Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. S. Sgibnev, The discrete Wiener–Hopf equation with submultiplicative asymptotics of the solution, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1600–1611

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.111>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.239.49.27

April 26, 2023, 08:51:20

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1600–1611 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.111

УДК 517.968

MSC 45E10

ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА-ХОПФА С
ПОЛУМУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ АСИМПТОТИКОЙ
РЕШЕНИЯ

М.С. СГИБНЕВ

ABSTRACT. The discrete Wiener-Hopf equation is considered whose kernel is an arithmetic probability distribution with positive mean. The nonhomogeneous term behaves like a nondecreasing submultiplicative sequence. Asymptotic properties of the solution are established depending on the asymptotics of the submultiplicative sequence.

Keywords: discrete Wiener-Hopf equation, nonhomogeneous equation, arithmetic probability distribution, positive mean, submultiplicative sequence, regularly varying function, asymptotic behavior.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел, $\mathbb{Z}_+$ — множество всех неотрицательных целых чисел и $\mathbb{Z}_- := \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+$ — множество всех отрицательных целых чисел. Классическое интегральное уравнение Винера-Хопфа имеет вид

$$z(x) = \int_0^\infty k(x-y)z(y) dy + g(x), \quad x \geq 0,$$

или, что эквивалентно,

$$z(x) = \int_{-\infty}^x z(x-y)k(y) dy + g(x), \quad x \geq 0.$$

SGIBNEV, M.S., THE DISCRETE WIENER-HOPF EQUATION WITH SUBMULTIPLICATIVE ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION.

© 2019 Сгибнев М.С.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2, проект № 0314-2019-0005.

Поступила 1 июля 2019 г., опубликована 5 ноября 2019 г.

Рассмотрим его дискретный аналог

$$(1) \quad z_j = \sum_{k=-\infty}^j z_{j-k} f_k + g_j, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

где $\{f_j\}_{j=-\infty}^\infty$, $\{g_j\}_{j=0}^\infty$ — известные числовые последовательности, а $\{z_j\}_{j=0}^\infty$ — последовательность искомых величин, причем $\sum_{j=-\infty}^\infty |f_j| < \infty$ (см. [1, § 13, п. 1]). Последовательность $\{f_j\}_{j=-\infty}^\infty$ — это дискретный аналог ядра $k(x)$ в классическом уравнении Винера-Хопфа. Назовем последовательность $\{f_j\}_{j=-\infty}^\infty$ *ядром* дискретного уравнения (1). Мы будем изучать уравнение (1), ядром которого является арифметическое распределение вероятностей $F = \{f_j\}_{j=-\infty}^\infty$ с шагом единица и средним $\mu = \sum_{j=-\infty}^\infty j f_j \in (0, \infty)$. Напомним (см. [2, гл. V, § 2, определение 3]), что распределение вероятностей F на $\mathbb{R}$ называется *арифметическим*, если оно сосредоточено на множестве точек вида $0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots$. Наибольшее число λ , обладающее этим свойством, называется *шагом* распределения F . Пусть X_k , $k \geq 1$, — независимые случайные величины с одним и тем же распределением F , не сосредоточенным в нуле: $P(X_k = j) = f_j$, $j \in \mathbb{Z}$. Эти величины порождают случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$. Согласно теореме 1 в [2, гл. XII, § 2] существуют только два типа случайных блужданий: 1) осциллирующий тип (S_n колеблется с вероятностью единица между $-\infty$ и $+\infty$); 2) уходящий тип (с вероятностью единица S_n стремится либо к $-\infty$, либо к $+\infty$). Если существует математическое ожидание $EX_1 := \sum_{j=-\infty}^\infty j f_j$, то при $EX_1 > 0$ согласно закону больших чисел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n/n = EX_1$ почти наверно (см. [3, предложение IV.7.1]), т.е. случайное блуждание уходит к $+\infty$.

Обозначим через l_1 пространство двусторонних суммируемых последовательностей $a = \{a_n\}_{n=-\infty}^\infty \subset \mathbb{C}$. Условимся записывать последовательности в виде функций целочисленного аргумента, если их обозначения содержат больше одной буквы; например, $g^{(N)} = \{g^{(N)}(j)\}$. Определим *свертку* $a * b$ последовательностей $a = \{a_n\}_{n=-\infty}^\infty$ и $b = \{b_n\}_{n=-\infty}^\infty$ пространства l_1 как последовательность $c = \{c_n\}_{n=-\infty}^\infty \in l_1$, где

$$c_n := a * b(n) := \sum_{j=-\infty}^\infty a_{n-j} b_j, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Это определение свертки будет использоваться также в тех случаях, когда указанная сумма имеет смысл при всех $n \in \mathbb{Z}$, несмотря на то что исходные последовательности a и b могут и не принадлежать пространству l_1 . Так как комплекснозначные меры, сосредоточенные на множестве $\mathbb{Z}$, могут рассматриваться как последовательности, то под сверткой двух таких мер будем понимать определенную выше свертку соответствующих последовательностей. Мы не будем различать такие меры и соответствующие им последовательности. Каждой последовательности $a = \{a_n\}_{n=-\infty}^\infty \in l_1$ поставим в соответствие ряд $\hat{a}(s) := \sum_{n=-\infty}^\infty a_n s^n$, который абсолютно сходится на окружности $\{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. В частности, $\hat{F}(s) = \sum_{n=-\infty}^\infty f_n s^n$. Обозначение $\hat{a}(s)$ будем использовать также в тех случаях, когда этот ряд сходится при данном значении s , хотя последовательность $\{a_n\}_{n=-\infty}^\infty$ может и не принадлежать l_1 (см., например, формулировку теоремы 3). Обозначим через δ_0 атомическую

