Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. A. Makhnev, Automorphisms of distance-regular graph with intersection array $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1547–1552

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.105>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.198.55.26

April 26, 2023, 13:27:05

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1547–1552 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.105

УДК 519.17

MSC 05C25

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$

A.A. MAXNEV

ABSTRACT. Koolen and Park classified Shilla graphs with $b = 2$ and with $b = 3$. Prime divisors of orders of automorphisms and the fixed point subgraphs of automorphisms of prime orders are studied for a hypothetical distance-regular graph Γ with intersection array $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$. Let $G = \text{Aut}(\Gamma)$ is nonsolvable group, $\bar{G} = G/S(G)$ and $\bar{T}$ is the socle of $\bar{G}$. Then G contains now elements of order 35 and $\bar{T} \cong J_2, A_{10}$ or $\Omega_8^+(2)$. In particular graph Γ is not vertex symmetric.

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\text{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ , неподвижных относительно любого автоморфизма из X . Далее, через $p_{ij}^l(x, y)$ обозначим число

МАХНЕВ, А.А., AUTOMORPHISMS OF DISTANCE-REGULAR GRAPH WITH INTERSECTION ARRAY $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$.

© 2019 МАХНЕВ А.А.

Поступила 17 сентября 2019 г., опубликована 24 октября 2019 г.

вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y , находящихся на расстоянии l в графе Γ . В дистанционно регулярном графе числа $p_{ij}^l(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y , обозначаются p_{ij}^l и называются числами пересечения графа Γ .

Граф называется вершинно симметричным, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве вершин.

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий второе собственное значение, равное $a = a_3$. В этом случае a делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Далее, $a_1 = a - b$ и Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$. В [1] классифицированы графы Шилла с $b = 2$ и $b = 3$.

Предложение 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф Шилла с $b = 2$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{4, 3, 3; 1, 1, 2\}$, $\{6, 4, 2; 1, 2, 3\}$, $\{6, 4, 4; 1, 1, 3\}$, $\{10, 6, 4; 1, 2, 5\}$, $\{18, 10, 4; 1, 4, 9\}$.

Для каждого из массивов в заключении предложения 1 существует единственный дистанционно регулярный граф — это нечетный граф на 7 точках, граф Хэмминга $H(3, 3)$, обобщенный шестиугольник порядка $(2, 2)$, локально петпреновский граф Тервиллигера и граф Джонсона $J(9, 3)$ соответственно.

Предложение 2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф Шилла с $b = 3$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{12, 10, 5; 1, 1, 8\}$, $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$, $\{12, 10, 3; 1, 3, 8\}$, $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$, $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$, $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$, $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$, $\{60, 42, 18; 1, 6, 40\}$, $\{69, 48, 24; 1, 4, 46\}$, $\{93, 64, 24; 1, 6, 62\}$, $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$.

Известно существование графа с массивом пересечений $\{12, 10, 5; 1, 1, 8\}$ (это унитарный неизотропный граф с $q = 4$), но неизвестна единственность. Существует единственный граф с массивом пересечений $\{12, 10, 3; 1, 3, 8\}$ (это граф Доро). В работах [2-5] доказано, что графы с массивами пересечений $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$, $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$, $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$, $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ не существуют. В [6] найдены возможные автоморфизмы графа Шилла с массивом пересечений $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$.

В работе найдены автоморфизмы графа Шилла Γ с массивом пересечений $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$. Этот граф имеет спектр $24^1, 8^{175}, -1^{224}, -4^{300}$ и $v = 1 + 24 + 432 + 243 = 700$ вершин. Кроме того, массивы $\{6, 4, 4; 1, 1, 3\}$ и $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$ являются двумя первыми членами в бесконечной серии допустимых массивов графов Шилла $\{b(b^2 - 1), b^2(b - 1), b^2; 1, 1, (b^2 - 1)(b - 1)\}$, найденной И.Н. Белоусовым в [7]. Клика порядка 7 в Γ является кликой Дельсарта ($7 = 1 + 24/4$) и окрестность любой вершины в Γ является объединением четырех 6-клик.

