Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. V. Polikanova, On the curves with affine congruent arcs in affine space, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1612–1622

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.112>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.239.49.27

April 26, 2023, 17:10:36

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1612–1622 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.112

УДК 514.754

MSC 53A15

О ЛИНИЯХ С АФФИННО-ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ ДУГАМИ В
АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И.В. ПОЛИКАНОВА

ABSTRACT. It is proved in the article that the only curves with affine congruent arcs in the affine space are straight lines, parabolas, cubics.

Keywords: curve with affine congruent arcs, straight line, parabola, cubica, enica, moment curve, Veronese curve.

1. ВВЕДЕНИЕ

В статьях автора [1]–[3] исследуются кривые в аффинном пространстве, обладающие свойством *аффинной эквивалентности дуг*. Кривая рассматривается как одномерное многообразие, а дуги на ней – как гомеоморфные образы числового отрезка $[a, b]$ при вложениях его в линию (в тексте слова "линия" и "кривая" – синонимы). "Свойство аффинной эквивалентности дуг" означает, что для любых двух ориентированных дуг кривой существует аффинное преобразование пространства, отображающее одну дугу на другую с сохранением ориентации, т. е. начало дуги отображается в начало другой дуги, а конец – в конец. В дальнейшем аффинное преобразование пространства для краткости будем называть просто аффинным преобразованием.

В [1] доказано, что в n -мерном аффинном пространстве A^n таким свойством обладают, например, кривые моментов (эники) – линии, задаваемые в некоторой аффинной системе координат (сокращённо АСК) параметризациями $\vec{r} = (t, t^2, t^3, \dots, t^k)$, $t \in R$, $k = 1, \dots, n$. Проективный аналог – кривые Веронезе. В частности, при $k = 1, 2, 3$ это соответственно прямая, парабола и кубика (проекция скрученной кубики на 3-мерное вещественное аффинное пространство).

В [2] доказано, что единственными линиями с аффинно-эквивалентными дугами на аффинной плоскости являются прямая и парабола, а также их связные части. В дальнейшем в формулировках теорем выражение "а также их связные части" будем опускать.

POLIKANOVA, I.V., ON THE CURVES WITH AFFINE CONGRUENT ARCS IN AFFINE SPACE.

© 2019 Поликанова И.В.

Поступила 29 августа 2018 г., опубликована 15 ноября 2019 г.

Замечание 1. Очевидно, что, если линия γ обладает свойством аффинной эквивалентности дуг, то и всякая ей аффинно-эквивалентная линия обладает этим же свойством. Поэтому единственность понимается как класс аффинно-эквивалентных кривых.

Проблема. Определить классы аффинно-эквивалентных линий в A^3 , обладающих свойством аффинной эквивалентности дуг.

В статье приводится решение данной задачи в классе C^3 -гладких кривых. Доказывается, что аффинная эквивалентность дуг является признаком кубики в классе невырожденных C^3 -гладких кривых. Дифференциальные признаки кривой Веронезе установил В.В. Коннов [4].

Напомним некоторые понятия, относящиеся к гладким кривым в A^n . Пусть гладкая класса C^m линия в окрестности некоторой своей точки задаётся параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где радиус-вектор $\vec{r}$ текущей точки кривой является вектор-функцией от параметра t , пробегающего некоторый числовой промежуток I . Если векторы $\vec{r}'$, $\vec{r}''$, ..., $\vec{r}^{(k)}$ при $k \leq m$ линейно независимы, то k -мерная плоскость, определяемая ими и соответствующей тому же параметру точкой, называется k -ой *соприкасающейся плоскостью*. В частности, 1-ую соприкасающуюся плоскость принято называть касательной прямой. Точку линии назовём *точкой уплощения порядка k* , $k < \min(m, n)$, если в ней векторы $\vec{r}'$, $\vec{r}''$, ..., $\vec{r}^{(k)}$ линейно независимы, а векторы $\vec{r}'$, $\vec{r}''$, ..., $\vec{r}^{(k+1)}$ линейно зависимы. Точку уплощения 1-ого порядка обычно называют *точкой спрямления*. Понятия k -ой соприкасающейся плоскости и точки уплощения не зависят от выбора параметризации. Линию, содержащуюся в k -мерной плоскости, будем называть k -плоской. Линия, не содержащаяся ни в какой гиперплоскости, называется *невырожденной*.

Приведём несколько утверждений, на которые нам придётся сослаться.