меру единичной массы, сосредоточенную в нуле; ей соответствует последовательность, у которой все члены суть нули, за исключением члена с нулевым номером, который равен единице. Пространство l_1 — банахова алгебра с нормой $\|a\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$ и сверткой $a * b$ в качестве операции умножения, сложение, вычитание и умножение последовательностей на числа выполняются почленно: $a \pm b = \{a_n \pm b_n\}$, $\alpha a = \{\alpha a_n\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, а δ_0 — единица алгебры l_1 (см. [4, Дополнение, § 1, п. 1, пример 4]).

Определение 1. Пусть α_n , $n \in \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_+)$, — положительная функция целочисленного аргумента, удовлетворяющая условию

$$\alpha_{k+l} \leq \alpha_k \alpha_l.$$

Такие функции будем называть *полумультипликативными последовательностями*.

Для $c \in \mathbb{R}$ полагаем отношение c/∞ равным нулю. Соотношение $a_j \sim cb_j$ при $j \rightarrow \infty$ означает, что $a_j/b_j \rightarrow c$ при $j \rightarrow \infty$; если $c = 0$, то $a_j = o(b_j)$. В работе исследуется асимптотика решения z при условии $g_j \sim c\alpha_j$, $j \rightarrow \infty$, для некоторого $c > 0$, где $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неубывающая полумультипликативная последовательность.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ И ЕГО ЯВНЫЙ ВИД

Положим $\bar{\mathcal{T}}_+ := \min\{n \geq 1 : S_n \geq 0\}$. Случайная величина $\bar{\mathcal{H}}_+ := S_{\bar{\mathcal{T}}_+}$ называется *первой слабо возрастающей лестничной высотой*. Аналогично, $\bar{\mathcal{T}}_- := \min\{n \geq 1 : S_n < 0\}$ и $\bar{\mathcal{H}}_- := S_{\bar{\mathcal{T}}_-}$ — *первая сильно убывающая лестничная высота*. Справедливо следующее факторизационное тождество (см. [5, § 2]):

$$(2) \quad 1 - \xi E(e^{sX_1}) = [1 - E(\xi^{\bar{\mathcal{T}}_-} e^{s\bar{\mathcal{H}}_-})][1 - E(\xi^{\bar{\mathcal{T}}_+} e^{s\bar{\mathcal{H}}_+})],$$

где $|\xi| \leq 1$, $\Re s = 0$. Обозначим через F^{n*} n -кратную свертку распределения F :

$$F^{1*} := 1, \quad F^{(n+1)*} := F^{n*} * F, \quad n \geq 1, \quad F^{0*} := \delta_0.$$

Введем определение, которое широко используется в вероятностной теории восстановления (см., например, [6, п. 0.4, формула (0.4.21)]).

Определение 2. Пусть F — арифметическое распределение вероятностей с шагом единица. Дискретная мера

$$U := \sum_{k=0}^{\infty} F^{k*} = \{U(\{n\})\}_{n=-\infty}^{\infty} =: \{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

называется *мерой восстановления*, порожденной распределением F .

Обозначим через $F_+ := \{f_j^+\}_{j=0}^{\infty}$ и $F_- := \{f_j^-\}_{j=-\infty}^{-1}$ распределения случайных величин $\bar{\mathcal{H}}_+$ и $\bar{\mathcal{H}}_-$ соответственно. Удобно доопределить эти последовательности следующим образом: $f_j^+ = 0$ при $j \in \mathbb{Z}_-$ и $f_j^- = 0$ при $j \in \mathbb{Z}_+$. Тогда распределения $F_+ := \{f_j^+\}_{j=-\infty}^{\infty}$ и $F_- := \{f_j^-\}_{j=-\infty}^{\infty}$ суть элементы банаховой алгебры l_1 . Пусть

$$U_{\pm} := \sum_{k=0}^{\infty} F_{\pm}^{k*} = \{U_{\pm}(\{n\})\}_{n=-\infty}^{\infty} =: \{u_n^{\pm}\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

— меры восстановления, порожденные распределениями $F_{\pm}$ соответственно. Обозначим через $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_-}$ индикаторную функцию подмножества $\mathbb{Z}_-$ во множестве $\mathbb{Z}$: $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_-}(j) = 1$ при $j \in \mathbb{Z}_-$ и $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_-}(j) = 0$ при $j \in \mathbb{Z}_+$. Аналогичный смысл имеет обозначение $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_+}$. Рассмотрим уравнение (1). Доопределим последовательность $g = \{g_j\}_{j=0}^{\infty}$, полагая $g_j = 0$ при $j < 0$. Следующая теорема доказана в [5, теорема 1].