Теорема. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф Шилла с массивом пересечений $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ и верно одно из утверждений:

- (1) Ω является пустым графом, либо $p = 7$, $\alpha_3(g) = 63(3l + 1)$, $\alpha_1(g) = 84s + 7(3l + 1)$, либо $p = 5$, $\alpha_3(g) = 45(3s + 8)$, $\alpha_1(g) = 5(3s + 8) - 60t$, либо $p = 2$, $\alpha_2(g) = 0$, $\alpha_3(g) = 18s$, $s - 2$ делится на 3, $\alpha_1(g) = 2s + 24t + 12$, $5s + 6t = 172$;
- (2) Ω является n -кликкой, $p = 3$, либо $n = 1$, $\alpha_3(g) = 27(3s + 2)$, $\alpha_1(g) = 15 + 9s + 36t \in \{6, 24\}$, либо $n > 1$, $\alpha_3(g) = 9(-n + 9s + 7)$, $\alpha_1(g) = -4n + 9s + 36t + 19$;

- (3) Ω состоит из 28 вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ , $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 24s$;
 (4) Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик, $p = 2$ и порядки максимальных клик в Ω равны 1, 3, 5 или 7;
 (5) Ω содержит геодезический 2-путь и $p \leq 3$.

Следствие. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$ не является вершинно симметричным.

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [8]. При этом граф Γ диаметра d рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \geq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X , в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p_{ij}^l . Тогда собственные значения $p_1(0), \dots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \dots, m_d$. Матрицы P и Q , у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенствами $PQ = QP = |X|I$.

Подстановочное представление группы $G = \text{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом даёт матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbb{C})$. Пространство $\mathbb{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, \dots, W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ . Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A , поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$ -инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i} . Тогда (см. § 3.7 [8]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^d Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

В леммах 1–5 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$. Зафиксируем вершину $a \in \Gamma$. Так как $a_1 = 5, c_2 = 1$, то $[a]$ является объединением четырех изолированных 6-клик.

Лемма 1. Для ненулевых чисел пересечений графа Γ верны равенства

- (1) $p_{11}^1 = 5, p_{12}^1 = 18, p_{22}^1 = 252, p_{23}^1 = 162, p_{33}^1 = 81$;
- (2) $p_{11}^2 = 1, p_{12}^2 = 14, p_{13}^2 = 9, p_{22}^2 = 264, p_{23}^2 = 153, p_{33}^2 = 81$;
- (3) $p_{12}^3 = 16, p_{13}^3 = 8, p_{22}^3 = 272, p_{23}^3 = 144, p_{33}^3 = 90$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Лемма 2. Пусть χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 175, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 224. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l , взаимно простого с $|g|$, $\chi_1(g) = (27\alpha_0(g) + 9\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/108$,

$\chi_2(g) = (9\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/27 - 28/3$ и числа $\chi_1(g) - 175$, $\chi_2(g) - 224$ делятся на p .

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 175 & 175/3 & 0 & -175/27 \\ 224 & -28/3 & -28/3 & 448/27 \\ 300 & -50 & 25/3 & -100/9 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = (27\alpha_0(g) + 9\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/108$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (216\alpha_0(g) - 9\alpha_1(g) - 9\alpha_2(g) + 16\alpha_3(g))/(25 \cdot 27)$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 700 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (9\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/27 - 28/3$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 2 [9]. $\square$

Лемма 3. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) *если Ω является пустым графом, то $\alpha_1(g) = 84s + 7(3l + 1)$, либо $p = 5$, $\alpha_3(g) = 45(3s + 8)$, $\alpha_1(g) = 5(3s + 8) - 60t$, либо $p = 2$, $\alpha_2(g) = 0$, $\alpha_3(g) = 18s$, $s - 2$ делится на 3, $\alpha_1(g) = 2s + 24t + 12$, $5s + 6t = 172$;*
- (2) *если Ω является n -кликкой, то $p = 3$, либо $n = 1$, $\alpha_3(g) = 27(3s + 2)$, $\alpha_1(g) = 15 + 9s + 36t \in \{6, 24\}$, либо $n > 1$, $\alpha_3(g) = 9(-n + 9s + 7)$, $\alpha_1(g) = -4n + 9s + 36t + 19$;*
- (3) *если Ω является m -кокликкой, $m > 1$, то Ω состоит из вершин попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ , $p = 2$, $m = 28$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 24s$;*
- (4) *если Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик, то $p = 2$ и порядки максимальных клик в Ω равны 1, 3, 5 или 7.*

Доказательство. Пусть Ω является пустым графом. Тогда $p \in \{2, 5, 7\}$.

В случае $p = 7$ имеем $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/27 - 28/3$, $\alpha_3(g) = 63(3l + 1)$. Далее, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 7(3l + 1))/12$, $\alpha_1(g) = 84s + 7(3l + 1)$.

