Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

L. I. Kononenko, Parametrized integral manifolds of singularly perturbed systems in the critical case for problems of chemical kinetics, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1640–1653

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.115>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 35.173.219.12

April 26, 2023, 15:00:24

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1640–1653 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.115

УДК 517.928

MSC 34D15, 34C45

ПАРАМЕТРИЗОВАННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ В
КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ДЛЯ ЗАДАЧ ХИМИЧЕСКОЙ
КИНЕТИКИ

Л.И. КОНОНЕНКО

ABSTRACT. A constructive algorithm is proposed for calculating the coefficients of the asymptotic expansion of a slow motions integral manifold represented in parametric form. The existence and uniqueness theorem is proven for a parametrized integral manifold of a singularly perturbed system in a degenerate case.

Keywords: asymptotic expansion, integral manifold, singularly perturbed system, slow motions.

ВВЕДЕНИЕ

Теория сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений традиционно связывалась с проблемами нелинейной механики. С интенсивным развитием этой теории её методы стали активно применяться для решения широкого круга задач других областей естествознания, в частности, химической кинетики. Это объясняется тем обстоятельством, что системы с малым параметром естественным образом возникают при моделировании и исследовании объектов, характерной особенностью которых является наличие процессов, имеющих существенно различающиеся скорости релаксации. По этой причине для качественного анализа динамических характеристик моделей химической кинетики целесообразно использовать метод интегральных многообразий. Этот

KONONENKO, L.I., PARAMETRIZED INTEGRAL MANIFOLDS OF SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS IN THE CRITICAL CASE FOR PROBLEMS OF CHEMICAL KINETICS.

© 2019 Кононенко Л.И.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2 (проект № 0314-2016-0007) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00057).

Поступила 15 июля 2019 г., опубликована 18 ноября 2019 г.

метод позволяет свести качественный анализ полной системы к исследованию интегрального многообразия медленных движений и качественному анализу системы меньшей размерности на интегральном многообразии. Под интегральным многообразием системы дифференциальных уравнений, как обычно, понимается некоторое множество в расширенном фазовом пространстве, состоящее из интегральных кривых этой системы.

Метод интегральных многообразий, разработанный в исследованиях Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского, О.Б. Лыковой, А.Б. Васильевой, В.А. Бутузова, К.В. Задираки, Я.С. Бариса, В.И. Фодчука, А. М. Самойленко, В. В. Стрыгина и др. [1–8], был адаптирован для систем уравнений, возникающих в задачах химической кинетики, В.М. Гольдштейном, В.А. Соболевым [9].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$(1) \quad \varepsilon \dot{x} = f(x, t, \varepsilon),$$

где $x \in \mathbb{R}^{n+m}$, $t \in \mathbb{R}$ — переменная, имеющая смысл времени, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\dot{x}$ — производная по времени, вектор-функция f является $(m+n)$ -мерной достаточно гладкой в интересующей области изменения переменных.

Под интегральным многообразием системы (1) понимается некоторое множество в пространстве $\mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}$, состоящее из интегральных кривых этой системы. При использовании метода интегральных многообразий для решения конкретных задач центральным становится вопрос о вычислении функции, описывающей интегральное многообразие. Одним из способов приближенного вычисления функции является использование асимптотического разложения её по степеням малого параметра.

Под асимптотическим приближением (или асимптотическим представлением) по параметру ε для решения $x(t, \varepsilon)$ уравнения (1) понимается функция $X(t, \varepsilon)$, такая, что разность $\sigma = x(t, \varepsilon) - X(t, \varepsilon)$, называемая остаточным членом асимптотического приближения, мала (в некоторой норме) в данной области независимого переменного t , если только параметр ε достаточно мал. Порядок малости σ относительно ε называется точностью асимптотического приближения [3].

Ряд, частичная сумма которого является асимптотическим приближением с точностью $O(\varepsilon^{m+1})$ к некоторой функции $x(t, \varepsilon)$, будем называть асимптотическим рядом (или асимптотическим разложением) для $x(t, \varepsilon)$. Будем искать медленное интегральное многообразие и уравнение движения по нему в виде асимптотических рядов по степеням ε .

Условия, при которых будет построена асимптотика решения уравнения (1), следующие [10].

I. Пусть функция $f(x, t, \varepsilon)$ бесконечно дифференцируема в области $\mathcal{D}(x, t, \varepsilon) = \mathcal{D}(x, t) \times (0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0)$, где $\mathcal{D}(x, t)$ — некоторая область в пространстве переменных (x, t) , ε_0 — некоторая постоянная.

II. Пусть вырожденное уравнение

$$(2) \quad f(x, t, 0) = 0$$

имеет для всех $t \in \mathbb{R}$ решение, которое может быть записано в параметрическом виде

$$(3) \quad x = \varphi(s, t),$$

где $s \in \mathbb{R}^m$ — параметр, а для функции $\varphi(s, t)$ в некоторой области пространства переменных $\mathcal{D}(s, t) = \mathcal{D}(s) \times (-\infty < t < \infty)$, где $\mathcal{D}(s)$ — некоторая область пространства параметров, должны быть выполнены условия:

- 1) функция $\varphi(s, t)$ достаточно гладкая,
- 2) ранг матрицы $\varphi_s(s, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t)$ равен m , т. е. числу параметров.

