Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

D. I. Ivanov, M. L. Platonov, Limited-combinatorial sets, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1553–1560

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.106>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 35.173.219.12

April 26, 2023, 17:48:47

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1553–1560 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.106

УДК 510.5

MSC 03D99

ОГРАНИЧЕННО-КОМБИНАТОРНЫЕ МНОЖЕСТВА

Д.И. ИВАНОВ, М.Л. ПЛАТОНОВ

ABSTRACT. This article discusses the issue of classification of their own subsets of $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ by means of partial Boolean functions. For an arbitrary partial Boolean function β defines the notion of β -limited combinatorial set, which is a generalization of the concept of β -combinatorial set [1]. Fully describe the classes of these sets, the relationship between these classes by inclusion.

Keywords: Boolean functions, combinatorial sets, combinatorial-selector sets, limited-combinatorial sets, a sequence of maximal restriction.

1. ВВЕДЕНИЕ

Существует ряд подходов к изучению множества $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: алгебраический, теоретико-множественный, топологический и алгоритмический. В каждом случае используются специфические классификации подмножеств множества $\mathbb{N}$, основанные на определённых критериях. Так, например, в рамках алгоритмического подхода наиболее известной является классификация перечислимых множеств. Среди них различают классы вычислимых, простых, креативных и мезоичных множеств. Другой подход к изучению произвольных подмножеств множества $\mathbb{N}$ заключается в их классификации по «сложности». Инструментом для такой классификации служит понятие сводимости. Множество A сводимо к множеству B , если существует алгоритм, который решал бы проблему вхождения элементов для множества A при условии, что есть возможность по мере надобности пользоваться информацией о принадлежности тех или иных чисел из $\mathbb{N}$ множеству B . Такая сводимость в наиболее общем виде называется Тьюринговой (T –) сводимостью. Различают и другие, в частности, табличную (tt –) сводимость. Множество A tt -сводимо к множеству B

IVANOV, D.I., PLATONOV, M.L., LIMITED-COMBINATORIAL SETS.

© 2019 ИВАНОВ Д.И., ПЛАТОНОВ М.Л.

Поступила 3 марта 2018 г., опубликована 28 октября 2019 г.

$(A \leq_{tt} B)$, если существует алгоритм, который для каждого $x \in \mathbb{N}$ даёт набор чисел $\langle t_1^x, \dots, t_{n(x)}^x \rangle$ и булеву функцию (БФ) $\beta_x(y_1, \dots, y_{n(x)})$ такие, что

$$(\forall x) \left(x \in A \Leftrightarrow \beta_x(\chi_B(t_1^x), \dots, \chi_B(t_{n(x)}^x)) = 1 \right),$$

где $\chi_B(t)$ — характеристическая функция множества B :

$$\chi_B(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in B; \\ 0, & \text{если } t \notin B. \end{cases}$$

Если положить $A =_{tt} B \Leftrightarrow A \leq_{tt} B \wedge B \leq_{tt} A$, то tt -сводимость разбивает множество подмножеств $\mathbb{N}$ на классы эквивалентности, называемые tt -степенями.

Ещё одна классификация, использующая булевы функции и эффективную вычислимость была предложена А. Н. Дёгтевым. В работе [8] К. Джокупс ввёл понятие полурекурсивного множества, именно, подмножество A множества $\mathbb{N}$ называется полурекурсивным, если существует всюду определённая вычислимая функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что

$$(\forall x)(\forall y) \left(f(x, y) \in \{x, y\} \wedge ((\chi_A(x) \vee \chi_A(y)) = 1 \Leftrightarrow f(x, y) \in A) \right),$$

где χ_A — характеристическая функция множества A . По аналогии А. Н. Дёгтев определил понятие β -комбинаторных [1] множеств, предложив использовать в определении произвольную булеву функцию (БФ): множество A называется β -комбинаторным, где β — произвольная n -местная БФ, если существует n -местная всюду определённая вычислимая функция f такая, что

$$(\forall x_1, \dots, x_n) \left(\beta(\chi_A(x_1), \dots, \chi_A(x_n)) = 1 \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \in A \right).$$

Если же потребовать, чтобы функция f была селекторной, т. е.

$$(\forall x_1, \dots, x_n) (f(x_1, \dots, x_n) \in \{x_1, \dots, x_n\}),$$

то придём к понятию β -селекторного [1, 4] (β -комбинаторно-селекторного) множества. Заменяя в определении β -комбинаторно-селекторного множества эквивалентность на импликацию, получим определение β -импликативно-селекторного множества [3]. Обобщением данных понятий послужили работы [2, 5-7, 9, 10], где в определении в качестве f используется селекторная вычислимая (частичная) функция. Таким образом, были определены и изучены слабо β -импликативно-селекторные и слабо β -комбинаторно-селекторные множества.