Теорема 1. Пусть F — арифметическое распределение вероятностей с шагом единица и пусть $g \in l_1$. Тогда последовательность

$$(2) \quad z_j = U_+ * [(U_- * g)\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_+}](j), \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

является решением уравнения (1), совпадающим с решением, полученным методом последовательных приближений.

3. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ И ЛЕММЫ

Отметим следующие факты. Положим $\mathcal{T}_- := \min\{n \geq 1: S_n \leq 0\}$ и $\mathcal{H}_- := S_{\mathcal{T}_-}$ — первая слабо убывающая лестничная высота. Обозначим через G_- распределение случайной величины $\mathcal{H}_-$. Как отмечено в [2, гл. XVIII, § 4, пример а)], уход случайного блуждания $\{S_n\}$ к $+\infty$ имеет место, когда распределение G_- случайной величины $\mathcal{H}_-$ несобственное: $G_-(\mathbb{Z}) < 1$. Справедливо равенство $G_- = \kappa\delta_0 + (1 - \kappa)F_-$, где $\kappa \in [0, 1)$ (см. [2, гл. XII, § 1, формула (1.10)]), откуда вытекает, что распределение F_- также несобственное.

Собственное распределение вероятностей $F_+ = \{f_j^+\}_{j=0}^{\infty}$ является арифметическим распределением с шагом единица, как и исходное распределение $F = \{f_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$; см., например, [7, лемма 1]. Полагая в теореме 1 а) из [8, гл. XIII, § 4] $a_n = f_n^+$, $u_n = u_n^+$ при $n \in \mathbb{Z}_+$, $b_0 = 1$, $b_n = 0$ при $n > 0$, получаем, что $u_n^+ \sim 1/\mu_+$, $n \rightarrow \infty$, откуда вытекает дискретная элементарная теорема восстановления для меры U_+ :

$$\sum_{i=0}^j u_i^+ \sim \frac{j}{\mu_+}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Справедливы равенства

$$(4) \quad \mu = \mu_+[1 - F_-(\mathbb{Z}_-)], \quad U_-(\mathbb{Z}_- \cup \{0\}) = \frac{1}{1 - F_-(\mathbb{Z}_-)}.$$

Действительно, положим $\xi = 1$ и $\sigma = e^s$ в тождестве (2) и разделим обе его части на $1 - \sigma$. Получим соотношение

$$\frac{1 - \widehat{F}(\sigma)}{1 - \sigma} = [1 - \widehat{F}_-(\sigma)] \frac{1 - \widehat{F}_+(\sigma)}{1 - \sigma}, \quad |\sigma| = 1.$$

Устремим σ к единице. Тогда дроби в левой и правой частях будут стремиться к μ и μ_+ соответственно. Второе равенство в (4) — следствие несобственности распределения F_- .

Определение 3. Функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}(\mathbb{R}_+)$, называется *полумультипликативной*, если она конечна, положительна, измерима по Борелю и удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x + y) \leq \varphi(x)\varphi(y)$, $x, y \in \mathbb{R}(\mathbb{R}_+)$.

Для совместимости определений 1 и 3 считаем, что $\alpha_0 = 1$. Для двусторонних полумультипликативных последовательностей $\{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ справедливы следующие соотношения:

$$0 < \rho_1 := \sup_{n>0} \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha_{-n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha_{-n}}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \inf_{n>0} \sqrt[n]{\alpha_n} =: \rho_2 < \infty.$$

Пусть $W^{<\alpha>}$ — совокупность всех формальных рядов $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n X^n$, для которых

$$\|x\| := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| \alpha_n < \infty.$$

Удобно отождествить формальный ряд $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n X^n$ с последовательностью $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, которую можно представлять себе как меру, заданную на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ и принимающую значение a_n на одноточечном множестве $\{n\}$. Совокупность $W^{<\alpha>}$ есть нормированное кольцо (банахова алгебра) относительно введенной нормы, свертки последовательностей в качестве умножения и обычных операций сложения и умножения на числа. Каждой последовательности $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in W^{<\alpha>}$ поставим в соответствие ряд $\hat{a}(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, абсолютно сходящийся в кольце $R := \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 \leq |z| \leq \rho_2\}$. При такой интерпретации элементов алгебры $W^{<\alpha>}$ ее единицей является мера δ_0 единичной массы, сосредоточенная в нуле. Теория банаховых алгебр $W^{<\alpha>}$ подробно изложена в [9, гл. III, § 19]).

Напомним условие обратимости элементов в банаховой алгебре $W^{<\alpha>}$. Пусть M — пространство максимальных идеалов алгебры $W^{<\alpha>}$. Из теории банаховых алгебр (нормированных колец) известны следующие факты [9, гл. I, § 4]. Каждый максимальный идеал $M \in M$ порождает некоторый гомоморфизм $h : W^{<\alpha>} \rightarrow \mathbb{C}$ и M — ядро этого гомоморфизма. Обозначим через $\nu(M)$ значение h на $\nu \in W^{<\alpha>}$. Элемент $\nu \in W^{<\alpha>}$ имеет обратный тогда и только тогда, когда ν не принадлежит никакому максимальному идеалу $M \in M$. Иными словами, ν обратим тогда и только тогда, когда $\nu(M) \neq 0$ при любом $M \in M$. Далее, пусть M — максимальный идеал алгебры $W^{<\alpha>}$. Тогда найдется $z \in R$ такое, что $x(M) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ для любого $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n X^n \in W^{<\alpha>}$. Таким образом, элемент $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n X^n \in W^{<\alpha>}$ обратим тогда и только тогда, когда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \neq 0$ для любого $z \in R$ (см. [9, гл. III, § 19]).