Предложение 1.[3] *Аффинное преобразование пространства A^n отображает k -ую соприкасающуюся плоскость к гладкой линии в k -ую соприкасающуюся плоскость к её образу в соответствующей точке.*

Предложение 2.[3] *Если линия в A^n обладает свойством аффинной эквивалентности дуг, и некоторая её внутренняя точка является точкой уплощения k -ого порядка, то линия – k -плоская.*

Предложение 3.[3] *Если невырожденная линия в A^n , $n > 1$, обладает свойством аффинной эквивалентности дуг, то касательная к ней и соприкасающаяся плоскость в разных точках не параллельны.*

Предложение 4.[3] *Пусть γ – невырожденная линия в A^n , $n > 1$, обладающая свойством аффинной эквивалентности дуг; её произвольная точка O разбивает γ на две части γ_1 и γ_2 . Тогда всякая гиперплоскость, параллельная соприкасающейся гиперплоскости в точке O , пересекает каждую из частей γ_1 и γ_2 не более, чем в одной точке. В частности, соприкасающаяся гиперплоскость имеет с γ не более одной общей точки.*

Предложение 5.[5] *Линия в A^3 , локально являющаяся кубикой, сама есть кубика.*

Предложение 6.[2] *Единственными линиями с аффинно-эквивалентными дугами на аффинной плоскости являются прямая и парабола.*

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ.

Теорема 1. *Свойство аффинной эквивалентности дуг равносильно аффинной эквивалентности всяких двух ориентированных дуг с общим началом.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно. Покажем, что аффинная эквивалентность всяких двух дуг с общим началом влечёт аффинную эквивалентность любых двух дуг. Используем обозначение AB для ориентированной дуги с началом A и концом B . Для аффинного преобразования f запись $f(AB) = CD$ будет обозначать, что дуга CD является образом дуги AB при этом преобразовании, причём $f(A) = C$, $f(B) = D$. Пусть AB , CD – две произвольные ориентированные дуги линии, у которой всякие две дуги с общим началом аффинно эквивалентны. Тогда найдутся аффинные преобразования f_1, f_2, f_3, f_4 такие, что $f_1(AB) = AC$, $f_2(CA) = CB$, $f_3(BC) = BD$, $f_4(DB) = DC$. Обратим внимание, что $f_2(AC) = BC$, $f_4(BD) = CD$. Тогда композиция этих отображений $f_4 f_3 f_2 f_1$ является аффинным преобразованием, отображающим дугу AB в CD . Случай совпадения конца одной дуги с началом другой сводится к рассмотренному выше введением третьей дуги, концы которой не совпадают с концами данных дуг. По доказанному выше обе данные дуги аффинно-эквивалентны новой дуге, а, значит, и между собой. $\square$

Теорема 2. *Для любых двух ориентированных дуг кубики в A^3 существует единственное аффинное преобразование, отображающее одну дугу на другую.*

Доказательство. Пусть $M_0 M_1$ и $\widetilde{M}_0 \widetilde{M}_1$ две ориентированные дуги кубики γ , задаваемой в некоторой АСК параметризацией $\vec{r} = (t, t^2, t^3)$, $t \in R$. Если существует аффинное преобразование f пространства такое, что $f(M_0 M_1) = \widetilde{M}_0 \widetilde{M}_1$, то образом кубики γ при этом преобразовании является кубика $f(\gamma)$, имеющая с γ общую дугу $\widetilde{M}_0 \widetilde{M}_1$. Поскольку кубика конечным набором своих точек определяется однозначно [5], то $f(\gamma) = \gamma$. Таким образом, все аффинные преобразования пространства, отображающие какую-либо дугу кубики в другую её дугу, содержатся в группе $G(\gamma)$ аффинных преобразований, оставляющих кубик на месте.

Пусть аффинное преобразование f из $G(\gamma)$ задаётся формулами

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 \\ \bar{y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 \\ \bar{z} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3 \end{cases}$$

с ненулевым детерминантом $\det(a_{ij})$. Тогда $f(\gamma)$ задаётся параметризацией:

$$\vec{r} = (a_{1i}t^i + b_1, a_{2i}t^i + b_2, a_{3i}t^i + b_3).$$

Здесь, как принято, предполагается суммирование одночленов по индексам, встречающимся дважды на разных уровнях: $i = 1, 2, 3$, причём, верхние индексы всюду означают степени. Так как $f(\gamma) = \gamma$, то можно перейти к новому параметру p для линии $f(\gamma)$, полагая:

$$a_{ji}t^i + b_j = p^j, \quad j = 1, 2, 3.$$

В результате получаем два тождества:

$$a_{2i}t^i + b_2 = (a_{1i}t^i + b_1)^2, \quad a_{3i}t^i + b_3 = (a_{1i}t^i + b_1)^3.$$

Распишем подробно первое тождество:

$$\begin{aligned} a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3 + b_2 &= a_{11}^2t^2 + 2a_{11}a_{12}t^3 + 2a_{11}a_{13}t^4 + \\ &+ a_{12}^2t^4 + 2a_{12}a_{13}t^5 + a_{13}^2t^6 + b_1^2 + 2a_{11}b_1t + 2a_{12}b_1t^2 + 2a_{13}b_1t^3. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , получим:

$$\begin{cases} b_2 = b_1^2 \\ a_{21} = 2a_{11}b_1 \\ a_{22} = 2a_{12}b_1 + a_{11}^2 \\ a_{23} = 2a_{11}a_{12} + 2a_{13}b_1 \\ 0 = 2a_{11}a_{13} + a_{12}^2 \\ 0 = 2a_{12}a_{13} \\ 0 = a_{13}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{12} = 0 \\ a_{23} = 0 \\ a_{22} = a_{11}^2 \\ a_{21} = 2a_{11}b_1 \\ b_2 = b_1^2 \end{cases}.$$

С учётом найденных коэффициентов второе тождество перепишем в виде:

$$a_{31}t + a_{32}t^2 + a_{33}t^3 + b_3 = (a_{11}t + b_1)^3$$

или

$$a_{31}t + a_{32}t^2 + a_{33}t^3 + b_3 = a_{11}^3t^3 + 3a_{11}^2b_1t^2 + 3a_{11}b_1^2t + b_1^3.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , получим:

$$\begin{cases} a_{31} = 3a_{11}b_1^2 \\ a_{32} = 3a_{11}^2b_1 \\ a_{33} = a_{11}^3 \\ b_3 = b_1^3 \end{cases}.$$

После обозначения $a_{11} = a$, $b_1 = b$ формулы аффинного преобразования f примут вид:

$$\begin{cases} \bar{x} = ax + b \\ \bar{y} = 2abx + a^2y + b^2 \\ \bar{z} = 3ab^2x + 3a^2by + a^3z + b^3 \end{cases}.$$

Видим, что группа $G(\gamma)$ – двухпараметрическая, зависящая от параметров a и b . По первым координатам $x_0, x_1, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1$, точек M_0, M_1 и $\widetilde{M}_0, \widetilde{M}_1$ соответственно, мы однозначно определим параметры a и b аффинного преобразования, отображающего дугу M_0M_1 в дугу $\widetilde{M}_0\widetilde{M}_1$ из системы:

$$\begin{cases} \tilde{x}_0 = ax_0 + b \\ \tilde{x}_1 = ax_1 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0}{x_1 - x_0} \\ b = \frac{\tilde{x}_0 x_1 - \tilde{x}_1 x_0}{x_1 - x_0} \end{cases}.$$

□

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Теорема 3. Единственными линиями с аффинно-эквивалентными дугами в A^3 в классе C^3 -гладких кривых являются прямые, параболы или кубики.

Доказательство. Этапы доказательства. Принимая во внимание теорему 1, сводим задачу к поиску линий, у которых аффинно-эквивалентны все дуги с фиксированным началом. Закреплённость общего начала рассматриваемого семейства дуг позволяет выявить в специальном образом подобранной АСК вид аффинных преобразований, осуществляющих их эквивалентность. Отображение свободного конца дуг этого семейства в конец фиксированной дуги того же семейства моделируется системой функциональных и дифференциальных уравнений от семи неизвестных функций, решение которой и определяет вид кривой (локально).

Пусть гладкая класса C^3 линия γ в A^3 обладает свойством аффинной эквивалентности дуг и не является плоской. Выберем АСК $Oxyz$ так, что бы начало координат O принадлежало линии γ , ось Ox была направлена вдоль касательной к γ в точке O , а ось Oy лежала в соприкасающейся плоскости к γ в точке O . Гладкость класса C^3 гарантирует однозначность проектирования некоторой окрестности точки O на касательную в этой точке. Поэтому в качестве параметра t текущей точки $M \in \gamma$ возьмём её проекцию на ось Ox вдоль координатной плоскости Oyz . Тогда линия γ

в окрестности точки O будет задаваться параметризацией $\vec{r} = (t, y(t), z(t))$. Можно считать, что параметр $t \in [t_0, t_1]$, и $0 \in (t_0, t_1)$. Функции $y(t)$ и $z(t)$ трижды дифференцируемы. Так как $O \in \gamma$, то из равенства $(0, 0, 0) = (t, y(t), z(t))$ находим параметр, соответствующий точке $O : t = 0$, и $y(0) = z(0) = 0$. Поскольку ось Ox направлена вдоль касательной к γ в точке O , то касательный вектор $\vec{r}'(0) = (1, y'(0), z'(0))$ к γ в точке O коллинеарен вектору $(1, 0, 0)$. Следовательно, $y'(0) = z'(0) = 0$. Наконец, в силу того, что соприкасающаяся плоскость к γ в точке O есть плоскость Oxy , вектор $\vec{r}''(0) = (0, y''(0), z''(0))$ компланарен плоскости $z = 0$, а, значит, $z''(0) = 0$. Так как линия невырождена, то согласно предложению 2 она не содержит точек уплощения. Поэтому векторы $\vec{r}'(0) = (1, 0, 0)$, $\vec{r}''(0) = (0, y''(0), 0)$, $\vec{r}'''(0) = (0, y'''(0), z'''(0))$ не компланарны. Следовательно, $y''(0) \neq 0$ и $z'''(0) \neq 0$.

Пусть γ_0 – дуга линии, соответствующая изменению параметра $t \in [0, a]$, γ_s – дуга линии, соответствующая изменению параметра $t \in [0, s]$, $0 < s < a$. Обе эти дуги задаются одними и теми же формулами, отличаясь лишь областью изменения параметра. Так как дуги γ_0 и γ_s аффинно-эквивалентны, то существует аффинное преобразование (1) пространства, отображающее дугу γ_s в γ_0 так, что $f(O) = O$. Тогда линия $f(\gamma_s)$ задаётся параметрическими уравнениями:

$$(2) \quad \begin{cases} x = a_{11}t + a_{12}y(t) + a_{13}z(t) + b_1 \\ y = a_{21}t + a_{22}y(t) + a_{23}z(t) + b_2 \\ z = a_{31}t + a_{32}y(t) + a_{33}z(t) + b_3 \end{cases}.$$

Подставляя в формулы $t = 0$, получим: $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. По предложению 1 касательный вектор $(a_{11} + a_{12}y'(0) + a_{13}z'(0), a_{21} + a_{22}y'(0) + a_{23}z'(0), a_{31} + a_{32}y'(0) + a_{33}z'(0)) = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$ к $f(\gamma_s)$ в точке O коллинеарен вектору $(1, 0, 0)$, поэтому $a_{21} = a_{31} = 0$, а соприкасающаяся плоскость к $f(\gamma_s)$ в точке O совпадает с Oxy , и, значит, вектор $(a_{12}y''(0) + a_{13}z''(0), a_{22}y''(0) + a_{23}z''(0), a_{32}y''(0) + a_{33}z''(0)) = (a_{12}y''(0), a_{22}y''(0), a_{32}y''(0))$ компланарен плоскости $z = 0$. Следовательно $a_{32}y''(0) = 0$. Так как $y''(0) \neq 0$, то $a_{32} = 0$. Таким образом, формулы (2) упрощаются:

$$(3) \quad \begin{cases} x = a_{11}t + a_{12}y(t) + a_{13}z(t) \\ y = a_{22}y(t) + a_{23}z(t) \\ z = a_{33}z(t) \end{cases}.$$

Поскольку $\gamma_0 = f(\gamma_s)$, то найдётся параметр $p \in [0, a]$, такой, что

$$(4) \quad \begin{cases} p = a_{11}t + a_{12}y(t) + a_{13}z(t) \\ y(p) = a_{22}y(t) + a_{23}z(t) \\ z(p) = a_{33}z(t) \end{cases}.$$

Отсюда следует:

$$(5) \quad \begin{cases} y(a_{11}t + a_{12}y(t) + a_{13}z(t)) = a_{22}y(t) + a_{23}z(t) \\ z(a_{11}t + a_{12}y(t) + a_{13}z(t)) = a_{33}z(t) \end{cases}.$$

Продифференцируем равенства (5) трижды, учитывая обозначение для p из формул (4). Результат первого дифференцирования:

$$(6) \quad \begin{cases} y'(p)p' = a_{22}y'(t) + a_{23}z'(t) \\ z'(p)p' = a_{33}z'(t) \end{cases}.$$

Результат второго дифференцирования:

$$(7) \quad \begin{cases} y''(p)(p')^2 + y'(p)p'' = a_{22}y''(t) + a_{23}z''(t) \\ z''(p)(p')^2 + z'(p)p'' = a_{33}z''(t) \end{cases}.$$

Результат третьего дифференцирования:

$$(8) \quad \begin{cases} y'''(p)(p')^3 + 3y''(p)p'p'' + y'(p)p''' = a_{22}y'''(t) + a_{23}z'''(t) \\ z'''(p)(p')^3 + 3z''(p)p'p'' + z'(p)p''' = a_{33}z'''(t) \end{cases}.$$