Представленная работа обобщает понятие β -комбинаторных множеств посредством замены всюду определённой БФ на частичную. Она посвящена описанию классов этих множеств и их соотношению по включению.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Будем говорить, что БФ β является *частичной*, если хотя бы на одном из наборов $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \{0, 1\}^n$ значение БФ β не определено ($\beta(\theta_1, \dots, \theta_n) \uparrow$).

Подмножества $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, о которых далее идёт речь, полагаем отличными от $\emptyset$ и $\mathbb{N}$.

Определение 1. Множество $A \subseteq \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ назовём β -ограниченно-комбинаторным (β -ОК), если существует n -местная частично вычислимая функция $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что для всех $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ выполнены условия:

- (i) $f(x_1, \dots, x_n) \uparrow \Leftrightarrow \beta(\chi_A(x_1), \dots, \chi_A(x_n)) \uparrow$,
- (ii) $f(x_1, \dots, x_n) \in A \Leftrightarrow \beta(\chi_A(x_1), \dots, \chi_A(x_n)) = 1$,

где χ — характеристическая функция множества A . В этом случае говорим, что A является β -ОК множеством с соответствующей частично вычислимой функцией f .

Назовём частичную БФ допустимой, если она не является нигде не определённой и отлична от функций β^0 и β^1 , где

$$\beta^\theta(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 - \theta, & \text{если } x_1 = \dots = x_n = \theta \in \{0, 1\}; \\ \uparrow, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим через $\mathbf{E}_1$ класс перечислимых множеств, $\mathbf{E}_0 = \{X : X = \mathbb{N} \setminus Y, Y \in \mathbf{E}_1\}$ класс множеств, имеющих перечислимое дополнение, и $\mathbf{R} = \mathbf{E}_0 \cap \mathbf{E}_1$ — класс всех вычислимых множеств.

Доказательству основного результата предпошлём ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Всякое вычислимое множество является β -ОК множеством для любой частичной БФ β .

Доказательство. Пусть $A \in \mathbf{R}$ и β — произвольная допустимая n -местная частичная БФ. Тогда A является β -ОК множеством с частично вычислимой функцией

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} a_\theta, & \text{если } \beta(\chi_A(x_1), \dots, \chi_A(x_n)) = \theta \in \{0, 1\}; \\ \uparrow, & \text{если } \beta(\chi_A(x_1), \dots, \chi_A(x_n)) \uparrow, \end{cases}$$

где a_θ — фиксированные элементы такие, что:

$$a_\theta \in \begin{cases} A, & \text{если } \theta = 1; \\ \mathbb{N} \setminus A, & \text{если } \theta = 0. \end{cases}$$

□

Лемма 2. Для любой допустимой частичной БФ β , каждое β -ОК множество является перечислимым или имеет перечислимое дополнение.

Доказательство. Пусть β — n -местная допустимая частичная БФ, A — β -ОК множество с соответствующей частично вычислимой функцией f , a_0 и a_1 — фиксированные элементы из $\mathbb{N} \setminus A$ и A соответственно. Очевидно, найдутся набор $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ и $i : 1 \leq i \leq n$ такие, что значение $\beta(\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_i, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n) \uparrow$, а $\beta(\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, 1 - \theta_i, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n) \downarrow$ (определено). Каждой переменной x_j , $j \neq i$, частично вычислимой функции f припишем значение a_0 (a_1), если $\theta_j = 0$ ($\theta_j = 1$ соответственно), получив тем самым частичную вычислимую функцию $g(x_i)$. Тогда множество $B = \{x : g(x) \downarrow\}$ будет перечислимым. Если $\theta_i = 0$ ($\theta_i = 1$), то $B = A$ ($B = \mathbb{N} \setminus A$ соответственно). В результате получим, что $A \in \mathbf{E}_1$ или $A \in \mathbf{E}_0$.