Лемма 1. Пусть $F = \{f_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ — арифметическое распределение вероятностей с шагом единица такое, что $\mu = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j f_j \in (0, \infty)$, и пусть $\{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — полумультипликативная последовательность такая, что $\rho_1 \leq 1 \leq \rho_2$, причем α_n не убывает на $\mathbb{Z}_+$ и не возрастает на $\mathbb{Z}_-$. Предположим, что

$$\sum_{j=-\infty}^{-1} \alpha_j \sum_{l=-\infty}^j f_l < \infty.$$

Допустим, что если $\rho_1 < 1$, то $\hat{F}(\rho_1) < 1$. Тогда $U_- \in W^{<\alpha>}$.

Доказательство. Сначала установим, что $F_- \in W^{<\alpha>}$. Определим функцию $\varphi(x)$ на всей прямой, исходя из последовательности $\{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Пусть $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x) = \alpha_n$ при $x \in (n-1, n]$, $n \geq 1$, и $\varphi(x) = \alpha_n$ при $x \in [n, n+1)$, $n < 0$. Определенная таким образом функция полумультипликативна в смысле определения 3. Пусть, например, $x < 0$, $y > 0$ и $x + y > 0$. Тогда $x \in [n, n+1)$,

$n < 0$, и $y \in (m-1, m]$, $m > 0$. Имеем $\varphi(x) = \alpha_n$, $\varphi(y) = \alpha_m$. Так как $x+y \in (m+n-1, m+n+1)$, то $\varphi(x+y) = \alpha_{m+n} \leq \alpha_m \alpha_n = \varphi(x)\varphi(y)$ либо

$$\varphi(x+y) = \alpha_{m+n+1} \leq \alpha_m \alpha_{n+1} \leq \alpha_m \alpha_n = \varphi(x)\varphi(y).$$

Далее, имеет место следующее необходимое и достаточное условие конечности полумультипликативного момента распределения F_- (см. [10, теорема 4 при $n=1$ и замечание 5]):

$$\int_{-\infty}^0 \varphi(x) F_-(dx) < \infty \iff \int_{-\infty}^0 \varphi(x) F((-\infty, x]) dx < \infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=-\infty}^{-1} \alpha_j f_j^- \iff \sum_{j=-\infty}^{-1} \alpha_j \sum_{l=-\infty}^j f_l.$$

Конечность суммы $\sum_{j=-\infty}^{-1} \alpha_j f_j^-$ означает, что $F_- \in W^{<\alpha>}$. Из тождества (2) вытекает равенство

$$\delta_0 - F = (\delta_0 - F_-) * (\delta_0 - F_+),$$

поэтому справедливо тождество

$$(5) \quad 1 - \hat{F}(z) = [1 - \hat{F}_-(z)][1 - \hat{F}_+(z)], \quad \rho_1 \leq |z| \leq 1.$$

Функция $\hat{F}(e^\xi)$, $\ln \rho_1 \leq \xi \leq 0$, выпукла. Поэтому $\hat{F}(e^\xi) < 1$ при $\ln \rho_1 \leq \xi < 0$ в силу условия $\hat{F}(\rho_1) < 1$, если $\rho_1 < 1$, или $\hat{F}(\sigma) < 1$ при $\sigma \in [\rho_1, 1)$. Поэтому из (5) вытекает, что $\hat{F}_-(\sigma) < 1$ при $\sigma \in [\rho_1, 1)$. Далее, $\hat{F}_-(1) < 1$, так как распределение F_- несобственное. Таким образом, $\hat{F}_-(\sigma) < 1$ при $\sigma \in [\rho_1, 1]$, откуда вытекает, что $|\hat{F}_-(z)| \leq \hat{F}_-(|z|) < 1$ при любом $z \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\widehat{\delta_0 - F_-}(z) = 1 - \hat{F}_-(z) \neq 0, \quad z \in \mathbb{R},$$

и дискретная мера $\delta_0 - F_-$ обратима в $W^{<\alpha>}$: $U_- = (\delta_0 - F_-)^{-1} \in W^{<\alpha>}$, см. [9, гл. III, § 19]. Лемма 1 доказана. $\square$

Лемма 2. Пусть $a = \{a_j\}_{j=0}^\infty$, $b = \{b_j\}_{j=0}^\infty$ — ненулевые, монотонно неубывающие (начиная с некоторого места), неотрицательные последовательности. Предположим, что $a_j \sim b_j$, $j \rightarrow \infty$. Тогда $U_+ * a(j) \sim U_+ * b(j)$, $j \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ произвольно. Выберем целое число $N = N(\varepsilon) > 0$ так, чтобы $a_N, b_N > 0$, $a_j \uparrow, b_j \uparrow$ при $j \uparrow$, начиная с номера N . При $j \geq N$ имеем

$$U_+ * a(j) = \left(\sum_{l=0}^{j-N} + \sum_{l=j-N+1}^j \right) a_{j-l} u_l^+ =: S_1(j) + T_1(j).$$

Обозначим через $S_2(j)$ и $T_2(j)$ аналогичные суммы для последовательности b . Справедливы неравенства

$$(6) \quad (1 - \varepsilon)S_2(j) \leq S_1(j) \leq (1 + \varepsilon)S_2(j).$$

Кроме того, $S_1(j), S_2(j) \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, так как, например,

$$S_1(j) \geq a_N \sum_{l=0}^{j-N} u_l^+ \sim a_N \frac{j-N}{\mu_+}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Последнее соотношение вытекает из дискретной элементарной теоремы восстановления для меры восстановления U_+ . Суммы $T_1(j)$ и $T_2(j)$ ограничены. Например,

$$T_1(j) \leq \max_{0 \leq l < N} a_l \sum_{l=j-N+1}^j u_l^+ \leq \max_{0 \leq l < N} a_l \sum_{l=0}^{2N} u_l^+ < \infty$$

(см. [2, гл. VI, § 10, теорема 1 (iii)]). Следовательно,

$$(7) \quad U_+ * a(j) \sim S_1(j), \quad U_+ * b(j) \sim S_2(j), \quad j \rightarrow \infty.$$

В силу произвольности ε , из (6) вытекает соотношение

$$(8) \quad S_1(j) \sim S_2(j), \quad j \rightarrow \infty.$$

Сопоставляя (7) и (8), убеждаемся в справедливости леммы. $\square$

Лемма 3. Пусть $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ — последовательность положительных чисел такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$. Тогда

$$\alpha_j = o\left(\sum_{l=0}^j \alpha_l\right), \quad j \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Выберем целое число $M > 0$. Имеем

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \alpha_j / \sum_{l=0}^j \alpha_l \leq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \alpha_j / \sum_{l=j-M+1}^j \alpha_l = \frac{1}{M}.$$

Ввиду произвольности M лемма доказана. $\square$

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Пусть $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ — полумультипликативная последовательность такая, что $\alpha_n \uparrow$ и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n+1}/\alpha_n$. Этот предел равен ρ_2 [11, п. 77, пример 4)]. Заметим, что величина ρ_2 определена, так как последовательность $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ можно продолжить на все множество $\mathbb{Z}$ с сохранением свойства полумультипликативности; например, $\alpha_n := 1$, $n \in \mathbb{Z}_-$. Предположим, что $g_j \sim c\alpha_j$ при $j \rightarrow \infty$ для некоторого $c > 0$. Исследуем асимптотику решения z уравнения (1). Она будет различной в зависимости от того, будет ли $\rho_2 = 1$, или $\rho_2 > 1$.

Теорема 2. Пусть $F = \{f_j\}_{j=-\infty}^\infty$ — арифметическое распределение вероятностей с шагом единица такое, что $\mu = \sum_{j=-\infty}^\infty j f_j \in (0, \infty)$, и пусть $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ — неубывающая полумультипликативная последовательность такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n+1}/\alpha_n = \rho_2 = 1$. Предположим, что $\sum_{j=-\infty}^{-1} \alpha_{|j|} \sum_{l=-\infty}^j f_l < \infty$ и $g_j \sim c\alpha_j$ при $j \rightarrow \infty$ для некоторого $c > 0$. Тогда последовательность $\{z_j\}_{j=0}^\infty$, определяемая формулой (3), является решением уравнения (1), причем

$$z_j \sim \frac{c}{\mu} \sum_{k=0}^j \alpha_k, \quad j \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Продолжим последовательность $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ на все множество $n \in \mathbb{Z}$ с сохранением свойства полумультипликативности, полагая $\alpha_n := \alpha_{|n|}$, $n \in \mathbb{Z}_-$. Для такой последовательности $\rho_1 = 1/\rho_2$. Обозначим через $\mathbf{1}_{\{0, \dots, N\}}$

характеристическую функцию множества $\{0, 1, \dots, N\}$. Пусть $z^{(N)}$ — решение уравнения (1), в котором g заменено на $g^{(N)} = \mathbf{1}_{\{0, \dots, N\}}g$:

$$z^{(N)}(j) = \sum_{k=-\infty}^j z^{(N)}(j-k) f_k + g^{(N)}(j), \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

По теореме 1 для решения $z^{(N)}$ имеет место формула (3). Устремляя $N \uparrow \infty$, получаем в силу теоремы о монотонной сходимости, что последовательность $z = \{\lim_{N \uparrow \infty} z^{(N)}(j)\}_{j=0}^\infty$ — решение уравнения (1), для которого справедлива формула (3). Конечность величин z_j , образующих решение, вытекает из леммы 1. Покажем, что

$$(9) \quad \frac{U_- * g(j)}{\alpha_j} \rightarrow c \sum_{l=-\infty}^0 u_l^- = cU_-(\mathbb{Z}_- \cup \{0\}), \quad j \rightarrow \infty.$$

Имеем

$$(10) \quad \frac{U_- * g(j)}{\alpha_j} = \sum_{l=-\infty}^0 \frac{g_{j-l}}{\alpha_j} u_l^-.$$

Выражение, стоящее под знаком суммирования, стремится к cu_l^- при $j \rightarrow \infty$. Кроме того, по лемме 1 оно мажорируется общим членом сходящегося ряда $\sum_{l=-\infty}^0 C\alpha_{-l}u_l^-$, так как $U_- \in W^{<\alpha>}$; здесь C выбрано так, чтобы $g_j \leq C\alpha_j$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, по теореме о мажорируемой сходимости можно перейти к пределу под знаком суммы в равенстве (10). Соотношение (9) доказано.

В лемме 2 положим $a_j = U_- * g(j)$ и $b_j = cU_-(\mathbb{Z}_- \cup \{0\})\alpha_j$. Ввиду соотношения (9) и леммы 2 для доказательства теоремы 2 достаточно установить, что при $j \rightarrow \infty$

$$(11) \quad cU_-(\mathbb{Z}_- \cup \{0\})U_+ * \alpha(j) \sim \frac{cU_-(\mathbb{Z}_- \cup \{0\})}{\mu_+} \sum_{k=0}^j \alpha_k = \frac{c}{\mu} \sum_{k=0}^j \alpha_k.$$

Имеем

$$U_+ * \alpha(j) = \sum_{l=0}^j \alpha_{j-l} u_l^+ = \frac{1}{\mu_+} \sum_{l=0}^j \alpha_l + \sum_{l=0}^j \alpha_{j-l} \left(u_l^+ - \frac{1}{\mu_+} \right) =: A_j + B_j.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем N так, чтобы $|u_l^+ - 1/\mu_+| < \varepsilon$ при $l \geq N$. Далее, в выражении для B_j разобьем сумму на два слагаемых:

$$B_j = \left(\sum_{l=0}^{N-1} + \sum_{l=N}^j \right) \alpha_{j-l} \left(u_l^+ - \frac{1}{\mu_+} \right) =: D_j + E_j.$$

При $j \rightarrow \infty$ имеем

$$D_j \leq \left(\frac{N}{\mu_+} + \max_{0 \leq l \leq N-1} u_l^+ \right) \sum_{l=j-N+1}^j \alpha_l \leq \left(\frac{N}{\mu_+} + \max_{0 \leq l \leq N-1} u_l^+ \right) N \alpha_j = o \left(\sum_{l=0}^j \alpha_l \right)$$

согласно лемме 3. Кроме того, $E_j \leq \varepsilon \sum_{l=N}^j \alpha_{j-l} \leq \varepsilon \sum_{l=0}^j \alpha_l$, откуда вытекает, что $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} E_j / \sum_{l=0}^j \alpha_l \leq \varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что

$$U_+ * \alpha(j) \sim \frac{1}{\mu_+} \sum_{k=0}^j \alpha_k,$$

а это эквивалентно (11) (см. (4)). Теорема 2 доказана полностью. $\square$

Теорема 3. Пусть $F = \{f_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ — арифметическое распределение вероятностей с шагом единица такое, что $\mu = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j f_j \in (0, \infty)$, и пусть $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неубывающая полумультипликативная последовательность такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n+1}/\alpha_n = \rho_2 > 1$. Предположим, что $\sum_{j=-\infty}^{-1} \alpha_{|j|} \sum_{l=-\infty}^j f_l < \infty$ и $\widehat{F}(1/\rho_2) < 1$. Допустим, что $g_j \sim c \alpha_j$ при $j \rightarrow \infty$ для некоторого $c > 0$. Тогда последовательность $\{z_j\}_{j=0}^{\infty}$, определяемая формулой (3), является решением уравнения (1), причем

$$z_j \sim c \widehat{U}\left(\frac{1}{\rho_2}\right) \alpha_j, \quad j \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Сначала рассуждаем, как при доказательстве предыдущей теоремы. Изменения касаются только асимптотического анализа на завершающей стадии. Выберем $C > c$ так, чтобы $g_l \leq C \alpha_l$ при всех $l \in \mathbb{Z}_+$. Выражение под знаком суммы в (10) стремится к $c \rho_2^{-l} u_l^+$ при $j \rightarrow \infty$ и мажорируется общим членом сходящегося по лемме 1 ряда $\sum_{l=-\infty}^0 C \alpha_{|l|} u_l^-$, так как

$$\frac{g_{j-l}}{\alpha_j} \leq \frac{C \alpha_{j-l}}{\alpha_j} \leq \frac{C \alpha_j \alpha_{|l|}}{\alpha_j} \leq C \alpha_{|l|}.$$

Поэтому

$$\frac{U_- * g(j)}{\alpha_j} \rightarrow c \sum_{l=-\infty}^0 \rho_2^{-l} u_l^- = c \widehat{U}_-\left(\frac{1}{\rho_2}\right), \quad j \rightarrow \infty.$$

Применяя лемму 2, видим, что

$$(12) \quad z_j \sim c \widehat{U}_-\left(\frac{1}{\rho_2}\right) \sum_{l=0}^j \alpha_{j-l} u_l^+, \quad j \rightarrow \infty.$$

Покажем, что

$$(13) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^j \frac{\alpha_{j-l}}{\alpha_j} u_l^+ = \sum_{l=0}^{\infty} \rho_2^{-l} u_l^+ = \widehat{U}_+\left(\frac{1}{\rho_2}\right) < \infty.$$

