_{n=0}^\infty f_2^n(u) \mathbf{E}(e^{\lambda S_n^{(2)}}; 0 \leq n < N_2),$$

$$(21) \quad \mathbf{E} e^{-u\theta_k} = (\mathbf{E}(f_1(u))^{N_1})^k (\mathbf{E}(f_2(u))^{N_2})^k, \quad k \geq 0,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ut} \mathbf{E} e^{\lambda \xi_j(t)} dt = \frac{1 - f_j(u)}{u} \frac{1}{1 - f_j(u) \varphi_j(\lambda)}.$$

Далее будем использовать факторизацию

$$1 - z \varphi_j(\lambda) = R_-^{(j)}(z, \lambda) R_+^{(j)}(z, \lambda), \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Re} \lambda = 0,$$

введенную в [4]. Отметим, что при отображении $z = f_j(u)$ множество $\{u : u > 0\}$ переходит в множество $\{z : 0 < z < 1\}$, а при малых $\delta > 0$ множество $\{u : 0 < u < \delta\}$ переходит внутрь множества $\{z : 1 - \gamma < z < 1\}$ при некотором $\gamma > 0$. Поэтому при $u > 0$ имеет место факторизация

$$1 - f_j(u) \varphi_j(\lambda) = R_-^{(j)}(f_j(u), \lambda) R_+^{(j)}(f_j(u), \lambda)$$

со всеми известными свойствами компонент. Из (19)–(21) и результатов [4] сразу получаем следующие соотношения (заменяя z в [4] на $f_j(u)$): при $k = 0, 1, \dots$

$$I_k^{(1)} = \frac{1 - f_1(u)}{u} (\mathbf{E}(f_1(u))^{N_1})^k (\mathbf{E}(f_2(u))^{N_2})^k \frac{[(R_+^{(1)})^{-1}(f_1(u), \lambda)]^{[0, b]}}{R_-^{(1)}(f_1(u), \lambda)},$$

$$I_k^{(2)} = \frac{1 - f_2(u)}{u} (\mathbf{E}(f_2(u))^{N_1})^{k+1} (\mathbf{E}(f_2(u))^{N_2})^k e^{\lambda b} \frac{[(R_-^{(2)})^{-1}(f_2(u), \lambda)]^{(-b, 0]}}{R_+^{(2)}(f_2(u), \lambda)}.$$

Суммируя по k эти выражения, получим представление для $\bar{\Psi}(u, \lambda)$. Учитывая, что

$$\lim_{u \rightarrow 0} \mathbf{E}(f_j(u))^{N_1} = 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - f_j(u)}{u} = \mathbf{E} \eta_1^{(j)},$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{1 - \mathbf{E}(f_1(u))^{N_1} \mathbf{E}(f_2(u))^{N_2}} = \frac{1}{\mathbf{E} \eta_1^{(1)} \mathbf{E} N_1 + \mathbf{E} \eta_1^{(2)} \mathbf{E} N_2} \equiv \frac{1}{\bar{a}},$$

получаем

$$\bar{W}(\lambda) = \frac{\mathbf{E} \eta_1^{(1)}}{\bar{a}} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{[(R_+^{(1)})^{-1}(f_1(u), \lambda)]^{[0, b]}}{R_-^{(1)}(f_1(u), \lambda)} + \frac{\mathbf{E} \eta_1^{(2)}}{\bar{a}} e^{\lambda b} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{[(R_-^{(1)})^{-1}(f_2(u), \lambda)]^{(-b, 0]}}{R_+^{(2)}(f_2(u), \lambda)}.$$

Обозначим, как и в [4],

$$S_1 = \inf_{k \geq 0} S_k^{(1)}, \quad p_1 := \mathbf{P}(S_1 < 0) < 1,$$

$$S_2 = \sup_{k \geq 0} S_k^{(2)}, \quad p_2 := \mathbf{P}(S_2 > 0) < 1,$$

Тогда (см. [5])

$$(R_+^{(2)})^{-1}(1, \lambda) = \frac{\mathbf{E} e^{\lambda S_2}}{1 - p_2}, \quad (R_-^{(1)})^{-1}(1, \lambda) = \frac{\mathbf{E} e^{\lambda S_1}}{1 - p_1}.$$

Тем самым приходим к следующему утверждению.

Теорема 5. Для преобразования Лапласа – Стильтеса стационарного распределения процесса $Y(t)$ справедливо следующее представление:

$$\bar{W}(\lambda) = \frac{\mathbf{E} \eta_1^{(1)} \mathbf{E} e^{\lambda S_1}}{\bar{a}(1 - p_1)} \lim_{u \rightarrow 0} [(R_+^{(1)})^{-1}(f_1(u), \lambda)]^{[0, b]}$$

$$+ \frac{\mathbf{E} \eta_1^{(2)} \mathbf{E} e^{\lambda S_2}}{\bar{a}(1 - p_2)} e^{\lambda b} \lim_{u \rightarrow 0} [(R_-^{(2)})^{-1}(f_2(u), \lambda)]^{(-b, 0]}, \quad \operatorname{Re} \lambda = 0.$$

Дальнейший асимптотический анализ этих выражений при $b \rightarrow \infty$ может быть проведен точно так же, как и в работе [4], с соответствующими условиями на распределения случайных величин $\xi_1^{(j)}$ (см. условия C_- , C_+ в [4]). При этом вид асимптотического представления для $\bar{W}(\lambda)$ будет таким же, как и в Теореме 2 в [4] (см. формулу (13) там), с той лишь разницей, что множитель $1/a$ в первом слагаемом заменяется на $\mathbf{E}\eta_1^{(1)}/\bar{a}$, а во втором слагаемом на $\mathbf{E}\eta_1^{(2)}/\bar{a}$, где $\bar{a} = \mathbf{E}\eta_1^{(1)}\mathbf{E}N_1 + \mathbf{E}\eta_1^{(2)}\mathbf{E}N_2$.

REFERENCES

- [1] B.A. Rogozin, *On the distributions of some functional related to boundary problems for processes with independent increments*, Theory Probab. Appl., **11** (1966), 580—591. MR0208682
- [2] B.A. Rogozin, *On the local behavior of processes with independent increments*, Theory Probab. Appl., **13** (1968), 482—486. MR0242261
- [3] B.A. Rogozin, *Distribution of the maximum of a process with independent increments*, Siberian Math. Journal, **10** (1969), 989—1010. MR0261662
- [4] V.I. Lotov, *On a random walk with switchings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 1320—1331. MR3873778
- [5] A.A. Borovkov, *Probability Theory*, London: Springer-Verlag, 2013. Zbl 1297.60002
- [6] V.I. Lotov, V.R. Khodjibayev, *On limit theorems for the first exit time from a strip for stochastic processes. II*, Siberian Adv. Math., **8:4** (1998), 41—59. Zbl 0920.60060

VLADIMIR IVANOVICH LOTOV
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 4, KOPTYUGA AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA,
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 1, PIROGOVA STR.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: lotov@math.nsc.ru

VALI RAXIMDJANOVICH XODJIBAYEV
 NAMANGAN ENGINEERING - CONSTRUCTION INSTITUTE,
 12, ISLAM KARIMOV STR.,
 NAMANGAN, 160103, UZBEKISTAN
E-mail address: vkhodjibayev@mail.ru