□

Если в определении β -ОК множества потребовать, чтобы частичная булева функция β была всюду определённой, то соответствующая ему функция станет всюду определённой вычислимой функцией и придём к понятию β -комбинаторных множеств. Они описаны в статье [1], центральным результатом которой является следующее утверждение: для любой БФ $\beta \neq 0, 1$ семейство всех β -комбинаторных множеств совпадает с одним из следующих классов:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \{X : X \subseteq \mathbb{N}\}; \\ \mathbf{A} &= \{X : X =_m \mathbb{N} \setminus X\}; \\ \mathbf{L} &= \{X : X =_m X^l\}, \text{ где } X^l = \{x : |D_x \cap X| \equiv 1 \pmod{2}\}; \\ \mathbf{C} &= \{X : X =_m X^\omega\}, \text{ где } X^\omega = \{x : D_x \subseteq X\}; \\ \mathbf{D} &= \{X : X =_m {}^\omega X\}, \text{ где } {}^\omega X = \{x : D_x \cap X \neq \emptyset\}; \\ \mathbf{P} &= \{X : X =_m {}^\omega(X^\omega)\}; \\ \mathbf{T} &= \{X : X =_m X^{tt}\}, \text{ где } X^{tt} = \{x : X \models_{tt} tt(x)\}. \end{aligned}$$

Здесь D_n — конечное множество с каноническим номером n , $X \neq \emptyset, \mathbb{N}$ и $X =_m Y$ означает m -эквивалентность множеств X и Y . Для получения этого результата было показано, что в определении β -комбинаторного множества можно считать, что β является одной из БФ последовательности

$$x, \bar{x}, x + y, x \vee y, x \wedge y, (x \wedge y) \vee z, x \rightarrow y \quad (1)$$

Этот результат следует из того факта [11], что замкнутых классов БФ, содержащих константы 0 и 1, и отличных от $\{0, 1\}$, всего семь, которые совпадают с замыканиями классов $\{1, 0, \alpha\}$, где α — БФ из последовательности (1).

Рассмотрим произвольную частичную булеву функцию $\beta(x_1, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_n)$. Может оказаться, что после замены некоторых переменных (например, $x_1, \dots, x_l$, $l \in \{1, \dots, n-1\}$) на константы $\theta_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, \dots, l\}$, полученное сужение по переменным $x_{l+1}, \dots, x_n$ на наборе констант $(\theta_1, \dots, \theta_l)$

$$\beta_1(x_{l+1}, \dots, x_n) = \beta(x_{l+1}, \dots, x_n)[\theta_1, \dots, \theta_l] = \beta(\theta_1, \dots, \theta_l, x_{l+1}, \dots, x_n)$$

станет всюду определённой булевой функцией.

Определение 2. Назовём сужение максимальным, если оно всюду определено и для любого $i \in \{1, \dots, l\}$, булева функция

$$\beta_{1_i}(x_i, x_{l+1}, \dots, x_n) = \beta(\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, x_i, \theta_{i+1}, \dots, \theta_l, x_{l+1}, \dots, x_n)$$

становится частичной БФ.

Лемма 3. Если $\beta_1(x_{l+1}, \dots, x_n) = \beta(\theta_1, \dots, \theta_l, x_{l+1}, \dots, x_n)$ — максимальное сужение булевой функции β , и существуют $i, j \in \{1, \dots, l\}$, $i \neq j$, такие, что $\theta_i = 1 - \theta_j$, то семейство β -ОК множеств совпадает с классом $\mathbf{R}$.

Доказательство. Рассмотрим максимальное сужение булевой функции $\beta(\theta_1, \dots, \theta_l, x_{l+1}, \dots, x_n)$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, l\}$ существует такой набор $\theta_{l+1}, \theta_{l+2}, \dots, \theta_n$, что $\beta(\theta_1, \dots, 1 - \theta_i, \dots, \theta_l, \theta_{l+1}, \dots, \theta_n) \uparrow$, а, следовательно (что следует из доказательства леммы 2), любое β -ОК множество является перечислимым, если $\theta_i = 1$, или имеет перечислимое дополнение, если $\theta_i = 0$. Если же существуют $i, j \in \{1, \dots, l\}$, $i \neq j$, такие, что $\theta_i = 1 - \theta_j$, то β -ОК

множество будет перечислимым и иметь перечислимое дополнение, т. е. будет вычислимым. $\square$

Для каждой частичной булевой функции β рассмотрим всевозможные её максимальные сужения:

$$\begin{aligned}\beta_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}) &= \beta(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1})[\theta_{1(k_1+1)}, \theta_{1(k_1+2)}, \dots, \theta_{1n}], 1 \leq k_1 < n, \\ \beta_2(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2k_2}) &= \beta(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2k_2})[\theta_{2(k_2+1)}, \theta_{2(k_2+2)}, \dots, \theta_{2n}], 1 \leq k_2 < n, \\ &\dots \\ \beta_r(x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rk_r}) &= \beta(x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rk_r})[\theta_{r(k_r+1)}, \theta_{r(k_r+2)}, \dots, \theta_{rn}], 1 \leq k_r < n.\end{aligned}$$

(последовательность максимальных сужений булевой функции β).

Определение 3. Назовём частичную БФ разложимой, если для каждого i ($1 \leq i \leq r$) функции β_i последовательности максимальных сужений получены сужением функции β на наборах одних и тех же констант $(\theta, \dots, \theta)$, $\theta \in \{0, 1\}$, т.е.

$$\begin{aligned}\beta_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}) &= \beta(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1})[\theta, \theta, \dots, \theta], 1 \leq k_1 < n, \\ \beta_2(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2k_2}) &= \beta(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2k_2})[\theta, \theta, \dots, \theta], 1 \leq k_2 < n, \\ &\dots \\ \beta_r(x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rk_r}) &= \beta(x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rk_r})[\theta, \theta, \dots, \theta], 1 \leq k_r < n,\end{aligned}$$

а в остальных случаях $\beta \uparrow$.

Лемма 4. Если допустимая частичная булева функция не является разложимой, то либо она совпадает с одной из функций $\hat{\beta}_\theta$ ($\theta = 0, 1$), либо любое β -ОК множество A будет вычислимым.

Доказательство. Заметим, что любая частичная БФ β определена на одном и только одном наборе констант $(\theta, \dots, \theta)$, $\theta \in \{0, 1\}$, иначе β -ОК множество A попадёт в класс **R**. Действительно, если существует набор $(1, \dots, 1, \dots, 0, \dots, 0)$, такой что $\beta(1, \dots, 1, \dots, 0, \dots, 0) \downarrow$, то заменим одно из значений переменной, принимающей 0 на 1. Для нового набора, если значение БФ будет не определено, то $A \in \mathbf{E}_0$ (из доказательства леммы 2). В противном случае, снова меняем 0 на 1 и т. д. В результате получим, что либо $A \in \mathbf{E}_0$, либо $\beta(1, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 1) \downarrow$. Аналогично, меняя 1 на 0, получим, что либо $A \in \mathbf{E}_1$, либо $\beta(0, \dots, 0, \dots, 0, \dots, 0) \downarrow$. Таким образом, либо $A \in \mathbf{R}$, либо, по крайней мере, одно из значений $\beta(1, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 1)$ или $\beta(0, \dots, 0, \dots, 0, \dots, 0)$ определено. Если же предположить, что на обоих наборах $(\theta, \dots, \theta)$, $\theta \in \{0, 1\}$ БФ β определена, взяв $\beta(1, \dots, 1, \dots, 0, \dots, 0) \uparrow$ и, используя аналогичную схему доказательства, получим, что $A \in \mathbf{E}_0$ и $A \in \mathbf{E}_1$, т. е. $A \in \mathbf{R}$.

Пусть теперь $\beta(\theta, \dots, \theta) \downarrow$. Если БФ не является разложимой и отлична от функций $\hat{\beta}_\theta$, то существует набор переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$, не входящих ни в одно из максимальных сужений, такой, что значение функции β при

$$x_{i_1} = 1 - \theta, x_{i_2} = 1 - \theta, \dots, x_{i_k} = 1 - \theta, 1 \leq k < n,$$

будет определено. Будем рассматривать этот фиксированный набор констант.

Предположим, что переменная x_{i_1} входит в одно из сужений функции β на наборе соответствующих констант из этого набора. Очевидно, что в этом случае $k > 1$. Если это максимальное сужение по одной переменной, то по лемме

3 семейство β -ОК множеств совпадает с классом $\mathbf{R}$. Иначе, пусть, например, переменная x_t также участвует в этом максимальном сужении на наборе оставшихся констант. Тогда, если $x_t \in \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$, то $k > 2$ и любое β -ОК множество A попадёт в класс $\mathbf{R}$ (лемма 3). Если же $x_t \notin \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$, то $n - k \neq 1$ (т.к. иначе $\beta(1 - \theta, \dots, 1 - \theta) \downarrow$) и в этом случае по лемме 3 $A \in \mathbf{R}$. Рассуждая аналогично, получим, что семейство β -ОК множеств совпадает с классом $\mathbf{R}$. В противном случае придём к противоречию с тем, что переменные $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ не входят одновременно ни в одно из максимальных сужений.

Если же ни одна из переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ не входит ни в одно из максимальных сужений функции β с соответствующими константами из фиксированного набора, то заменив значение переменной x_{i_1} на θ , получим, что значение функции β для этого набора не определено, и β -ОК множество $A \in \mathbf{E}_{1-\theta}$. Заменим значение переменной x_{i_2} на θ . Для нового набора если значение БФ будет определено, то $A \in \mathbf{E}_\theta$, а значит $A \in \mathbf{R}$. В противном случае x_{i_3} меняем на θ и т.д. На некотором шаге получим $A \in \mathbf{R}$ или же придём к противоречию с тем, что $\beta(\theta, \dots, \theta) \downarrow$. □

Лемма 5. Для булевых функций

$$\widehat{\beta}_\theta(\theta_1, \dots, \theta_n) = \begin{cases} \theta, & \text{если } \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta \in \{0, 1\}; \\ \uparrow, & \text{иначе,} \end{cases}$$

семейство β -ОК множеств совпадает с классом $\mathbf{E}_\theta$.

Доказательство. В одну сторону утверждение следует из доказательства леммы 2.

Обратно, пусть B — пересчитываемое множество (дополнение пересчитываемого множества), тогда, пересчитывая множество B ($\mathbb{N} \setminus B$) определим частично вычислимую функцию g :

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} x_1, & \text{если } x_1, \dots, x_n \text{ вычислились в } B \text{ } (\mathbb{N} \setminus B); \\ \uparrow, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Тогда B является β -ОК множеством с соответствующей частично вычислимой функцией $g(x_1, \dots, x_n)$. □

Лемма 6. Для любой разложимой частичной БФ β , семейство всех β -ОК множеств совпадает с одним из классов:

$$\mathbf{R}, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{C}, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{D}, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{P}, \theta \in \{0, 1\}.$$

Доказательство. Пусть A — β -ОК множество для разложимой частичной БФ β с соответствующей частично вычислимой функцией $f(x_1, \dots, x_n)$, а $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ — последовательность максимальных сужений функции β . Так как $\beta_1(\chi_A(x_{l+1}), \dots, \chi_A(x_n)) = \beta(\theta, \dots, \theta, \chi_A(x_{l+1}), \dots, \chi_A(x_n))$ — всюду определённая БФ, то вычислимая функция $f_1(x_{l+1}, \dots, x_n) = f(a^\theta, \dots, a^\theta, x_{l+1}, \dots, x_n)$ станет всюду определённой, где a^θ — фиксированный элемент, такой что

$$a^\theta \in \begin{cases} A, & \text{если } \theta = 1; \\ \mathbb{N} \setminus A, & \text{если } \theta = 0, \end{cases}$$

а множество A окажется β_1 -комбинаторным с соответствующей функцией f_1 .

Учитывая результат, полученный в работе [1], можно считать, что β_1 — одна из БФ последовательности (1). С другой стороны, по лемме 2 $A \in \mathbf{E}_\theta$, где

$\theta \in \{0, 1\}$. Поэтому, если β_1 равна x , $x \wedge y$, $x \vee y$ или $(x \wedge y) \vee z$, то A принадлежит одному из классов $\mathbf{E}_\theta$, $\mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{C}$, $\mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{D}$, $\mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{P}$, $\theta \in \{0, 1\}$. Если же β_1 есть $\bar{x}$, $x + y$ или $x \rightarrow y$, то $A =_m \mathbb{N} \setminus A$, и, поэтому $A \in \mathbf{R}$ [1], то есть, учитывая результат леммы 1, класс β -ОК множеств совпадает с классом разрешимых множеств.

Аналогично показывается, что множество A является также $\beta_2, \dots, \beta_r$ -комбинаторным множеством с соответствующими всюду определенными вычислимыми функциями $f_2, \dots, f_r$, то есть $A \in K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_r$, где

$$K_i \in \{\mathbf{R}, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{C}, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{D}, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{P}\}, \theta \in \{0, 1\}, i \in \{1, \dots, r\},$$

а, стало быть, A принадлежит одному из классов:

$$\mathbf{R}, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{C}, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{D}, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{P}, \theta \in \{0, 1\}.$$

Обратно, возьмём произвольное множество B из того же класса, что и множество A , тогда $B \in K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_r$, то есть $B \in K_j$, для любого $j \in \{1, \dots, r\}$. Значит, B является β_j -комбинаторным множеством с соответствующей всюду определённой вычислимой функцией g_j . Перечисляя множество B ($\mathbb{N} \setminus B$), если $B \in \mathbf{E}_1(\mathbf{E}_0)$, доопределим каждую из функций g_j до n -местных частично вычислимых функций g_j^1 следующим образом: $g_j^1 = g_j$, если значения всех переменных, входящих в g_j^1 , но не входящих в g_j , вычисляются в B ($\mathbb{N} \setminus B$), и $g_j^1 \uparrow$ в противном случае.

Далее, будем одновременно вычислять функции $g_j^1(x_1, \dots, x_n)$, $j \in \{1, \dots, r\}$. Если для некоторого набора значений переменных $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ первым вычислилось значение $g_k^1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, то положим $g(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = g_k^1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, если ни одно из значений $g_j^1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ не вычислилось, считаем $g(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \uparrow$. Тогда множество B будет β -ОК множеством с соответствующей частично вычислимой функцией $g(x_1, \dots, x_n)$. $\square$

Из вышесказанного следует основной результат статьи:

Теорема 1. Для любой допустимой частичной БФ β , семейство всех β -ОК множеств совпадает с одним из классов:

$$\mathbf{R}, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{C}, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{D}, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{P}, \theta \in \{0, 1\}.$$

$\square$

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Таким образом, учитывая основные результаты, выраженные в формулировках вышеуказанных лемм и теоремы, а так же тот факт, что $\mathbf{E}_0 \cap \mathbf{E}_1 = \mathbf{R}$, $\mathbf{C} \cap \mathbf{D} = \mathbf{P}$ [1], получены соотношения между классами β -ОК множеств по включению, которые можно условно изобразить на следующей диаграмме включения классов:

Из диаграммы видно, что классы β -ОК множеств получаются из некоторых классов β -комбинаторных множеств с определёнными ограничениями, а именно, β -ОК множествами могут быть лишь перечислимые или коперечислимые множества. Этот факт и стал определяющим при выборе названия рассматриваемых множеств.

Рис. 1. Диаграмма включения классов β -ограниченно-комбинаторных множеств.

REFERENCES

- [1] Degtev A.N., *Recursive-combinatorial properties of subsets of the natural numbers*, Algebra and Logic, **29**:3 (1990), 204–210. MR1118926
- [2] Degtev A.N., *Weak combinatorial selective properties of subsets of the natural numbers*, Algebra and Logic, **29**:4 (1990), 280–286. MR1155470
- [3] Degtev A.N., *Implicatively selector sets*, Algebra and Logic, **35**:2 (1996), 80–85. MR1444649
- [4] Degtev A.N., *Almost combinatorial selector sets*, Mathematical notes, **68**:6 (2000), 721–723. MR1835183
- [5] Degtev A.N., Ivanov D.I., *Weakly combinatorial selector sets*, Algebra and Logic, **37**:6 (1998), 357–362. MR1680420
- [6] Degtev A.N., Ivanov D.I., *Weakly implicatively selective sets of dimension 3*, Discrete Mathematics and Applications, **9**:4 (1999), 395–402. MR1739074
- [7] Degtev A.N., Ivanov D.I., *About the classes of linear and self-dual weakly implicative selector sets*, Tyumen State University Herald, **4** (2004), 238–241 [in Russian].
- [8] Jockusch, C. G. Jr., *Semirecursive sets and positive reducibility*, Transactions of the American Mathematics Society, **131**:2 (1968), 420–436. MR220595
- [9] Ivanov D.I., *Weakly implicative selector sets*, Russian Mathematics, **50**:9 (2006), 27–31. Zbl 07092351
- [10] Ivanov D.I., *Weakly combinatorial-selector sets*, Russian Mathematics, **50**:11 (2006), 20–23 (2006).
- [11] Yablonskij S. V., Gavrilov G. P., Kudryavtsev V. G., *Functions of the Algebra of Logic and Post Classes*, Moscow: Nauka, 1966 [in Russian]. Zbl 0171.27701

DMITRY IVANOVICH IVANOV
 TYUMEN STATE UNIVERSITY,
 6, VOLODARSKOGO STR.,
 TYUMEN, 625003, RUSSIA
 E-mail address: i1off@list.ru

MAXIM LYUDVIGOVICH PLATONOV
 TYUMEN STATE UNIVERSITY,
 6, VOLODARSKOGO STR.,
 TYUMEN, 625003, RUSSIA
 E-mail address: platonovmaximlyudvigovich@gmail.ru