В случае $p = 5$ число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/27 - 28/3$ сравнимо с 4 по модулю 5, $\alpha_3(g) = 45(3s + 8)$. Далее, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 5(3s + 8))/12$, $\alpha_1(g) = 5(3s + 8) - 60t$.

В случае $p = 2$ имеем $\alpha_2(g) = 0$, число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/27 - 28/3$ четно, $\alpha_3(g) = 18s$, $s - 2$ делится на 3. Далее, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 2s)/12$ нечетно, $\alpha_1(g) = 2s + 24t + 12$, $5s + 6t = 172$.

Пусть Ω является n -кликкой. Имеем $k_3 = 243$, поэтому p делит 243 и $p = 3$. Если $n = 1$, то число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/27 - 9$ сравнимо с 2 по модулю 3, $\alpha_3(g) = 27(3s + 2)$. Далее, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 3 - 9s)/12$ сравнимо с 1 по модулю 3, $\alpha_1(g) = 15 + 9s + 36t$. С другой стороны, $\alpha_1(g) \in \{6, 24\}$, поэтому s нечетно и либо $s = 1, t = 0$, либо $s = 3, t = -1$, либо $s = 5, t = -1$, либо $s = 7, t = -2$, либо $s = 9, t = -2$.

Если $n > 1$, то 3 делит $7 - n$ и n сравнимо с 1 по модулю 3. Далее, число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/27 + (n - 28)/3$ сравнимо с 2 по модулю 3, $\alpha_3(g) = 9l$, $l = -n + 9s + 7$. Аналогично, число $\chi_1(g) = (4n + \alpha_1(g) - (9s + 7))/12$ сравнимо с 1 по модулю 3, $\alpha_1(g) = -4n + (9s + 7) + 12(3t + 1) = -4n + 9s + 36t + 19$.

Пусть Ω является m -кокликкой, $m > 1$. Так как $p_{12}^2 = 14$, $p_{13}^2 = 9$, то Ω состоит из вершин попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ . С учетом равенства $p_{12}^3 = 16$ имеем $p = 2$. Отсюда $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 24m$, $\alpha_3(g) = 700 - 25m$. С другой стороны, число $\chi_2(g) = 4(175 - 4m)/27 - 28/3$ четно, $m = 28 - 54l = 28$ и $\alpha_3(g) = 0$. Далее, число $\chi_1(g) = \alpha_1(g)/12 + 7$ нечетно и $\alpha_1(g) = 24s$.

Пусть Ω содержит ребро $\{a, b\}$ и является объединением изолированных клик. Тогда вершины из разных клик графа Ω находятся на расстоянии 3 в Γ . Далее, g действует без неподвижных точек на $[a] - b^{bot}$ и p делит 18. Если порядок некоторой максимальной клики из Ω равен m , то либо $p = 3, m \in \{1, 4, 7\}$, либо $p = 2, m \in \{1, 3, 5, 7\}$. Так как степень вершины в графе $\Gamma_3(a)$ равна 8, то $p = 2$. $\square$

Лемма 4. Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c , Δ — связная компонента графа Ω , содержащая вершину a . Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) $p \leq 3$;
- (2) если $[a] \subset \Omega$, то $a^\perp = \Omega$, $p = 3$, $\alpha_3(g) = 81s$, $s \leq 3$ нечетно, $\alpha_1(g) = 9s - 63 + 36t$ делится на 18.

Доказательство. Если $p \geq 7$, то $[a] \subset \Omega$ и g фиксирует каждую вершину из Γ , противоречие.

Допустим, что $[a] \subset \Omega$. Если $a^\perp = \Omega$, то p делит 243 и 675, $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/27 - 1$, $\chi_2(g) - 224$ делится на p . Отсюда $p = 3$, $\alpha_3(g) = 81s$, $s \leq 3$. Далее, число нечетно $\chi_1(g) = (75 + \alpha_1(g) - 9s)/12$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\alpha_1(g) = 9s - 63 + 36t$. С другой стороны, для вершины $b \in [a]$ элемент g либо переставляет максимальные клики из $[b] \cap \Gamma_2(a)$, либо фиксирует каждую такую клику. Отсюда $\alpha_1(g)$ делится на 18 и число s нечетно.

Пусть $a^\perp \neq \Omega$. Если $e \in \Omega \cap \Gamma_2(a)$, $b \in [a] \cap [e]$, то любая вершина $w \in [e] \cap \Gamma_2(a) - \Omega$ попадает в $[b] \cap [e]$ и $|[e] \cap \Gamma_2(a) - \Omega| \leq 4$, противоречие. Значит, Ω не пересекает $\Gamma_2(a)$. Теперь для вершин $z \in \Omega \cap \Gamma_3(a)$, $b \in [a] \cap \Gamma_2(z)$ единственная вершина из $[b] \cap [z]$ попадает в Ω , противоречие. Утверждение (2) доказано.