Подставим в формулы (6) - (8) значение $t = 0$. Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} y(0) = z(0) = y'(0) = z'(0) = z''(0) = 0, \quad y''(0) \neq 0, \quad z'''(0) \neq 0, \\ p(0) = a_{11} \cdot 0 + a_{12}y(0) + a_{13}z(0) = 0, \quad p'(0) = a_{11} + a_{12}y'(0) + a_{13}z'(0) = a_{11}, \\ p''(0) = a_{12}y''(0) + a_{13}z''(0) = a_{12}y''(0), \quad p'''(0) = a_{12}y'''(0) + a_{13}z'''(0), \end{aligned}$$

будем иметь:

$$(9) \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ y''(0)a_{11}^2 = a_{22}y''(0) \\ 0 = 0 \\ y'''(0)a_{11}^3 + 3y''(0)^2a_{11}a_{12} = a_{22}y'''(0) + a_{23}z'''(0) \\ z'''(0)a_{11}^3 = a_{33}z'''(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{22} = a_{11}^2 \\ a_{33} = a_{11}^3 \end{cases}.$$

Итак, аффинное преобразование, отображающее дугу γ_s в γ_0 так, что $f(O) = O$, после переобозначений $a_{11} = a$, $a_{12} = b$, $a_{13} = c$, $a_{23} = e$ имеет вид:

$$(10) \quad \begin{cases} \bar{x} = ax + by + cz \\ \bar{y} = a^2y + ez \\ \bar{z} = a^3z \end{cases}.$$

Пусть теперь линия γ параметризована произвольным параметром t , выбор которого определится позднее: $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$. Обозначим через $M(t)$ точку линии γ , соответствующую параметру t . Пусть $M \in \gamma_0$ – произвольная точка с координатами (X, Y, Z) . В силу предложения 3 касательная прямая в ней не параллельна соприкасающейся плоскости Oxy . Тогда аппликаты касательных векторов в точке M не равны 0, а потому один из касательных векторов имеет вид $(X', Y', 1)$. Пусть уравнение соприкасающейся плоскости к γ в точке M имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$. Найдём аффинное преобразование f_t , переводящее переменную дугу $OM(t)$ в фиксированную дугу OM . Как показано выше, оно задаётся формулами (10). Только теперь коэффициенты a , b , c , e будут функциями параметра t . В дальнейшем параметр t в записи уравнений будем для краткости опускать. Так как $f_t(M(t)) = M$, то

$$(11) \quad \begin{cases} X = ax + by + cz \\ Y = a^2y + ez \\ Z = a^3z \end{cases}.$$

Поскольку касательный вектор $\vec{r}' = (x'(t), y'(t), z'(t))$ к γ в точке $M(t)$ соответствующим линейным преобразованием отображается в вектор

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a^2 & e \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax' + by' + cz' \\ a^2y' + ez' \\ a^3z' \end{pmatrix},$$

коллинеарный вектору $(X', Y', 1)$, то найдётся функция $\lambda(t)$, такая, что

$$(12) \quad \begin{cases} \lambda X' = ax' + by' + cz' \\ \lambda Y' = a^2y' + ez' \\ \lambda = a^3z' \end{cases}.$$

А учитывая, что соприкасающаяся плоскость к γ в точке $M(t)$ при аффинном преобразовании f_t перейдёт в соприкасающуюся плоскость к γ в точке M , а, значит, вектор $\vec{r}'' = (x''(t), y''(t), z''(t))$ соответствующим линейным преобразованием отобразится в вектор

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a^2 & e \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax'' + by'' + cz'' \\ a^2y'' + ez'' \\ a^3z'' \end{pmatrix},$$

компланарный плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то

$$(13) \quad A(ax'' + by'' + cz'') + B(a^2y'' + ez'') + Ca^3z'' = 0.$$

Таким образом, получили систему функциональных уравнений (11)-(13) с неизвестными функциями $x, y, z, \lambda, a, b, c, e$. Здесь и далее заглавными буквами обозначаются константы. Из системы видно, что удобно в качестве параметра t принять $\sqrt[3]{z}$. По предложению 4 каждая из полуокрестностей точки O однозначно проектируется на ось Oz вдоль векторного подпространства, параллельного соприкасающейся плоскости Oxy . Поэтому в каждой из полуокрестностей точки O такой выбор параметра оправдан. Тогда система (11)-(13) примет вид:

$$(14) \quad \begin{cases} (i) & X & = & ax + by + ct^3 \\ (ii) & Y & = & a^2y + et^3 \\ (iii) & Z & = & a^3t^3 \\ (j) & \lambda X' & = & ax' + by' + 3ct^2 \\ (jj) & \lambda Y' & = & a^2y' + 3et^2 \\ (jjj) & \lambda & = & 3a^3t^2 \\ (k) & A(ax'' + by'' + 6ct) + B(a^2y'' + 6et) + 6Ca^3t & = & 0. \end{cases}.$$