III. Пусть кратность собственного значения $\lambda = 0$ равна m , а остальные n собственных значений $\lambda_i(s, t)$ матрицы $A(s, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(s, t), t, 0)$ удовлетворяют в $\mathcal{D}(s, t)$ условию

$$\operatorname{Re} \lambda_i(s, t) < 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Предполагается, что $\operatorname{rank} A(s, t) = n$, и m -кратному нулевому собственному значению соответствует m линейно независимых собственных векторов. Поясним последнее требование.

Из условия II следует $f(\varphi(s, t), t, 0) \equiv 0$ при $(s, t) \in \mathcal{D}(s, t)$. Дифференцируя это тождество по s , получим

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(s, t), t, 0) \times \varphi_s(s, t) = A \times \varphi_s(s, t) = 0 \quad \text{при} \quad (s, t) \in \mathcal{D}(s, t),$$

где $A(s, t)$ — $(m+n) \times (m+n)$ -матрица. Это означает, что $(m+n) \times (m+n)$ -матрица $A(s, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(s, t), t, 0)$ имеет собственное значение $\lambda(s, t) = 0$, а столбцы матрицы $\varphi_s(s, t)$ — собственные векторы, соответствующие $\lambda = 0$. Так как в силу условия п. 2) эти столбцы линейно-независимы, то кратность $\lambda \equiv 0$ не меньше m .

Пример. Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 + x_7^2 - b_2 x_6 x_1 - b_8 x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = b_4 x_7 - b_5 x_2 - b_8 x_1 x_2 - b_9 x_2 x_3 - b_{12} x_2 x_4, \\ \dot{x}_3 = b_2 x_6 x_1 - 2b_3 x_3^2 - b_6 x_3 + b_2 x_5 - b_9 x_2 x_3 + 2b_{10} x_4 x_5 + b_{12} x_2 x_4, \\ \dot{x}_4 + x_3^2 - b_{10} x_4 x_5 - b_{12} x_2 x_4, \\ \dot{x}_5 = b_6 x_3 - b_7 x_5 - b_{10} x_4 x_5 - b_{11} x_5, \end{cases}$$

где $x_6 = 1 - x_3 - x_4 - x_5$, $x_7 = 1 - \sum_{i=1}^5 x_i$. Область изменения переменных

$$W = \{(x_1, \dots, x_5) \mid 0 \leq x_i \leq 1, \ i = 1, \dots, 5, \sum_{i=1}^5 x_i \leq 1\}.$$

Эта система соответствует некоторой модели реакции каталитического окисления. Подробный ее анализ дан в [11]. При анализе модели использована следующая иерархия параметров:

$$b_{10} > b_8 \gg b_7 > b_1, b_2, b_3, b_4, b_6, b_{11}, b_{12} \gg b_5, b_9,$$

т. е. коэффициенты b_{10}, b_8 на несколько порядков больше остальных. Обозначая $\varepsilon = \frac{1}{b_{10}}$, $\mu = \frac{1}{b_8}$, перепишем систему (4) в виде: $\varepsilon \dot{x} = f(x, \varepsilon)$. Функция f является

полиномом, следовательно, условие I выполнено. Полагая $\varepsilon = 0$, $\mu = 0$, имеем

$$(5) \quad \begin{cases} 0 = -x_1x_2, \\ 0 = -x_1x_2, \\ 0 = 2x_4x_5, \\ 0 = -x_4x_5, \\ 0 = -x_4x_5. \end{cases}$$

Матрица Якоби для правых частей вырожденной системы (5) есть

$$A_0 = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_5 & 2x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -x_5 & -x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -x_5 & -x_4 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A_0 равен 2. Для того чтобы выполнялось условие II, необходимо ввести параметр $s \in \mathbb{R}^3$. Запараметризуем решение уравнения $f(x, 0) = 0$ следующим образом:

$$(6) \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -s_1, \\ x_3 = s_1 + s_2, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = -s_3. \end{cases}$$

В терминах постановки задачи это означает, что $\varphi_1(s) = 0$, $\varphi_2(s) = -s_1$, $\varphi_3(s) = s_2 + s_3$, $\varphi_4(s) = 0$, $\varphi_5(s) = -s_3$, где $s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ ($m = 3$). Матрица Якоби для правых частей системы (6) есть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\text{rank} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 3$. Таким образом, выполнены условия п. 1) и п. 2).

Осталось проверить условие III. Будем искать собственные числа матрицы $A(s)$, полученной из матрицы $A_0(x)$ посредством линейной замены (6)

$$A(s) = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\text{rank} A(s) = 2$ и кратность собственного числа $\lambda = 0$ равна 3 (т.е. числу параметров, $m = 3$), а остальные 2 собственных числа удовлетворяют условию:

$$\text{Re} \lambda_1 = s_1 < 0, \quad \text{Re} \lambda_2 = s_3 < 0, \quad \text{т.к.} \quad x_i > 0, \quad i = 1, \dots, 5,$$

(рассматриваем x_i , не принадлежащие границе множества). Таким образом, на примере системы дифференциальных уравнений, взятой из конкретной задачи

химической кинетики, видно, что постановка задачи не надуманная. Далее мы докажем теорему существования и единственности решения системы (1) при условиях I, II, III, и сможем ею воспользоваться при анализе системы (4). В [12] с помощью метода интегральных многообразий анализируется еще одна система дифференциальных уравнений, описывающая динамику изотермического реактора идеального смешения.

2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВИДЕ

Будем искать медленное интегральное многообразие и уравнение движения по нему в параметрическом виде

$$(7) \quad x = P(s, t, \varepsilon), \quad \dot{s} = S(s, t, \varepsilon).$$

Функции P, S находятся в виде асимптотических рядов по степеням ε :

$$(8) \quad \begin{cases} x = P(s, t, \varepsilon) = \varphi(s, t) + \varepsilon P_1(s, t) + \dots + \varepsilon^k P_k(s, t) + \dots, \\ \dot{s} = S(s, t, \varepsilon) = S_0(s, t) + \varepsilon S_1(s, t) + \dots + \varepsilon^k S_k(s, t) + \dots \end{cases}$$

Дифференцируя x по t и подставляя в равенство (1), имеем

$$\varepsilon \frac{\partial P}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial P}{\partial s} \dot{s} = f(P, t, \varepsilon).$$

Раскладывая правую часть в ряд Тейлора с центром разложения в точке

$$(\varphi(s, t), t, 0),$$

имеем

$$f(\varphi + \varepsilon P_1 + \dots, t, \varepsilon) = f(\varphi(s, t), t, 0) + \varepsilon f_\varepsilon^{(1)} + \dots + \frac{\varepsilon^k}{k!} f_\varepsilon^{(k)} + \dots$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем

$$\begin{cases} \varepsilon^0 : f(\varphi(s, t), t, 0) = 0, \\ \varepsilon^1 : f_\varepsilon^{(1)} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} S_0, \\ \dots, \\ \varepsilon^k : \frac{1}{k!} f_\varepsilon^{(k)} = \frac{\partial P_{k-1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^k S_{i-1} \frac{\partial P_{k-i}}{\partial s}, \end{cases}$$

где $P_0(s, t) = \varphi(s, t)$, $P_k(s, t)$, $k \geq 1$, — коэффициенты в (7). Дифференцируя $f(x, t, \varepsilon)$ по ε как сложную функцию, имеем

$$f_\varepsilon^{(1)} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x}_\varepsilon.$$

Следовательно,

$$(9) \quad A(s, t) P_1(s, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} S_0 - f_1(\varphi, t, 0),$$

где $f_1(\varphi, t, 0) = f_\varepsilon^{(1)}(\varphi, t, 0)$.

Уравнение (9) содержит две неизвестные функции $P_1(s, t)$, $S_0(s, t)$. Для P_1 система (9) является линейной неоднородной системой алгебраических уравнений, у которой $\det A(s, t) \neq 0$, $s \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$. Для разрешимости системы (9) по теореме Кронекера — Капелли необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был равен рангу расширенной матрицы. Найдем $S_0(s, t)$. Предварительно произведем следующие действия.

Рассмотрим матрицу $D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$, размерность которой совпадает с размерностью матрицы $A(s, t)$, т. е. D является $(m+n) \times (m+n)$ -матрицей. Блок D_1 является базисом ядра матрицы A^T , т. е. строки D_1 — собственными векторами, отвечающими нулевому собственному значению матрицы A^T . Это означает

$$A^T(D_1^T \ D_2^T) = (0 \ A_1^T).$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 \\ A_1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, преобразованием D в матрице A выделяется блок, состоящий из m нулевых строк, и блок A_1 , в котором имеется n строк и $(m+n)$ столбцов.

Таким образом, подействовав на систему (9) оператором $D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$, имеем

$$(10) \quad D_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + D_1 \frac{\partial \varphi}{\partial s} S_0 = D_1 f_1,$$

$$(11) \quad D_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + D_2 \frac{\partial \varphi}{\partial s} S_0 = A_1 P_1 + D_2 f_1.$$

Из уравнения (10) можно выразить S_0 , т. к. матрица $D_1 \frac{\partial \varphi}{\partial s}$ имеет обратную ($\det D_1 \neq 0$), поскольку по построению D_1 является базисом ядра матрицы A_1^T , $\det \frac{\partial \varphi}{\partial s} \neq 0$ в силу предположения п. 2)) :

$$S_0 = (D_1 \frac{\partial \varphi}{\partial s})^{-1} (D_1 f_1 - D_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t}).$$

Тогда из равенства (11) имеем

$$A_1 P_1 = D_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + D_2 (\frac{\partial \varphi}{\partial s} S_0 - f_1).$$

Так как $\det A_1 \neq 0$, то P_1 однозначно восстанавливается из этого уравнения.

Тем самым полностью определен член P_1 асимптотики порядка ε для интегрального многообразия $x = P(s, t, \varepsilon)$ и член S_0 для асимптотики нулевого порядка для $\dot{S}$. Определение следующих членов P_2, S_1, P_3, S_2 и т. д. производится аналогичным образом. Поскольку вычисление функций $P_{i+1}, S_i, (i = 1, 2, \dots)$, достаточно громоздко, а для конкретных систем дифференциальных уравнений, описывающих процессы химической кинетики, например в [11,12], достаточно знать лишь главные члены решений, мы не будем выписывать явные выражения функций $P_{i+1}, S_i, (i = 1, 2, \dots)$.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Как следует из §2, система (1) при $\varepsilon = 0$ приводится к виду

$$(12) \quad \begin{cases} f_1(x, t, 0) = 0, \\ g(f_1(x, t, 0)) = 0, \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{R}^{n+m}$ и функция $f_1(x, t, 0)$ такова, что

$$\text{rank} \frac{\partial f_1}{\partial x} = n,$$

и, следовательно, можно записать: $x_1 = \psi(x_2, t)$, $(x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n+m})$; функция g является суперпозицией функции f_1 и ψ .

Имеем [13]

$$(13) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2, t, \varepsilon), \end{cases}$$

где функции X_1, X_2 при $\varepsilon = 0$ удовлетворяют условиям:

$$X_1(x_1, x_2, t, 0) = f_1(x, t, 0), \quad X_2(x_1, x_2, t, 0) = g(f_1(x, t, 0)).$$

Сделаем замену переменных [14]

$$(14) \quad x_1 = \bar{x}_1 + \psi(x_2, t).$$

Дифференцируя (14) по t , подставляя в (13), имеем

$$\varepsilon \dot{\bar{x}}_1 = \bar{B}(x_2, t)\bar{x}_1 + \bar{X}_1(\bar{x}_1, x_2, t, \varepsilon), \quad \varepsilon \dot{x}_2 = X_2(\bar{x}_1, x_2, t, \varepsilon),$$

где

$$\bar{X}_1(\bar{x}_1, x_2, t, \varepsilon) = X_1(\bar{x}_1 + \psi, x_2, t, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_2} X_2(\bar{x}_1 + \psi, x_2, t, \varepsilon) - \bar{B}(x_2, t)\bar{x}_1,$$

$$\bar{X}_2(\bar{x}_1, x_2, t, \varepsilon) = X_2(\bar{x}_1 + \psi, x_2, t, \varepsilon), \quad \bar{B}(x_2, t) = \frac{\partial X_1}{\partial x_1}(\psi(x_2, t), x_2, t, 0).$$

Сделав еще одну замену

$$(15) \quad x_2 = v + N(t)\bar{x}_1,$$

где $N(t) = g^{(1)}(0)$, получим

$$\varepsilon \dot{v} = V(\bar{x}_1, v, t, \varepsilon), \quad \varepsilon \dot{\bar{x}}_1 = \tilde{B}(v, t)\bar{x}_1 + \tilde{X}_1(\bar{x}_1, v, t, \varepsilon),$$

где

$$\tilde{X}_1(\bar{x}_1, v, t, \varepsilon) = \bar{X}_1(\bar{x}_1, v + N(t)\bar{x}_1, t, \varepsilon), \quad V(\bar{x}_1, v, t, \varepsilon) = \bar{X}_2(\bar{x}_1, v + N(t)\bar{x}_1, t, \varepsilon).$$

Нетрудно показать (сделаем это ниже), что $X_1(\bar{x}_1, x_2, t, \varepsilon)$ имеет порядок $O(\|x_1\|^2)$. Следовательно, перейдя от переменных $v, \bar{x}_1$ к переменным $\varepsilon u, \varepsilon z$, соответственно,

$$(16) \quad v = \varepsilon u, \quad \bar{x}_1 = \varepsilon z,$$

получим

$$(17) \quad \dot{u} = U(u, z, t, \varepsilon), \quad \varepsilon \dot{z} = B(u, t)z + Z(u, z, t, \varepsilon),$$

где $Z(u, z, t, \varepsilon) = \tilde{X}_1(\varepsilon u, \varepsilon z, t, \varepsilon)$. Ясно, что в системе (17) переменная u играет роль медленной, а z — быстрой.

Воспользовавшись тем, что вырожденное уравнение (12) имеет для всех $t \in \mathbb{R}$ решение $x_1 = \psi(x_2, t)$ и предположив, что оно является изолированным, т. е. существует такое ρ , что в окрестности $|x_1 - \psi(x_2, t)| < \rho$ нет других решений этого уравнения, рассмотрим область

$$\Omega_0 = \{(u, z, t, \varepsilon) \mid u \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n, |z| < \rho_1, t \in \mathbb{R}, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\},$$

где $\rho_1 = \frac{\rho}{\varepsilon}$, и систему (17) в этой области. От переменных u, z посредством формул (14)–(16) можно вернуться к x_1, x_2 .

Пусть в области Ω_0 выполнены условия:

А) функции $U(u, z, t, \varepsilon), Z(u, z, t, \varepsilon), B(u, t)$ равномерно непрерывны и ограничены вместе с частными производными по всем переменным до $(k+2)$ -го

порядка включительно ($k \geq 0$); Б) собственные значения $\lambda_i(u, t)$, ($i = 1, \dots, n$), матрицы

$$B(u, t) = \frac{\partial X_1}{\partial x_1}(\psi(x_2, t), x_2, t, 0)$$

удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \lambda_i(u, t) \leq -2\gamma < 0.$$

Лемма 1. При всех значениях $t, t_1, t_2, u, u_1, u_2, |z_1| < \rho_1, |z_2| < \rho_1, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ справедливы неравенства

$$(18) \quad |U(u, z, t, \varepsilon)| \leq M, \quad |B(u, t)| \leq M,$$

$$(19) \quad |Z(u, z, t, \varepsilon)| \leq M(|z|^2 + \varepsilon),$$

$$(20) \quad |Z(u_1, z_1, t, \varepsilon) - Z(u_2, z_2, t, \varepsilon)| \leq M(|\bar{z}|^2 + \varepsilon)(|u_1 - u_2| + |z_1 - z_2|),$$

$$(21) \quad |U(u_1, z_1, t, \varepsilon) - U(u_2, z_2, t, \varepsilon)| \leq M(|u_1 - u_2| + |z_1 - z_2|),$$

$$(22) \quad |B(u_1, t_1) - B(u_2, t_2)| \leq M(|u_1 - u_2| + |z_1 - z_2|),$$

где M — некоторое положительное число, $|\bar{z}| = \max\{|z_1|, |z_2|\}$.

Доказательство. 1. Справедливость неравенства вытекает из предположения А).

2. Используя формулу разложения векторной функции в ряд Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$r_n(x, h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} (h_1 \partial_1 + \dots + h_m \partial_m)^n f(x + th) dt,$$

можно представить функцию $Z(u, z, t, \varepsilon)$ в виде

$$\begin{aligned} Z(u, z, t, \varepsilon) &= \int_0^1 [(u, \psi + \theta z, t, 0)z] z d\theta \\ &+ \varepsilon \left[\int_0^1 \frac{\partial X_1}{\partial \varepsilon}(u, \psi + z, t, \theta \varepsilon) d\theta - \frac{\partial \psi}{\partial u} U(u, z, t, \varepsilon) - \frac{\partial \psi}{\partial t}(u, t) \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$|Z(u, z, t, \varepsilon)| \leq \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 X_1}{\partial x_1^2} \right| |z_1|^2 d\theta + \varepsilon \int_0^1 \left| \frac{\partial X_1}{\partial \varepsilon} \right| d\theta \leq M(|z|^2 + \varepsilon).$$

3.

$$\begin{aligned}
& |Z(u_1, z_1, t, \varepsilon) - Z(u_2, z_2, t, \varepsilon)| \\
& \leq |Z(u_1, z_1, t, \varepsilon) - Z(u_2, z_1, t, \varepsilon)| + |Z(u_2, z_1, t, \varepsilon) - Z(u_2, z_2, t, \varepsilon)| \\
& \leq M(|\bar{z}|^2 + \varepsilon)(|u_1 - u_2| + |z_1 - z_2|).
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
& |U(u_1, z_1, t, \varepsilon) - U(u_2, z_2, t, \varepsilon)| \\
& \leq |U(u_1, z_1, t, \varepsilon) - U(u_1, z_2, t, \varepsilon)| + |U(u_1, z_2, t, \varepsilon) - U(u_2, z_2, t, \varepsilon)| \\
& \leq M(|u_1 - u_2| + |z_1 - z_2|).
\end{aligned}$$

5. Аналогично, $|B(u_1, t_1) - B(u_2, t_2)| \leq M(|u_1 - u_2| + |t_1 - t_2|)$.Неравенства доказаны. □

Интегральное многообразие медленных движений системы (7) описывается уравнением

$$(23) \quad z = p(u, t, \varepsilon).$$

Введем в рассмотрение метрическое пространство $C(L_1, L_2)$ ограниченных и непрерывных в области

$$\Omega_1 = \{(u, t, \varepsilon) \mid u \in \mathbb{R}^m, t \in \mathbb{R}, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$$

функций $p(u, t, \varepsilon)$, принимающих значения в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих условию Липшица по u с постоянной L_1 , не зависящей от t ,

$$(24) \quad |p(u_1, t, \varepsilon) - p(u_2, t, \varepsilon)| \leq L_1 |u_1 - u_2|.$$

и ограниченных

$$(25) \quad |p(u, t, \varepsilon)| \leq L_2.$$

с метрикой

$$(26) \quad d(p, \bar{p}) = \sup_{\Omega_0} |p(u, t, \varepsilon) - \bar{p}(u, t, \varepsilon)|,$$

где $p, \bar{p} \in C(L_1, L_2)$. Если траектория $(u(t), z(t), t)$ лежит на интегральном многообразии (23), то $z(t) = p(u(t), t, \varepsilon)$. Функции $u(t)$, $z(t) = p(u(t), t, \varepsilon)$ должны удовлетворять системе (17). Правая часть первого уравнения системы (17), ограниченная по норме числом M , удовлетворяет условию Липшица с постоянной $M(1 + L_1)$, не зависящей от t , и поэтому уравнение при каждом $u_0 \in \mathbb{R}^m$ имеет единственное решение $y(t) = Y(t, \tau, u_0, \varepsilon/p)$, $Y(\tau, \tau, u_0, \varepsilon/p) = u_0$, определенное при $t \in \mathbb{R}$.

Функция $z = p(u(t), t, \varepsilon)$ является ограниченным решением уравнения при $t \in \mathbb{R}$ [2]

$$\varepsilon \dot{z} = B(y(t), t)z + Z(y(t), z(t), t, \varepsilon)$$

и поэтому удовлетворяет интегральному уравнению

$$(27) \quad z(\tau) = \varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^{\tau} W_y(\tau, t, \varepsilon) Z(y(t), z(t), t, \varepsilon) dt,$$

где $W_y(t, v, \varepsilon)$ — фундаментальная матрица однородного уравнения

$$\varepsilon \dot{z} = B(y(t), t)z.$$

При этом $W_y(v, v, \varepsilon) = I$.

В работе [8] на основе неравенств, которым аналогичны неравенства (18)–(22), установлена оценка, которая обеспечивает сходимость несобственного интеграла (27)

$$(28) \quad |W_y(\tau, t, \varepsilon)| \leq K e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}(\tau-t)}.$$

Доказательство неравенства (28) опирается, в частности, на доказанную там же лемму. Сформулируем ее.

Лемма 2. Пусть $M(1 + L_1) \leq \alpha$, тогда при всех $\tau \geq t$ имеет место неравенство

$$(29) \quad |Y(t, \tau, s_1, \varepsilon) - \bar{Y}(t, \tau, s_2, \varepsilon)| \leq |s_1 - s_2| e^{\alpha(\tau-t)} + (1 + L_1)^{-1} d(p, \bar{p}) (e^{\alpha(\tau-t)} - 1),$$

где $\bar{Y}$ соответствует $\bar{p}$.

Учитывая (23), перепишем (27) в виде

$$(30) \quad p(u, \tau, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^{\tau} W_y(\tau, t, \varepsilon) Z(y(t), p(y(t), t, \varepsilon), t, \varepsilon) dt.$$

Рассмотрим оператор T :

$$(31) \quad T(p)(\tau, u) = \varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^{\tau} W_y(\tau, t, \varepsilon) Z(y(t), p(y(t), t, \varepsilon), t, \varepsilon) dt,$$

где $y(t) = Y(\tau, t, u, \varepsilon)$. Запишем уравнение (30) в виде

$$p = Tp.$$

Покажем, что существует число ε^* такое, что оператор T является на $C(L_1, L_2)$ оператором сжатия. Для этого необходимо показать, что

1) существует $\varepsilon_1 > 0$, такое, что T отображает пространство $C(L_1, L_2)$ на себя, т. е. выполнены неравенства (24), (25):

$$|p(u_1, t, \varepsilon) - \bar{p}(u_2, t, \varepsilon)| \leq L_1 |u_1 - u_2|, \quad |p(u, t, \varepsilon)| \leq L_2,$$

2) существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что для $\forall p, \bar{p} \in C(L_1, L_2)$ расстояние между образами $Tp, T\bar{p}$ в $C(L_1, L_2)$ меньше расстояния между $p, \bar{p}$, т. е.

$$d(Tp, T\bar{p}) \leq \rho(p, \bar{p}), \quad \rho < 1$$

Если мы докажем это, выбрав $\varepsilon^* = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, сделаем вывод, что в силу теоремы Банаха у оператора T в функциональном пространстве $C(L_1, L_2)$ непрерывных и ограниченных в Ω функций существует единственная неподвижная точка, т. е. существует единственное решение уравнения (31). Прежде чем доказать неравенства (24), (25), сформулируем следующее утверждение.

Лемма 3. Для оператора $T(p)(\tau, u)$ верны следующие неравенства

$$(32) \quad 1. T(p)(\tau, u) \leq KM\gamma^{-1}(\varepsilon + L_2^2)$$

$$(33) \quad 2. |T(p)(\tau, u) - T(p)(\tau, \bar{u})| \leq KM(\varepsilon + L_2^2)[(1 + L_1)\gamma^{-1} + KM(\gamma - \varepsilon\alpha)^{-1}]|u - \bar{u}|,$$

$$(34) \quad 3. |T(p)(\tau, u) - T(\bar{p})(\tau, u)| \leq K^2 M^2(\varepsilon + L_2^2)(\gamma - \varepsilon\alpha)^{-1}(1 + L_1)^{-1}d(p, \bar{p}).$$

Доказательство. 1. Из неравенств (18), (25), (28) следует оценка

$$|T(p)(\tau, u)| \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\tau} |W_y(\tau, t, \varepsilon)| |Z(y(t), p, t\varepsilon)| dt \leq KM\gamma^{-1}(L_2^2 + \varepsilon),$$

так как $\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}(\tau-t)} dt = \gamma^{-1}\varepsilon$.

2. Оценим разность $W_y(\tau, t, \varepsilon) - W_{\bar{y}}(\tau, t, \varepsilon)$, учитывая, что $W_y(\tau, t, \varepsilon)$ является решением однородного уравнения, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial v} W_{\bar{y}}(\tau, t, \varepsilon) = -W_{\bar{y}}(\tau, t, \varepsilon) B(\bar{y}(t), t), \quad W_{\bar{y}}(\tau, \tau, \varepsilon) = I,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} W_y(v, t, \varepsilon) = B(y(t), t) W_y(v, t, \varepsilon), \quad W_y(t, t, \varepsilon) = I.$$

Для простоты записи введем обозначения

$$B(y(t), t) = B_y, \quad W_y(v, t\varepsilon) = W_y, \quad Z(y(t), p(y(t), t, \varepsilon), t, \varepsilon) = Z_y.$$

Имеем

$$\begin{aligned} W_y(\tau, t\varepsilon) - W_{\bar{y}}(\tau, t, \varepsilon) &= W_{\bar{y}}(\tau, \tau, \varepsilon) W_y(\tau, t, \varepsilon) - W_{\bar{y}}(\tau, t, \varepsilon) W_y(t, t, \varepsilon) \\ &= \int_t^{\tau} \frac{\partial}{\partial v} [W_{\bar{y}}(\tau, v, \varepsilon) W_y(v, t, \varepsilon)] dv \\ &= \int_t^{\tau} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} [W_{\bar{y}}(\tau, v, \varepsilon) W_y(v, t, \varepsilon)] + W_{\bar{y}}(\tau, v, \varepsilon) \frac{\partial W_y}{\partial v}(\tau, v, \varepsilon) \right\} dv \\ &= \int_t^{\tau} W_{\bar{y}}(\tau, v, \varepsilon) [B_y - B_{\bar{y}}] W_y(v, t, \varepsilon) dv. \end{aligned}$$

Используя неравенства (22), (28), (29), получаем при $\tau > t$

$$\begin{aligned} |W_y(\tau, v, \varepsilon) - W_{\bar{y}}(\tau, v, \varepsilon)| &\leq K^2 M \varepsilon^{-1} e^{-\gamma \varepsilon^{-1}(\tau-t)} \int_t^{\tau} |y(v) - \bar{y}(v)| dv \\ &\leq K^2 M \varepsilon^{-1} e^{-(\gamma \varepsilon^{-1} - \alpha)(\tau-t)} [|u - \bar{u}| + d(p, \bar{p}) / (1 + L_1)]. \end{aligned}$$

Используя неравенства (18)–(22), находим, что

$$\begin{aligned}
 & |T(p)(\tau, u) - T(\bar{p})(\tau, u)| \\
 & \leq \varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^{\tau} |W_y(\tau, t, \varepsilon)Z(y(t), p(y(t), t, \varepsilon), t, \varepsilon) - W_{\bar{y}}(\tau, t, \varepsilon)Z(\bar{y}(t), \bar{p}(\bar{y}(t), t, \varepsilon), t, \varepsilon)| \\
 & \leq \varepsilon^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^{\tau} |W_y Z_y - W_y Z_{\bar{y}}| dt + \int_{-\infty}^{\tau} |W_y Z_{\bar{y}} - W_{\bar{y}} Z_{\bar{y}}| dt \right\} \\
 & \leq \varepsilon^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^{\tau} |W_y| |Z_y - Z_{\bar{y}}| dt + \int_{-\infty}^{\tau} |W_y - W_{\bar{y}}| |Z_{\bar{y}}| dt \right\} \\
 & \leq \varepsilon^{-1} \left\{ M(\varepsilon + L_2^2)(1 + L_1)|u - \bar{u}|K \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\gamma\varepsilon^{-1}(\tau-t)} dt \right. \\
 & \quad \left. + M(\varepsilon + L_2^2)K^2 M\varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^{\tau} e^{(\tau-t)} [(u - \bar{u}) + d(p, \bar{p})/(1 + L_1)] dt \right\} \\
 & \leq MK\gamma^{-1}(\varepsilon + L_2^2)(1 + L_1)|u - \bar{u}| + M^2 K^2 \varepsilon^{-1}(\varepsilon + L_2^2)(\gamma - \varepsilon\alpha)^{-1} [|u - \bar{u}| + d(p, \bar{p})/(1 + L_1)].
 \end{aligned}$$

□

Положив $p = \bar{p}$, имеем

$$|T(p)(\tau, u) - T(p)(\tau, \bar{u})| \leq MK(\varepsilon + L_2^2)[\gamma^{-1}(1 + L_1) + MK(\gamma - \varepsilon\alpha)^{-1}]|u - \bar{u}|.$$

Положив $u = \bar{u}$, имеем

$$|T(p)(\tau, u) - T(\bar{p})(\tau, u)| \leq M^2 K^2 (\varepsilon + L_2^2)(\gamma - \varepsilon\alpha)^{-1} d(p, \bar{p})/(1 + L_1).$$

Таким образом, требуемые оценки (24), (25) доказаны.

Положим $\alpha = \gamma/2\varepsilon$, а при определении пространства $C(L_1, L_2)$ будем считать, что $L_1 = \varepsilon l_1$, $L_2 = \varepsilon l_2$. При этом числа l_1 и l_2 выберем так, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} M(1 + \varepsilon l_1) \leq \gamma/2\varepsilon, \\ MK\gamma^{-1}(1 + \varepsilon l_2^2) \leq l_2, \\ MK(1 + \varepsilon l_2^2)[\gamma^{-1}(1 + \varepsilon l_1) + MK \cdot 2\gamma^{-1}] \leq l_1, \\ M^2 K^2 [\varepsilon + (\varepsilon l_2)^2 \cdot 2\gamma^{-1}(1 + \varepsilon l_1)^{-1}] \leq 1. \end{cases}$$

Этого можно добиться при достаточно малых значениях ε ($0 < \varepsilon < \varepsilon_0$). Тогда из неравенств (32), (33) следуют оценки

$$\begin{cases} |T(p)(\tau, u)| \leq \varepsilon l_2, \\ |T(p)(\tau, u) - T(p)(\tau, \bar{u})| \leq \varepsilon l_1 |u - \bar{u}|. \end{cases}$$

Выполнение этих неравенств означает, что оператор $T(p)$ преобразует полное метрическое пространство $C(\varepsilon l_1, \varepsilon l_2)$ в себя. Если перейти в левой части (32) к точной верхней грани по τ и u , то из (34) следует существование такого $q < 1$, что

$$d(T(p), T(\bar{p})) \leq qd(p, \bar{p}),$$

т. е. оператор $T(p)$ является сжимающим. Следовательно, по теореме Банаха он имеет в $C(\varepsilon l_1, \varepsilon l_2)$ единственную неподвижную точку. Таким образом, уравнение (30) имеет в $C(\varepsilon l_1, \varepsilon l_2)$ единственное решение $p^*(u, t, \varepsilon)$. Это означает, что система (17) имеет интегральное многообразие $z = p^*(u, t, \varepsilon)$. Так как система (17) получена из системы (1), а условия А), В) являются следствием условий 1, 2, 3 из § 1, то с учетом принципа сведения [8] для системы (1) будет иметь место следующая

Теорема 1. Пусть в области $\Omega = \{(s, t, \varepsilon) \mid s \in \mathbb{R}^m, t \in \mathbb{R}, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ выполняются условия 1, 2, 3. Тогда существует такое ε_1 , что $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ и для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ уравнение (1) имеет интегральное многообразие медленных движений $x = P(s, t, \varepsilon)$, представленное в параметрическом виде с параметром $s \in \mathbb{R}^m$, оно единственно, и движение по нему описывается уравнением

$$\dot{s} = S(s, t, \varepsilon).$$

Для обоснования асимптотического характера разложения функции $P(s, t, \varepsilon)$, полученного в § 2, можно воспользоваться той же схемой рассуждений, что использовалась выше при доказательстве существования интегрального многообразия $z = p^*(u, t, \varepsilon)$ системы (17), полученной из системы (1).

Через $q_k(u, t, \varepsilon)$ обозначаем конечную сумму

$$q_k(u, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^k \varepsilon^i h_i(u, t),$$

где $h_i(u, t)$ является суперпозицией коэффициентов разложения $p_i(s, t)$, вычисленных в соответствии с алгоритмом, описанным в § 2. В функции $U(u, z, t, \varepsilon)$ и $Z(u, z, t, \varepsilon)$ из (17) подставляем $z = q_k(u, t, \varepsilon)$.

Для функций U и Z выполняются неравенства, аналогичные неравенствам (18)–(22), за исключением неравенства (19), которое заменяется неравенством

$$Z(u, z, t, \varepsilon) \leq M_0(|z|^2 + \varepsilon|z| + \varepsilon^{k+1}).$$

Далее рассматривается оператор $T(p)(u, t)$ на множестве $C(\varepsilon l_1^k, \varepsilon^{k+1} l_2^k)$, где l_2^k — число, удовлетворяющее неравенству

$$KM_0 \gamma^{-1}[(\varepsilon^{k+1} l_2^k)^2 + \varepsilon(\varepsilon^{k+1} l_2^k) + \varepsilon^{k+1}] \leq \varepsilon^{k+1} l_2^k.$$

Доказав существование интегрального многообразия $z = p^*(u, t, \varepsilon)$, удовлетворяющего оценке

$$|p_{k+1}^*(u, t, \varepsilon)| \leq \varepsilon^{k+1} l_2^k,$$

делаем вывод, что разложение $P(s, t, \varepsilon)$ действительно асимптотическое.

Автор выражает благодарность В.М.Гольдштейну, В.А.Соболеву и анонимному рецензенту.

REFERENCES

- [1] N.N. Bogolybov, Yu.A. Mitropol'skij, *Asimptoticheskie metody v teorii kolebanij*, Fizmatgiz, Moscow, 1958.
- [2] Yu.A. Mitropol'skij, O.B. Lykova, *Integral'nye mnogoobrazija v nelinejnoj mekhanike*, Nauka, Moscow, 1973.
- [3] A.B. Vasil'eva, V.F. Butuzov, *Asimptoticheskie razlozhenija reshenij singuljarno vozmushchennykh uravnenij*, Nauka, Moscow, 1973.
- [4] E.F. Mishchenko, N.Kh. Rozov, *Differencial'nye uravnenija s malym parametrom i relaksacionnye kolebanija*, Nauka, Moscow, 1975.

- [5] K.V. Zadiraka, *O nelokal'nom integral'nom mnogoobrazii nereguljarno vozmushchennoj differencial'noj sistemy*, Ukrain. Mat. Zh., **17**:1 (1965), 47–63.
- [6] Ja.S. Baris, V.I. Fodchuk, *Issledovanie ogranichennykh reshenij nelinejnykh nereguljarno vozmushchennykh sistem metodom integral'nykh mnogoobrazij*, Ukrain. Mat. Zh., **22**:1 (1970), 3–11.
- [7] A.M. Samojlenko, *Invariantnye toroidal'nye mnogoobrazija sistem s medlenno menjajushchimsja peremennymi*, in Problemy asimptoticheskoy teorii nelinejnykh kolebanij, Naukova dumka, Kiev, 1977, 181–191.
- [8] V.V. Strygin, V.A. Sobolev, *Integral'nye mnogoobrazija i razdelenie dvizhenij*, Izd-vo Kujbyshev, Un-ta, Kujbyshev, 1983.
- [9] V.M. Gol'dshtejn, V.A. Sobolev, *Kachestvennyj analiz singuljarno vozmushchennykh sistem*, Institut matematiki SO AN SSSR, Novosibirsk, 1988.
- [10] A.B. Vasil'eva, V.F. Butuzov, *Singuljarno vozmushchennye uravnenija v kriticheskikh sluchajakh*, Izd-vo MGU, Moscow, 1978.
- [11] L.I. Kononenko, *Integral'nye mnogoobrazija v matematicheskoy modeli reakcii okislenija kataliticheskogo okislenija*, Preprint AN SSSR. Sib. otd-nie In-t matematiki, **13**, Novosibirsk, 1990.
- [12] V.M. Gol'dshtejn, L.I. Kononenko, M.Z. Lazman, V.A. Sobolev, G.S. Jablonskij, *Kachestvennyj analiz dinamicheskikh svojstv katalicheskogo izometricheskogo reaktora ideal'nogo smeshenija*, in Matematicheskie problemy khimicheskoy kinetiki: Sb. nauch. trudov, Nauka Sib. ot-nie, Novosibirsk, 1989, 176–204.
- [13] Zhongmei Gu, N. N. Nefedov, R.E. O'Malley, jr., *On singularsingularity perturbed initial value problem*, SIAM J. Appl. Math., **49**:1 (1989), 1–25. Zbl 0676.34038
- [14] V.M. Orlov, *Uproshchenie singuljarno vozmushchennykh uravnenij makro dinamiki i metod kvazistacionarnykh koncentracij*, // ZhVM, **25**:4 (1985), 521–534.

LARISA IVANOVNA KONONENKO
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
4, ACAD. KOPTYUG AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: larak@math.nsc.ru