Выражение, стоящее под знаком суммы слева, стремится к $\rho_2^{-l} u_l^+$ при $j \rightarrow \infty$. Как уже отмечалось, $u_l^+ \sim 1/\mu_+$ при $l \rightarrow \infty$; следовательно, $u_l^+ \leq C_1 < \infty$ для некоторой постоянной C_1 при всех l . Пусть $0 < \varepsilon < 1 - 1/\rho_2$. Найдется k_0 такое, что $\alpha_k/\alpha_{k+1} \leq \varepsilon + 1/\rho_2 < 1$ при $k \geq k_0$. Представим сумму слева в (13) виде ряда $\sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0, \dots, j\}}(l) (\alpha_{j-l}/\alpha_j) u_l^+$; здесь $\mathbf{1}_{\{0, \dots, j\}}(l)$, $l \in \mathbb{Z}_+$, — характеристическая функция множества $\{0, \dots, j\}$. Пусть $j \geq k_0$. Имеем $\alpha_{j-l}/\alpha_j \leq (\varepsilon + 1/\rho_2)^l$ при $0 \leq l \leq j - k_0$, а при $j - k_0 < l \leq j$ справедливы неравенства ($M = \alpha_{k_0-1} \geq 1$)

$$\frac{\alpha_{j-l}}{\alpha_j} \leq \frac{M}{\alpha_j} \leq \frac{M}{\rho_2^j} \leq \frac{M}{\rho_2^l} \leq M \left(\varepsilon + \frac{1}{\rho_2} \right)^l,$$

так как $\rho_2 \leq \sqrt[j]{\alpha_j}$ при любом $j > 0$. Таким образом, ряд $\sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0, \dots, j\}}(l) (\alpha_{j-l}/\alpha_j) u_l^+$ мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_1 M \left(\varepsilon + \frac{1}{\rho_2} \right)^l.$$

Применяя теорему о мажорируемой сходимости для рядов, убеждаемся в справедливости формулы (13). Из (12) и (13) вытекает соотношение

$$z_j \sim c \hat{U}_- \left(\frac{1}{\rho_2} \right) \hat{U}_+ \left(\frac{1}{\rho_2} \right) \alpha_j = \hat{U} \left(\frac{1}{\rho_2} \right) \alpha_j, \quad j \rightarrow \infty.$$

Последнее равенство — следствие факторизационного тождества (5) при $|z| = 1/\rho_2$, в котором надлежит перейти к обратным величинам:

$$\hat{U}(z) = \frac{1}{1 - \hat{F}(z)} = \frac{1}{1 - \hat{F}_-(z)} \cdot \frac{1}{1 - \hat{F}_+(z)} = \hat{U}_-(z) \hat{U}_+(z),$$

что допустимо, так как

$$|\hat{F}(z)| \leq \hat{F}(1/\rho_2) < 1, \quad |\hat{F}_{\pm}(z)| \leq \hat{F}_{\pm}(1/\rho_2) < 1.$$

Теорема 3 доказана. $\square$

Рассмотрим теперь уравнение (1), в котором последовательность g правильно меняется на бесконечности с показателем $\beta \geq 0$. Введем определение [12, п. 1.1].

Определение 4. Положительная функция R называется *правильно меняющейся на бесконечности*, если она измерима на полуоси $[A, \infty)$, $A > 0$, и существует такое число $\beta \in \mathbb{R}$, что для произвольного $\lambda > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R(\lambda x)}{R(x)} \rightarrow \lambda^{\beta}.$$

При этом β называется *показателем функции R* .

Аналогично, последовательность $\{r_j\}_{j=0}^{\infty}$ будем называть *правильно меняющейся последовательностью с показателем $\beta \in \mathbb{R}$* в том и только в том случае, когда $r_j = R(j)$, где $R(x)$ — правильно меняющаяся на бесконечности функция с показателем β [12, п. 1.9].

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение о правильном изменении решения z уравнения (1).

Теорема 4. Пусть $F = \{f_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ — арифметическое распределение вероятностей с шагом единица такое, что $\mu = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j f_j \in (0, \infty)$, и пусть неотрицательная последовательность g правильно меняется на бесконечности с показателем $\beta \geq 0$, причем она монотонно не убывает, начиная с некоторого места j_0 . Предположим, что $\sum_{j=-\infty}^0 g_{|j|} \sum_{l=-\infty}^j f_l < \infty$. Тогда последовательность $\{z_j\}_{j=0}^{\infty}$, определяемая формулой (3), является решением уравнения (3), причем

$$z_j \sim \frac{j g_j}{(\beta + 1) \mu}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Укажем на изменения, которые достаточно внести в доказательство теоремы 2. Для последовательности g справедливы соотношения

$$(14) \quad g_{j+1} \sim g_j, \quad j \rightarrow \infty,$$

$$(15) \quad \sum_{l=0}^j g_l \sim \frac{j g_j}{\beta + 1}, \quad j \rightarrow \infty,$$

и найдутся полумультипликативная последовательность $\{\beta_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и положительные числа c_1 и c_2 такие, что

$$(16) \quad c_1 g_j \leq \beta_j \leq c_2 g_j,$$

начиная с некоторого номера j_1 ; при этом $\rho_1 = \rho_2 = 1$ для последовательности $\{\beta_n\}$. Это будет вытекать из оценки

$$\beta_n \leq c_2 g_n = c_2 R(n) \leq n^{\beta+1}$$

для правильно меняющейся последовательности $R(n)$ при достаточно больших n (см. [12, гл. 1, п. 1.5, свойство 1°]). Например,

$$0 \leq \ln \rho_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \beta_n}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\beta + 1) \ln n}{n} = 0.$$

Тогда $U_- \in W^{<\beta>}$ по лемме 1 и все выкладки из доказательства теоремы 2 верны при замене α_j на g_j .

Поясним формулы (14)–(16). Асимптотическая эквивалентность (14) вытекает из теоремы о представлении для правильно меняющихся функций (см. [12, гл. 1, п. 1.2, теорема 1.2]): найдется число $x_1 > 0$ такое, что при всех $x \geq x_1$

$$R(x) = x^\beta \exp \left\{ \eta(x) + \int_{x_1}^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right\},$$

где $\eta(x)$ ограниченная измеримая на $[x_1, \infty)$ функция такая, что $\eta(x) \rightarrow c$, $|c| < \infty$, и $\varepsilon(x)$ — непрерывная функция на $[x_1, \infty)$ такая, что $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Поэтому $R(x+y)/R(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $y \in \mathbb{R}$ и, следовательно, $g_{j-l}/g_j \rightarrow 1$ при $j \rightarrow \infty$ для любого $l \in \mathbb{Z}$. Формула (15) — следствие теоремы 1 (i) из [2, гл. VIII, § 9]: при фиксированном $\varkappa > 0$

$$tR(t) \sim (\beta + 1) \int_{\varkappa}^t R(x) dx, \quad t \rightarrow \infty.$$

Пусть $R(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, — положительная, неубывающая (начиная с некоторого места), правильно меняющаяся на бесконечности функция с неотрицательным показателем β . Тогда найдутся неубывающая полумультипликативная функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, и число $x_0 \in (0, \infty)$ такие, что

$$c_1 R(x) \leq \varphi(x) \leq c_2 R(x), \quad x \geq x_0,$$

где c_1 и c_2 — некоторые положительные постоянные (см. [13, предложение]). Введем новую полумультипликативную функцию $\psi(x)$, определенную на всей прямой, полагая $\psi(x) := \varphi(|x|)$. Пусть $\beta_n := \psi(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Это доказывает неравенства (16). $\square$

Замечание 1. Рассмотрим дискретное уравнение Вольтерра (или: дискретное уравнение восстановления, см. [8, XIII, § 4])

$$(17) \quad z_j = \sum_{k=0}^j z_{j-k} f_k + g_j, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

где $F = \{f_j\}_{j=0}^\infty$ — арифметическое распределение вероятностей с шагом единица. Это частный случай дискретного уравнения Винера-Хопфа (1). Следовательно, теоремы 2–4 также дают асимптотику решения дискретного уравнения Вольтерра (17).

Замечание 2. Если в теоремах 2, 3 взять $c = 0$, то их утверждения приобретают следующий вид соответственно: $z_j = o(\sum_{k=0}^j \alpha_k)$ и $z_j = o(\alpha_j)$ при $j \rightarrow \infty$.

REFERENCES

- [1] M.G. Krein, *Integral equations on the half-line with kernel depending on the difference of the arguments*, Uspekhi Mat. Nauk, **13**:5 (1958), 3–120. (In Russian). MR0102721
- [2] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. 2, New York etc.: John Wiley and Sons, Inc., 1966. MR0210154
- [3] J. Neveu, *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*, Paris: Masson et Cie, 1964. MR0198504
- [4] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Mineola: Dover Publications, 1999.
- [5] M.S. Sgibnev, *The discrete Wiener–Hopf equation with probability kernel of oscillating type*, Siberian Mathematical Journal, **60**:3 (2019), 516–525. MR3962420
- [6] G. Alsmeyer, *Erneuerungstheorie*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1991. MR1119301
- [7] M.S. Sgibnev, *On the homogeneous conservative Wiener–Hopf equation*, Sbornik: Mathematics, **198**:9 (2007), 1341–1350. MR2360794
- [8] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Vol. 1, Second Edition, John Wiley and Sons, Inc., New York, Chapman and Hall, Limited, London, 1957. MR0088081
- [9] I.M. Gelfand, D.A. Raikov, G.E. Shilov, *Commutative Normed Rings*, New York: Chelsea, 1964. MR0205105
- [10] M.S. Sgibnev, *Semimultiplicative moments of factors in Wiener–Hopf matrix factorization*, Sbornik: Mathematics **199**:2 (2008), 277–290. MR2402201
- [11] G.M. Fichtenholz, *A Course of Differential and Integral Calculus*. Vol. 1, Sixth Edition, Nauka (Fizmatlit), Moscow, 1966. (In Russian).
- [12] E. Seneta, *Regularly Varying Functions*, Berlin-Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1976. MR0453936
- [13] M.S. Sgibnev, *Submultiplicative moments of the supremum of a random walk with negative drift*, Statist. Probab. Lett., **32** (1997), 377–383. MR1602211

MIKHAIL SERGEEVICH SGIBNEV
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 4, KOPTYUGA AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
 E-mail address: sgibnev@math.nsc.ru