Решим её. Из (iii) и (jjj) имеем:

$$(15) \quad a = \frac{Z^{\frac{1}{3}}}{t}, \quad \lambda = \frac{3Z}{t}.$$

Далее, умножая (ii) на 3 и вычитая из полученного уравнения (jj), умноженное на t , получим уравнение:

$$3Y - \lambda Y't = a^2(3y - y't),$$

приводящееся после подстановки полученных выше выражений для a и λ к уравнению:

$$3Y - \frac{3Z}{t}Y't = \frac{Z^{\frac{2}{3}}}{t^2}(3y - y't).$$

После обозначения $K = \frac{3(Y - ZY')}{Z^{\frac{2}{3}}}$ уравнение приводится к виду Бернулли:

$$y' - \frac{3}{t}y = -Kt.$$

Будем искать решение в виде произведения двух функций u и v от t , именно: $y = uv$. Подставляя в уравнение Бернулли, получим:

$$u'v + uv' - \frac{3uv}{t} = -Kt$$

или

$$u'v + u\left(v' - \frac{3v}{t}\right) = -Kt.$$

Это уравнение сводится к системе двух уравнений

$$\begin{cases} v' - \frac{3v}{t} = 0 \\ u'v = -Kt \end{cases}.$$

Первое даёт решение $v = t^3$. Подставляя его во второе уравнение, получим $u' = -\frac{K}{t^2}$. Решением этого уравнения является функция $u = \frac{K}{t} + C_1$, где C_1 – постоянная. Окончательно получаем

$$(16) \quad y = Kt^2 + C_1t^3.$$

Из (ii) выражаем $e = \frac{Y - a^2y}{t^3}$. Подставляя найденные y и a , получим:

$$(17) \quad e = \frac{Y - \frac{Z^{\frac{2}{3}}}{t^2}(Kt^2 + C_1t^3)}{t^3} = \frac{Y - Z^{\frac{2}{3}}K}{t^3} - \frac{Z^{\frac{2}{3}}C_1}{t^2}.$$

Вычитая из (i), умноженного на 3, уравнение (j), умноженное на t , придём к уравнению:

$$3X - \lambda X't = 3ax + 3by - ax't - by't.$$

Подставим в него найденные выше λ , a и y :

$$3X - \frac{3ZX'}{t}t = 3\frac{Z^{\frac{1}{3}}}{t}x + 3b(Kt^2 + C_1t^3) - \frac{Z^{\frac{1}{3}}}{t}x't - b(2Kt + 3C_1t^2)t$$

или

$$3X - 3ZX' = \frac{3Z^{\frac{1}{3}}}{t}x + 3bKt^2 + 3bC_1t^3 - Z^{\frac{1}{3}}x' - 2Kbt^2 - 3bC_1t^3,$$

или

$$\frac{3(X - ZX')}{Z^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{t}x - x' + \frac{K}{Z^{\frac{1}{3}}}bt^2.$$

После обозначения $L = \frac{3(X - ZX')}{Z^{\frac{1}{3}}}$, приходим к уравнению вида Бернулли:

$$x' - \frac{3x}{t} = -L + \frac{K}{Z^{\frac{1}{3}}}bt^2.$$

Будем искать решение в виде произведения двух функций p и q от t , именно: $y = pq$.

Подставляя в уравнение Бернулли, получим:

$$p'q + pq' - \frac{3pq}{t} = -L + \frac{K}{Z^{\frac{1}{3}}}bt^2$$

или

$$p'q + p\left(q' - \frac{3q}{t}\right) = -L + \frac{K}{Z^{\frac{1}{3}}}bt^2.$$

Это уравнение сводится к системе двух уравнений

$$\begin{cases} q' - \frac{3q}{t} = 0 \\ p'q = -L + \frac{K}{Z^{\frac{1}{3}}}bt^2 \end{cases}.$$

Первое даёт решение $q = t^3$. Подставляя его во второе уравнение, получим

$$p' = -\frac{L}{t^3} + \frac{K}{Z^{\frac{1}{3}}}\frac{b}{t}.$$

Решением этого уравнения является функция $p = \frac{L}{2t^2} + \frac{K}{Z^{\frac{1}{3}}}\int \frac{b}{t}dt$. Окончательно получаем

$$(18) \quad x = \frac{L}{2}t + \frac{Kt^3}{Z^{\frac{1}{3}}}\int \frac{b}{t}dt.$$

Из (i) :

$$c = \frac{X - ax - by}{t^3}.$$

После подстановки выражений для a , x , y из формул (15), (16), (18) получим:

$$c = \left[X - \frac{Z^{\frac{1}{3}}}{t} \left(\frac{L}{2}t + \frac{Kt^3}{Z^{\frac{1}{3}}}\int \frac{b}{t}dt \right) - b(Kt^2 + C_1t^3) \right] t^{-3}$$

или

$$(19) \quad c = \frac{2X - Z^{\frac{1}{3}}L}{2t^3} - \frac{K}{t}\int \frac{b}{t}dt - \frac{bK}{t} - bC_1.$$

Подставим выражения для функций x , y , a , c , e из формул (15)-(19) в уравнение (k), системы (14), предварительно вычислив вторые производные от x и y :

$$x' = \frac{L}{2} + \frac{3Kt^2}{Z^{\frac{1}{3}}}\int \frac{b}{t}dt + \frac{Kbt^2}{Z^{\frac{1}{3}}}, \quad y' = 2Kt + 3C_1t^2,$$

$$x'' = \frac{6Kt}{Z^{\frac{1}{3}}}\int \frac{b}{t}dt + \frac{5Kbt}{Z^{\frac{1}{3}}}, \quad y'' = 2K + 6C_1t.$$

Тогда

$$ax'' + by'' + 6ct = \frac{Z^{\frac{1}{3}}}{t} \left(\frac{6Kt}{Z^{\frac{1}{3}}}\int \frac{b}{t}dt + \frac{5Kbt}{Z^{\frac{1}{3}}} \right) + b(2K + 6C_1t) +$$

$$\begin{aligned}
& +6 \left(\frac{2X - Z^{\frac{1}{3}}L}{2t^3} - \frac{K}{t} \int \frac{b}{t} dt - \frac{bK}{t} - bC_1 \right) t = \\
& = 6K \int \frac{b}{t} dt + 5Kb + 2bK + 6bC_1t + \frac{3(2X - Z^{\frac{1}{3}}L)}{t^2} - 6K \int \frac{b}{t} dt - 6bK - 6bC_1t.
\end{aligned}$$

Итак,

$$(20) \quad ax'' + by'' + 6ct = Kb + \frac{3(2X - Z^{\frac{1}{3}}L)}{t^2}.$$

Далее

$$a^2y'' + 6et = \frac{Z^{\frac{2}{3}}}{t^2}(2K + 6C_1t) + 6t \left(\frac{Y - Z^{\frac{2}{3}}K}{t^3} - \frac{Z^{\frac{2}{3}}C_1}{t^2} \right).$$

Получили

$$(21) \quad a^2y'' + 6et = \frac{6Y - 4Z^{\frac{2}{3}}K}{t^2}.$$

Подставим выражения из формул (20), (21), (15) в уравнение (k) системы (14):

$$A \left(Kb + \frac{3(2X - Z^{\frac{1}{3}}L)}{t^2} \right) + B \left(\frac{6Y - 4Z^{\frac{2}{3}}K}{t^2} \right) + 6C \left(\frac{Z^{\frac{1}{3}}}{t} \right)^3 t = 0.$$

Выразим из него неизвестную функцию b :

$$(22) \quad b = \frac{M}{t^2}, \quad \text{где} \quad M = -\frac{6AX + 6BY + 6CZ - 3ALZ^{\frac{1}{3}} - 4BKZ^{\frac{2}{3}}}{AK}$$

Через неё у нас выражены функции x и c . Подставим формулу для b в (18):

$$x = \frac{L}{2}t + \frac{Kt^3}{Z^{\frac{1}{3}}} \int \frac{M}{t^3} dt = \frac{L}{2}t - \frac{KM}{2Z^{\frac{1}{3}}}t + C_2t^3,$$

где C_2 – постоянная. Окончательно после обозначения $N = \frac{LZ^{\frac{1}{3}} - KM}{2Z^{\frac{1}{3}}}$ получим:

$$x = Nt + C_2t^3.$$

Доказали, что C^3 -гладкая линия с аффинно-эквивалентными дугами в каждой из полуокрестностей точки O задаётся параметрическими уравнениями вида:

$$(23) \quad \vec{r} = (Nt + C_2t^3, Kt^2 + C_1t^3, t^3),$$

где N, K, C_1, C_2 – постоянные.

Покажем, что и в окрестности каждой своей точки она задаётся параметризацией того же вида, именно: если одна из полуокрестностей характеризуется коэффициентами N, K, C_1, C_2 , и $t \in [0, a)$, а другая – N', K', C_1', C_2' , и $t \in (-a, 0]$, $a > 0$, то соответственные коэффициенты равны. Действительно, в силу C^3 -гладкости линии производные до третьего порядка включительно вектор-функций обеих параметризаций в точке O , соответствующей параметру $t = 0$, должны совпадать. Приравнявая их, получим:

$$(N + 3C_2t^2, 2Kt + 3C_1t^2, 3t^2) = (N' + 3C_2't^2, 2K't + 3C_1't^2, 3t^2) \Big|_{t=0} \Rightarrow (N, 0, 0) = (N', 0, 0),$$

$$(6C_2t, 2K + 6C_1t, 6t) = (6C_2't, 2K' + 6C_1't, 6t) \Big|_{t=0} \Rightarrow (0, 2K, 0) = (0, 2K', 0),$$

$$(6C_2, 6C_1, 6) = (6C_2', 6C_1', 6).$$

Получили $N = N', K = K', C_1 = C_1', C_2 = C_2'$. Итак, линия γ локально задаётся параметризацией вида (23).

Покажем теперь, что N и K не нули. Вычислим смешанное произведение $\vec{r}'\vec{r}''\vec{r}'''$:

$$\begin{aligned} \vec{r}'\vec{r}''\vec{r}''' &= \begin{vmatrix} N + 3C_2t^2 & 2Kt + 3C_1t^2 & 3t^2 \\ 6C_2t & 2K + 6C_1t & 6t \\ 6C_2 & 6C_1 & 6 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} N + 3C_2t^2 & 2Kt + 3C_1t^2 & 3t^2 \\ 6C_2t & 6C_1t & 6t \\ 6C_2 & 6C_1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} N + 3C_2t^2 & 2Kt + 3C_1t^2 & 3t^2 \\ 0 & 2K & 0 \\ 6C_2 & 6C_1 & 6 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Первый определитель обращается в ноль, поскольку последние две строки в нём пропорциональны. Поэтому

$$\vec{r}'\vec{r}''\vec{r}''' = 12K(N + 3C_2t^2) - 12KC_2 \cdot 3t^2 = 12KN.$$

Так как по условию линия γ не плоская, то по предложению 2 она не содержит точек уплощения. Поэтому $\vec{r}'\vec{r}''\vec{r}''' \neq 0$. Следовательно, $K \neq 0$ и $N \neq 0$.

Значит, линия (23) получается из линии $\vec{r} = (t, t^2, t^3)$ в результате аффинного преобразования

$$\begin{cases} \bar{x} = Nx + C_2z \\ \bar{y} = Ky + C_1z \\ \bar{z} = z \end{cases}$$

с ненулевым определителем KN .

Мы доказали, что неплоская C^3 -гладкая линия с аффинно-эквивалентными дугами является локально кубикой. Согласно предложению 5 она является кубикой в целом. Итак, выяснили, что невырожденные линии с аффинно-эквивалентными дугами надо искать в классе кубик. Согласно теореме 2 кубики действительно обладают свойством аффинной эквивалентности дуг.

Остаётся рассмотреть случай вырождения линии γ с аффинно-эквивалентными дугами. Если линия содержит точку спрямления, то по предложению 2 она содержится в прямой. Пусть линия γ лежит в некоторой плоскости σ и не содержит точек спрямления, а, значит, и прямолинейных отрезков. Тогда всякое аффинное преобразование пространства, отображающее одну дугу линии γ на другую, отображает плоскость σ в себя. Поэтому его сужение на плоскость σ является аффинным преобразованием этой плоскости. Следовательно γ является кривой с аффинно-эквивалентными дугами в плоскости σ , которую можно рассматривать как A^2 . По предложению 6 кривая γ – парабола. $\square$

Заметим, что в случае аффинной плоскости аналогичный результат получен без априорных соображений о гладкости линии и является более сильным в том плане, что параболичность плоской линии 2-ого порядка вытекает из более слабого условия аффинной эквивалентности неориентированных дуг.

REFERENCES

- [1] I.V. Polikanova, *On the curves with affine congruent arcs in n -dimensional affine space*, Collected articles of scientific conference “MAK-2015: Mathematicians for Altay Region”, Barnaul, 2015, 34–38.
- [2] I.V. Polikanova, *On flat curves with affine congruent arcs*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 882–889. MR3858937
- [3] I.V. Polikanova, *Some properties of curves with affine congruent arcs*, Proceedings of the Seminar on geometry and mathematical modeling, Alt. un-ty Press, Barnaul, **2** (2016), 55–61.
- [4] V.V. Konnov, *On differential-geometric characteristics of Veronese curves*, Math.Sb., **7**:191 (2000), 73–88. MR1809929
- [5] I.V. Polikanova, *The definiteness of the enica by a finite set of points*, Collected articles of scientific conference “MAK: Mathematicians for Altay Region”, Barnaul, 2017, 37–40.

IRINA VIKTOROVNA POLIKANOVA
ALTAI STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY,
6(1), SOVIET STR.,
BARNAUL, 656002, RUSSIA
E-mail address: anirix1@yandex.ru