Пусть $p = 5$. Тогда элемент g фиксирует каждую максимальную клику из $[e]$ для любой вершины $e \in \Omega$. Если Ω — несвязный граф, то степень a в графе Δ равна 3 или 8, противоречие. Для вершины $e \in \Omega \cap \Gamma_3(a)$ с учетом равенства $p_{23}^3 = 144$ подграф $\Gamma_3(a) \cap \Gamma_2(e)$ содержит не менее 4 вершин из Ω , противоречие.

Лемма и теорема доказаны. $\square$

Докажем следствие. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{24, 18, 9, 1, 1, 16\}$ и неразрешимая группа $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве его вершин. Ввиду теоремы имеем $|G| = 2^\beta \cdot 3^\gamma \cdot 5^2 \cdot 7$ и для вершины a графа Γ имеем $|G : G_a| = 700$.

Лемма 5. Пусть $\bar{T}$ — цокль группы $G/S(G)$. Тогда G не содержит элементов порядка 35, группа $\bar{T}$ изоморфна J_2 , A_{10} или $\Omega_8^+(2)$.

Доказательство. Если G содержит элемент f порядка 35, $g = f^5$, $h = f^7$, то по теореме 2 числа $\alpha_3(h) = 45(3s + 8)$ и $\alpha_1(h) = 5(3s + 8) - 60t$ делятся на 7. Поэтому $s = 2, t = 0$, $\alpha_3(h) = 630$ и $\alpha_1(h) = 70$. Отсюда $|G|$ не делится на 25, противоречие. Итак, G не содержит элементов порядка 35.

Теперь $|S(G)|$ не делится на 7 (иначе G содержит элемент f порядка 35). Аналогично, $|S(G)|$ не делится на 5. Ввиду таблицы 1 из [10] группа $\bar{T}$ изоморфна J_2 , A_{10} или $\Omega_8^+(2)$. Лемма доказана.

Группы J_2 , A_{10} и $\Omega_8^+(2)$ не содержат подгрупп индекса, делящегося на 175 и делящего 700. Поэтому группа G разрешима. Но тогда G содержит элемент порядка 35, противоречие. Следствие доказано. $\square$

REFERENCES

- [1] J.H. Koolen, J. Park, *Shilla distance-regular graphs*, Europ. J. Comb., **31** (2010), 2064–2073. MR2718281
- [2] A.A. Makhnev, M.P. Golubyatnikov, *A Shilla graph with intersection array $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$ does not exist*, Mathem. Zametki, **106**:5 (2019), 797–800.
- [3] A.E. Brouwer, S. Sumaloj, C. Worawannotai, *The nonexistence of distance-regular graphs with intersection arrays $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$ and $\{36, 28, 4; 1, 2, 24\}$* , Australasian J. Comb., **66** (2016), 330–332. MR3556137
- [4] I.N. Belousov, A.A. Makhnev, *Distance-regular graphs with intersection arrays $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ and $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ do not exist*, Sibirean electr. Math. Reports, **15** (2018), 1506–1512. MR3885484
- [5] I.N. Belousov, A.A. Makhnev, *Distance-regular graph with intersection array $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ does not exist*, Sibirean electr. Math. Reports, **16** (2019), 206–216. MR3919515
- [6] N.D. Zyulyarkina, A.A. Makhnev, *On automorphisms of distance-regular graph with intersection array $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$* , Doklady mathematics, **84**:1 (2011), 510–514. MR2893565
- [7] I. N. Belousov, *Shilla distance-regular graphs with $b_2 = sc_2$* , Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **24**:3 (2018), 16–26. MR3865486
- [8] P.J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts, **45**, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. MR1721031
- [9] A.L. Gavriluk, A.A. Makhnev, *On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$* , Doklady Mathematics, **81**:3 (2010), 439–442. MR2766516
- [10] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Sibirean electr. Math. Reports, **6** (2009), 1–12. MR2586673

ALEXANDR ALEKSEEVICH MAKHNEV

N.N. KRASOVSKII INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS OF THE URAL BRANCH OF
THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES,
16, S. KOVALEVSKOY STR.,
EKATERINBURG, 620990, RUSSIA
VYATKA STATE UNIVERSITY,
36, MOSKOVSKAYA STR.,
KIROV, 610000, RUSSIA
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru