S. G. Kazantsev, Factorization of the Green's operator in the Dirichlet problem for $(-1)^m(d/dt)^{2m}$, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1662–1688

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.118>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.196.121.252

April 26, 2023, 17:32:53

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 19, стр. 1662–1688 (2019)

УДК 517.927.2, 517.58

DOI 10.33048/semi.2019.16.118

MSC 42C05, 34B05, 34B30

ФАКТОРИЗАЦИЯ ОПЕРАТОРА ГРИНА В ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ $(-1)^m(d/dt)^{2m}$

С.Г. КАЗАНЦЕВ

ABSTRACT. In this article we propose a method for solving the Dirichlet boundary value problem $(-1)^m u^{(2m)} = f$, $u^{(k)}(\pm 1) = 0$, $k = 0, \dots, m-1$, which is based on the factorization of the Green's operator, $\mathbf{G}_{2m} = (-1)^m \mathbf{J}^m \mathbf{Proj}_m^\infty \mathbf{J}^m : L_2(\mathbb{I}) \rightarrow H_0^m(\mathbb{I}) \cap H^{2m}(\mathbb{I})$, $\mathbb{I} = [-1, 1]$. Here $\mathbf{J}^m$ is a Volterra operator of m -fold integration and $\mathbf{Proj}_m^\infty$ — operator of orthogonal projection in $L_2(\mathbb{I})$. The polynomials $\tilde{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]} = \mathbf{J}^m \mathbf{Proj}_m^\infty \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ form the basis of the Sobolev space $H_0^m(\mathbb{I}) \cap H^{2m}(\mathbb{I})$, where $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) = \mathbf{J}^m P_N(t) = \frac{(t-1)^m}{m! C_{m+N}^m} P_N^{(m,-m)}(t)$, P_N are Legendre polynomials and $P_N^{(m,-m)}$ — non-classical Jacobi polynomials. The study of polynomials $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ occupies the most part of this work including the problem of expanding $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ in Legendre polynomials. The formula for calculating the connection coefficients is obtained.

Keywords: ordinary differential equation, Dirichlet boundary value problem, Green's operator, Sobolev space, Fourier transform, Riemann–Liouville fractional integral, Legendre, Jacobi and Bessel polynomials, spherical Bessel functions, Gauss hypergeometric functions.

KAZANTSEV, S.G., FACTORIZATION OF THE GREEN'S OPERATOR IN THE DIRICHLET PROBLEM FOR $(-1)^m(d/dt)^{2m}$.

© 2019 КАЗАНЦЕВ С.Г.

Поступила 18 марта 2019 г., опубликована 21 ноября 2019 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе описывается метод решения задачи Дирихле на отрезке

$$(1) \quad (-1)^m \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} u(t) = f(t), \quad f \in L_2(\mathbb{I}), \quad t \in \mathbb{I} = [-1, 1]$$

$$(2) \quad u(\pm 1) = \frac{d}{dt} u(\pm 1) = \dots = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(\pm 1) = 0$$

с помощью факторизации оператора решения (оператора Грина) $\mathbf{G}_{2m}$. Однозначная разрешимость и корректность задачи (1)–(2) для $f \in L_2(\mathbb{I})$ означает существование ограниченного обратного оператора

$$\mathbf{G}_{2m} : L_2(\mathbb{I}) \rightarrow H_0^m(\mathbb{I}) \cap H^{2m}(\mathbb{I}) \subset H^{2m}(\mathbb{I}).$$

Оператор $\mathbf{G}_{2m}$ называется оператором Грина задачи (1)–(2) и определяется равенством ([1])

$$u(t) = [\mathbf{G}_{2m} f](t) = \int_{-1}^1 G_{2m}(t, s) f(s) ds,$$

где $G_{2m}(t, s)$ — функция Грина задачи (1)–(2). Построение функции Грина для краевой задачи Дирихле (1)–(2) это классическая задача, которая исследовалась многими авторами. Например, в работах [2, 3, 4, 5, 6] для функции Грина G_{2m} получены формулы различного вида. В наших исследованиях оператор Грина представляется в факторизованном виде

$$(3) \quad \mathbf{G}_{2m} = (-1)^m \mathbf{J}^m \mathbf{Proj}_m^{\infty} \mathbf{J}^m,$$

где $\mathbf{J}^m$ есть вольтерровский оператор m -кратного интегрирования или оператор Грина решения начальной задачи Коши, а $\mathbf{Proj}_m^{\infty}$ — оператор ортогонального проецирования в $L_2(\mathbb{I})$.

Если правую часть в уравнении (1) представить в виде ряда Лежандра—Фурье: $(-1)^m f(t) = \sum_{N=0}^{\infty} f_N P_N(t)$, то решение будет разложено в ряд $u(t) = \sum_{N=0}^{\infty} f_N \tilde{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]}(t)$ по полиномам $\tilde{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]}(t) = \mathbf{J}^m \mathbf{Proj}_m^{\infty} P_N(t)$.

Исследованию полиномов $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ отведена основная часть настоящей работы. Приведем краткое описание основных этапов исследования и полученных результатов.

• На отрезке $\mathbb{I} = [-1, 1]$ рассматриваются полиномы $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]} = \mathbf{J}^m P_N$ степени $m+N$ и уровня $m \geq 1$, которые являются решениями начальной задачи Коши

$$(4) \quad \frac{d^m}{dt^m} u(t) = P_N(t), \quad u(1) = \frac{d}{dt} u(1) = \dots = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(1) = 0.$$

Здесь $\mathbf{J}^m$ — вольтерровский оператор m -кратного интегрирования (6) или оператор решения начальной задачи Коши, P_N — полином Лежандра степени N .

Установлена связь (формула (19)) полиномов $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ с гипергеометрической функцией Гаусса ${}_2F_1$ и неклассическими полиномами Якоби $P_N^{(m, -m)}$, а именно

$$\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) = \frac{(t-1)^m}{m!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N, N+1 \\ m+1 \end{matrix} \middle| \frac{1-t}{2} \right) = \frac{(t-1)^m}{m!} \frac{P_N^{(m, -m)}(t)}{C_{m+N}^m}.$$

Заметим, что полиномы Якоби $P_N^{(\alpha, \beta)}$ с параметрами $\alpha, \beta > -1$ называются классическими, в нашем случае $\alpha = m, \beta = -m$, поэтому $P_N^{(m, -m)}$ — неклассические полиномы Якоби.

• Показано, что при $N \geq m$ полиномы $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ связаны с присоединенными функциями Лежандра P_N^m по формуле

$$\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) = (-1)^m (1-t^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{-m}(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{(N-m)!}{(N+m)!} P_N^m(t)$$

и система $\{\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t), N \geq m\}$ образует базис пространства Соболева $H_0^m(\mathbb{I})$.

• Вычислены значения полиномов $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1)$,

$$\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1) = \begin{cases} \frac{(-2)^m C_{m-1}^N}{m! C_{m+N}^N}, & m \geq N+1 \\ 0, & m \leq N \end{cases}$$

и доказано представление конечного преобразования Фурье для $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$

$$\hat{\mathbb{P}}_{m+N}^{[m]}(z) = \int_{-1}^1 \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(s) e^{isz} ds = \frac{-ie^{-iz}}{z} \sum_{k=\max(m, N)+1}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^{m-k} \mathbb{P}_{k+N}^{[k]}(-1).$$

• Решена задача разложения полиномов $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ в сумму по полиномам Лежандра (теорема 2). При вычислении коэффициентов этого разложения мы переходим в пространство Фурье-образов и пользуемся свойствами сферических функций Бесселя (сферические функции Бесселя являются Фурье-образами полиномов Лежандра).

• В пространстве Соболева $H_0^m(\mathbb{I}) \cap H^{2m}(\mathbb{I})$ сформирован базис из полиномов

$$\tilde{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]} = \mathbf{J}_m^m \mathbf{Proj}_m^{\infty} P_N = \mathbf{J}_m^m \mathbf{Proj}_m^{\infty} \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}.$$

Вследствие теоремы 2 базисные полиномы $\tilde{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]}$ выражаются в явном виде через полиномы $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$, при этом $\tilde{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]} = \mathbb{P}_{2m+N}^{[2m]}$ для $N \geq 2m$.

• Доказывается, что решение задачи (1)–(2) имеет вид

$$u(t) = (-1)^m \mathbf{J}_m^m \mathbf{Proj}_m^{\infty} f(t)$$

с факторизованном оператором Грина (3). Если правая часть в (1) представлена рядом Лежандра–Фурье

$$(-1)^m f(t) = \sum_{N=0}^{\infty} f_N P_N(t),$$

то решением будет ряд

$$u(t) = \sum_{N=0}^{\infty} f_N \tilde{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]}(t) = \underbrace{\sum_{N=0}^{2m-1} f_N \tilde{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]}(t)}_{\in H_0^m(\mathbb{I})} + \underbrace{\sum_{N=2m}^{\infty} f_N \mathbb{P}_{2m+N}^{[2m]}(t)}_{\in H_0^{2m}(\mathbb{I})}.$$

В заключение вводной части отметим, что в случае $m = 1$ полиномы $\mathbb{P}_{1+N}^{[1]}$ являются первообразными для полиномов Лежандра, $\mathbb{P}_{1+N}^{[1]}(t) = \int_1^t P_N(s) ds$,

$\mathbb{P}_{1+N}^{[1]}(1) = 0$. После интегрирования получим

$$(5) \quad \mathbb{P}_1^{[1]}(t) = t - 1, \quad \mathbb{P}_{1+N}^{[1]}(t) = \frac{(t^2 - 1)C_{N-1}^{(3/2)}(t)}{N(N+1)} = \frac{P_{N+1}(t) - P_{N-1}(t)}{2N+1}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Полиномы (5) участвуют в формуле преобразования Радона полиномов Цернике в шаре (см., например, [7, стр. 112]), а также используются при построении решения краевой задачи для волнового уравнения в шаре (или вне шара), где они обозначены как $Q_{N+1}(t)$, см. [8, стр. 536, формула (189)].

2. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

В этом параграфе приводятся используемые в работе обозначения и определения. Другие необходимые сведения и формулы размещаются в Приложении.

2.1. Пространства Соболева на отрезке $\mathbb{I} = [-1, 1]$. Напомним определения и некоторые свойства функциональных пространств. Основное пространство $L_2(\mathbb{I})$ это гильбертово пространство всех квадратично суммируемых функций на отрезке $\mathbb{I}$. Скалярное произведение и норма функций $f, g \in L_2(\mathbb{I})$ обозначены

$$(f, g)_{L_2(\mathbb{I})} = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt, \quad \|f\|_{L_2(\mathbb{I})} = \sqrt{(f, f)_{L_2(\mathbb{I})}}.$$

Пространство Соболева $H^m(\mathbb{I})$ является гильбертовым пространством, содержащим функции из $L_2(\mathbb{I})$, все обобщенные производные которых до порядка m также принадлежат $L_2(\mathbb{I})$. Известна следующая характеристика пространства $H^m(\mathbb{I})$: $f \in H^m(\mathbb{I}) \Leftrightarrow f^{(m)} \in L_2(\mathbb{I})$ и $f^{(k)}$ — абсолютно непрерывные функции при $1 \leq k \leq m-1$. Скалярное произведение и норма в $H^m(\mathbb{I})$ задаются соответственно как

$$(f, g)_{H^m(\mathbb{I})} = \sum_{k=0}^m \int_{-1}^1 \mathbf{D}^k f(t) \mathbf{D}^k g(t) dt, \quad \|f\|_{H^m(\mathbb{I})} = \sqrt{(f, f)_{H^m(\mathbb{I})}},$$

где $\mathbf{D}^k f(t) \equiv \frac{d^k}{dt^k} f$ есть производная порядка k . Для $f \in H^m(\mathbb{I})$ также определена полунорма

$$|f|_{H^m(\mathbb{I})} = \left(\int_{-1}^1 |\mathbf{D}^m f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Однородное пространство $H_0^m(\mathbb{I}) = \overline{C_0^\infty(\mathbb{I})}$ определяется через замыкание гладких финитных функций, где замыкание берется по основной норме $H^m(\mathbb{I})$. При этом для $f \in H_0^m(\mathbb{I})$ полунорма $|f|_{H^m(\mathbb{I})}$ будет нормой, эквивалентной основной норме,

$$\|f\|_{H_0^m(\mathbb{I})} = ((f, f))_{H_0^m(\mathbb{I})} = |f|_{H^m(\mathbb{I})}.$$

Пространство Соболева $H_0^m(\mathbb{I}) \cap H^{2m}(\mathbb{I}) \subset H^{2m}(\mathbb{I})$ является замкнутым подпространством в $H^{2m}(\mathbb{I})$ и используется при решении краевых задач.

2.2. Оператор Вольтерра $\mathbf{J}$ и его итерации. В этом разделе мы рассмотрим оператор Вольтерра (антипроизводную) $\mathbf{J}$ и его итерации $\mathbf{J}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Оператор Вольтерра $\mathbf{J}$, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{I})$, мы определим как

$$[\mathbf{J}f](t) := \int_1^t f(s) ds, \quad t < 1, \quad t \in (-1, 1).$$

Для функции $f \in L_2(\mathbb{I})$ и $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{J}^m$ есть m -кратная итерация оператора $\mathbf{J}$, $\mathbf{J}^m f = \mathbf{J}(\mathbf{J}^{m-1} f)$,

$$(6) \quad [\mathbf{J}^m f](t) := \int_1^t ds_1 \int_1^{s_1} ds_2 \dots \int_1^{s_{m-1}} f(s_m) ds_m, \quad t \in [-1, 1].$$

Для удобства полагаем $\mathbf{J}^0 = \mathbf{Id}$ — тождественный оператор. Мы можем записать этот m -кратный интеграл в виде вольтерровской свертки,

$$[\mathbf{J}^m f](t) = \frac{1}{(m-1)!} \int_1^t (t-s)^{m-1} f(s) ds, \quad t \in [-1, 1],$$

которая известна также как формула Коши для m -кратного интеграла (6). Оператор $\mathbf{J}^m$ является частным случаем правого интеграла Римана–Лиувилля дробного порядка m , так как в нашем случае m это положительное целое число. В [10] излагается общая теория операторов дробного интегродифференцирования.

Для операторов дифференцирования и интегрирования выполняются следующие свойства

$$\mathbf{D}^m[\mathbf{J}^m f](t) = f(t), \quad [\mathbf{J}^m \mathbf{D}^m f](t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mathbf{D}^k f(1)}{k!} (t-1)^k.$$

Оператор $\mathbf{J}$, а также $\mathbf{J}^m$, будут ограниченными линейными операторами из $L_2(\mathbb{I})$ в $L_2(\mathbb{I})$, см. [10, стр. 33].

Пусть $\mathbf{J}^*$ — сопряженный оператор для $\mathbf{J}$, тогда $[\mathbf{J}^* g](s) = \int_s^{-1} g(t) dt$. Непосредственная проверка показывает это,

$$(f, \mathbf{J}g)_{L_2} = \int_{-1}^1 f(t) \int_1^t g(s) ds dt = \int_{-1}^1 g(s) \underbrace{\int_s^{-1} f(t) dt}_{=\mathbf{J}^* f} ds = (\mathbf{J}^* f, g)_{L_2}.$$

Вычислим $(f, \mathbf{J}^m g)_{L_2}$, изменяя порядок интегрирования

$$(m-1)!(f, \mathbf{J}^m g)_{L_2} = \int_{-1}^1 g(s) \underbrace{\int_s^{-1} (t-s)^{m-1} f(t) dt}_{=(m-1)!\mathbf{J}^{*m} f} ds.$$

В результате приходим к формуле сопряженного оператора для $\mathbf{J}^m$

$$(7) \quad [(\mathbf{J}^m)^* f](s) = [(\mathbf{J}^*)^m f](s) = \frac{1}{(m-1)!} \int_s^{-1} (t-s)^{m-1} f(t) dt.$$

2.3. Операторы ортогонального проецирования. Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{I})$ два ортогональных проектора, $\mathbf{Proj}_0^{m-1}$ и $\mathbf{Proj}_m^\infty$. В базисе из полиномов Лежандра эти операторы определяются следующим образом

$$(8) \quad \mathbf{Proj}_0^{m-1} f := \sum_{n=0}^{m-1} f_n P_n,$$

$$(9) \quad \mathbf{Proj}_m^\infty f := \sum_{n=m}^{\infty} f_n P_n,$$

где

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(t), \quad \frac{2}{2n+1} f_n = (f, P_n)_{L_2} = \int_{-1}^1 f(s) P_n(s) ds$$

— ортогональное разложение Лежандра — Фурье функции f .

Очевидно, что $\mathbf{Id} = \mathbf{Proj}_0^{m-1} + \mathbf{Proj}_m^\infty$, где $\mathbf{Id}$ тождественный оператор и гильбертово пространство $L_2(\mathbb{I})$ представляется в виде прямой суммы его ортогональных подпространств, $L_2(\mathbb{I}) = \mathbf{Proj}_0^{m-1} L_2(\mathbb{I}) \oplus \mathbf{Proj}_m^\infty L_2(\mathbb{I})$, где $\mathbf{Proj}_m^\infty L_2(\mathbb{I}) = \overline{\text{span}}\{P_k, k \geq m\}$ есть гильбертово пространство с базисом $\{P_k, k \geq m\}$ и $\mathbf{Proj}_0^{m-1} L_2(\mathbb{I}) = \text{span}\{P_0, \dots, P_{m-1}\}$ — евклидово пространство с базисом $P_0, \dots, P_{m-1}$.

Если $m = 1$, то $\mathbf{Proj}_1^\infty L_2(\mathbb{I}) = L_2(\mathbb{I})/\mathbb{R} = \{f \in L_2(\mathbb{I}) : \int_{-1}^1 f(t) dt = 0\}$.

Для вычисления проекторов $\mathbf{Proj}_0^{m-1}$ и $\mathbf{Proj}_m^\infty$ могут использоваться их интегральные представления

$$(10) \quad \mathbf{Proj}_0^{m-1} f(x) = \int_{-1}^1 K_{m-1}(x, y) f(y) dy,$$

$$(11) \quad \mathbf{Proj}_m^\infty f(x) = \int_{-1}^1 K_{m-1}(x, y) \frac{f(x) - f(y)}{x - y} dy,$$

основанные на формуле Кристоффеля–Дарбу (40). Здесь K_{m-1} есть $(m-1)$ -ядро Дирихле.

Таким образом, для ортогонального проектирования не обязательно разлагать функцию в ряд по полиномам Лежандра, можно использовать для этого представления (10) и (11).

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛИНОМОВ $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ И СВЯЗЬ С ДРУГИМИ ФУНКЦИЯМИ

Определение 1. Пусть $m, N \in \mathbb{N}$ и P_N — полином Лежандра степени N . Определим на отрезке $\mathbb{I}$ с помощью m -кратного интегрирования систему многочленов $P_{m+N}^{[m]}(t)$ степени $m + N$ и уровня m

$$(12) \quad \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) := \mathbf{J}^m P_N(t) = \int_1^t ds_1 \int_1^{s_1} ds_2 \dots \int_1^{s_{m-1}} P_N(s_m) ds_m$$

$$(13) \quad = \frac{1}{(m-1)!} \int_1^t (t-s)^{m-1} P_N(s) ds, \quad t \in \mathbb{I},$$

При $m = 0$ считается, что $\mathbb{P}_N^{[0]}(t) = P_N(t)$.

Формула (13) есть классическая формула Коши для решения начальной задачи (4),

$$\frac{d^m}{dt^m} u(t) = P_N(t), \quad u(1) = \frac{d}{dt} u(1) = \dots = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(1) = 0.$$

Как уже упоминалось, вольтерровский интеграл (13) является правым интегралом Римана–Лиувилля дробного порядка m , но в нашем частном случае m есть положительное целое число.

Следующие рекуррентные соотношения очевидны,

$$(14) \quad \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) = \int_1^t \mathbb{P}_{m-1+N}^{[m-1]}(s) ds = \mathbf{J} \mathbb{P}_{m-1+N}^{[m-1]}(t), \quad \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) = \mathbf{D} \mathbb{P}_{m+1+N}^{[m+1]}.$$

Ясно, что многие свойства полиномов $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ будут получаться, исходя из свойств полиномов Лежандра. Таковой является разностная рекуррентная формула

$$(15) \quad \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) = \frac{\mathbb{P}_{m+N}^{[m-1]}(t) - \mathbb{P}_{m+N-2}^{[m-1]}(t)}{2N+1}, \quad N \geq 1.$$

Ниже в таблице ?? приводятся полиномы $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ с малыми индексами.

ТАБЛИЦА 1. Полиномы $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ с малыми индексами

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$P_m^{[m]}$	1	$t - 1$	$\frac{(t-1)^2}{2}$	$\frac{(t-1)^3}{3!}$
$P_{m+1}^{[m]}$	t	$\frac{t^2 - 1}{2}$	$\frac{(t-1)^2(t+2)}{6}$	$\frac{(t-1)^3(t+3)}{4!}$
$P_{m+2}^{[m]}$	$\frac{3t^2 - 1}{2}$	$\frac{t^3 - t}{2}$	$\frac{(t^2 - 1)^2}{8}$	$\frac{(t-1)^3(3t^2 + 9t + 8)}{120}$
$P_{m+3}^{[m]}$	$\frac{5t^3 - 3t}{2}$	$\frac{(t^2 - 1)(5t^2 - 1)}{8}$	$\frac{(t^2 - 1)^2 t}{8}$	$\frac{(t^2 - 1)^3}{2^3 3!}$

Предложение 1. Пусть $q_k(t)$ — многочлен степени k и неотрицательные целые числа k, m, N удовлетворяют неравенству $k + m < N$. Тогда имеет место свойство ортогональности

$$(16) \quad (q_k, \mathbf{J}^m P_N)_{L_2} = \int_{-1}^1 q_k(t) [\mathbf{J}^m P_N](t) dt = 0,$$

а также

$$(17) \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) dt = \begin{cases} 0, & N > m \\ \frac{(-1)^m 2^m}{(m+1)! C_{2m+1}^m}, & N = m \end{cases}$$

Доказательство. Если $m = 0$, то мы имеем свойство ортогональности полиномов Лежандра, $\int_{-1}^1 q_k(t) P_N(t) dt = 0$, $k < N$. Общий случай (16) также сводится к ортогональности многочленов Лежандра

$$(q_k, \mathbf{J}^m P_N)_{L_2} = (\underbrace{\mathbf{J}^{m*} q_k}_{deg=k+m}, P_N) = 0, \quad k + m < N.$$

Прямые вычисления в (17) при $N = m$ дают

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \mathbb{P}_{2m}^{[m]}(t) dt &= \frac{(-1)^m}{2^m m!} \int_{-1}^1 (1-t^2)^m dt = \frac{(-1)^m}{2^m m!} 2^{2m+1} B(m+1, m+1) \\ &= \frac{(-1)^m 2^{2m+1}}{m!} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(2m+2)} = \frac{(-1)^m 2^{2m+1}}{(m+1)! C_{2m+1}^m}, \end{aligned}$$

где $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ есть бета-функция (33). Утверждение доказано. $\square$

Из (4) при $m = N$ и формулы Родрига (37)

$$\mathbf{D}^N \frac{(t^2 - 1)^N}{2^N N!} = P_N(t)$$

следует, что $\mathbf{J}^N P_N(t) = \mathbb{P}_{2N}^{[N]}(t) = \frac{(t^2 - 1)^N}{2^N N!}$, а также

$$(18) \quad \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) = \begin{cases} \mathbf{J}^{m-N} P_{2N}^{[N]}(t), & m > N \\ \mathbf{D}^{N-m} P_{2N}^{[N]}(t), & N \geq m. \end{cases}$$

Эта формула говорит о том, что система полиномов $\{\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}, m \geq 1, N \geq 0\}$ разделяется на две части, $N < m$ и $N \geq m$, у которых могут быть различные свойства.

Предложение 2. 1) Полиномы $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t)$ можно записать с помощью гипергеометрической функции Гаусса ${}_2F_1$ или неклассических полиномов Якоби $P_N^{(m, -m)}(t)$ в следующем виде

$$(19) \quad \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) = \frac{(t-1)^m}{m!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N, N+1 \\ m+1 \end{matrix} \middle| \frac{1-t}{2} \right) = \frac{(t-1)^m}{m!} \frac{P_N^{(m, -m)}(t)}{C_{m+N}^m}.$$

2) $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ можно записать с помощью гипергеометрической функции ${}_2F_1$, но в отличие от (19), с другими параметрами

$$(20) \quad P_{m+N}^{[m]}(t) = \frac{(t^2 - 1)^m (t+1)^{N-m}}{2^N m!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N, -N+m \\ m+1 \end{matrix} \middle| \frac{t-1}{t+1} \right).$$

Доказательство. 1) Рассмотрим формулу Мерфи (38) для полиномов Лежандра

$$P_N(t) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N, N+1 \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{1-t}{2} \right) = \sum_{k=0}^N \frac{(-N)_k (N+1)_k}{k! (1)_k} \frac{(1-t)^k}{2^k},$$

где ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса (30). После m -кратного интегрирования этого равенств получим

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^m P_N(t) &= \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^m (-N)_k (N+1)_k (1-t)^{k+m}}{k! k! (k+1) \dots (k+m)} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{(t-1)^m}{m!} \sum_{k=0}^N \frac{(-N)_k (N+1)_k (1-t)^k}{k! (m+1)_k} \frac{1}{2^k} = \frac{(t-1)^m}{m!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N, N+1 \\ m+1 \end{matrix} \middle| \frac{1-t}{2} \right). \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы воспользовались определением гипергеометрической функции Гаусса ${}_2F_1$. Возникшая здесь гипергеометрическая функция, с точностью до множителя, представляет собой неклассический полином Якоби (36) с параметрами $\alpha = m$, $\beta = -m$.

2) Для доказательства (20) будет использоваться вторая часть формулы (18) при $N \geq m$. Дифференцируя по правилу Лейбница, получим

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) &= \mathbf{D}^{N-m} P_{2N}^{[N]}(t) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^{N-m}}{dt^{N-m}} (t^2 - 1)^N \\ &= \sum_{k=0}^{\boxed{N-m}} \frac{C_{N-m}^k}{2^N N!} \left((t+1)^N \right)^{(k)} \left((t-1)^N \right)^{(N-m-k)} \\ &= \frac{(t-1)^m (t+1)^N}{2^N} \sum_{k=0}^{N-m} \frac{(N-m)! N! (t-1)^k (t+1)^{-k}}{k! (N-m-k)! (N-k)! \underbrace{(m+k)!}_{=m!(m+1)_k}} \\ &= \frac{(t-1)^m (t+1)^N}{2^N m!} \sum_{k=0}^{N-m} \frac{(N-m)! N! (t-1)^k (t+1)^{-k}}{k! (N-m-k)! (N-k)! (m+1)_k} \\ &= \frac{(t-1)^m (t+1)^N}{2^N m!} \sum_{k=0}^{N-m} \frac{(m-N)_k (-N)_k}{k! (m+1)_k} \left(\frac{t-1}{t+1} \right)^k \\ &= \frac{(t-1)^m}{m!} \frac{(t+1)^N}{2^N} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N, -N+m \\ m+1 \end{matrix} \middle| \frac{t-1}{t+1} \right) \\ &= \frac{(t^2-1)^m}{m!} \frac{(t+1)^{N-m}}{2^N} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N, -N+m \\ m+1 \end{matrix} \middle| \frac{t-1}{t+1} \right). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали формулы $(-N)_k = \frac{(-1)^k N!}{(N-k)!}$, $(-N)_k = \frac{(-1)^k (N-m)!}{(N-m-k)!}$ и определение гипергеометрической функции Гаусса.

В силу аналитического продолжения гипергеометрической функции Гаусса по параметрам, формула (20) будет выполняться и для $N < m$. Предложение доказано. $\square$

Замечание 1. Получить формулу (19) можно другим способом. Рассмотрим формулу (18) при $N < m$. Тогда имеем интегральное представление

$$\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) = \mathbf{J}^{m-N} \mathbb{P}_{2N}^{[N]}(t) = \frac{(-1)^m}{2^N N! (m-N-1)!} \int_t^1 (s-t)^{m-N-1} (1-s^2)^N ds.$$

Замена $s = 1 + (t-1)r$ приводит нас к интегралу Эйлера (32) с параметрами $a = N+1$, $b = N$, $c = m+1$ и условием $c-a = m-N > 0$,

$$\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) = \frac{(t-1)^m}{N!(m-N-1)!} \int_0^1 r^N (1-r)^{m-N-1} \left(1 - \frac{1-t}{2}r\right)^N dr.$$

От интеграла Эйлера переходим к гипергеометрической функции ${}_2F_1$,

$$\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) = \frac{(t-1)^m}{m!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N, N+1 \\ m+1 \end{matrix} \middle| \frac{1-t}{2} \right).$$

В диапазоне $N \geq m$ формула (19) будет справедлива в силу аналитического продолжения гипергеометрической функции Гаусса по параметрам.

Обратив внимание на формулы (43), (44) и (45) для присоединенных функций Лежандра (41) из формулы (19) получаем

Следствие 1. Если $N \geq m$, то $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ можно выразить через присоединенные функции Лежандра P_N^m , P_N^{-m} , $m \geq 0$

$$(21) \quad \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) = (-1)^m (1-t^2)^{\frac{m}{2}} P_N^{-m}(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{(N-m)!}{(N+m)!} P_N^m(t).$$

3.1. Значения полиномов $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(\pm 1)$ на концах отрезка $\mathbb{I}$. Из равенства $\mathbf{D}^j \mathbb{P}_{m+N}^{[m]} = \mathbb{P}_{m+N-j}^{[m-j]}$ следует, что для вычисления производных в точках ± 1 надо знать $\mathbb{P}_{k+n}^{[k]}(\pm 1)$ при всех допустимых значениях k и n . Из определения (1) уже ясно что, $\mathbb{P}_{k+n}^{[k]}(1) = 0$ при $1 \leq m$ для любых n .

Теорема 1. Система полиномов $\{\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}, N \geq m\}$ является ортогональным базисом однородного пространства Соболева $H_0^m(\mathbb{I})$, т.е.

$$\mathbf{D}^j \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(1) = \mathbf{D}^j \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1) = 0 \text{ при } 0 \leq j \leq m-1,$$

$$((\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}, \mathbb{P}_{m+N'}^{[m]}))_{H_0^m(\mathbb{I})} = \frac{2\delta_{N'}^N}{2N+1}.$$

Доказательство. Напомним, что $\mathbb{P}_{k+N}^{[k]}(1) = 0$ при $1 \leq k \Rightarrow \mathbf{D}^j \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(1) = 0$ при $0 \leq j \leq m-1$. Пусть $t = -1$, тогда

$$(22) \quad \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_{-1}^1 (s+1)^{m-1} P_N(s) ds.$$

Ортогональность полиномов Лежандра дает $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1) = 0$ при $1 \leq m \leq N$. Поэтому $\mathbf{D}^j \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1) = \mathbb{P}_{m+N-j}^{[m-j]}(-1) = 0$ при $1 \leq m-j \leq N \iff \underbrace{m-N}_{\leq 0} \leq j \leq$

$m-1 \Rightarrow 0 \leq j \leq m-1$. Заметим, что из представления (20) следует, что $t = -1$ есть корень $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) = 0$ кратности m , т.е. для $N \geq m$ выполняется равенство $\mathbf{D}^j \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1) = 0$ при $0 \leq j \leq m-1$. Ортогональность в энергетической норме следует из ортогональности полиномов Лежандра в пространстве $L_2(\mathbb{I})$

$$((\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}, \mathbb{P}_{m+N'}^{[m]}))_{H_0^m(\mathbb{I})} = (P_N, P_{N'})_{L_2(\mathbb{I})} = \frac{2\delta_{N'}^N}{2N+1}.$$

Предложение доказано. $\square$

Таким образом, соотношение $m \leq N$ дает $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1) = 0$. При $m \geq N + 1$ вычисление значений $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1)$ приводится в следующем предложении, при этом устанавливается их связь со сферической функцией Бесселя $j_N(z)$ и полиномами Бесселя $y_k(z)$.

Предложение 3. 1) Значения $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1)$ при $m \geq N + 1$ участвуют в следующем представлении для сферической функции Бесселя $j_N(z)$

$$(23) \quad \int_{-1}^1 P_N(s) e^{isz} ds = 2i^N j_N(z) = \frac{-ie^{-iz}}{z} \sum_{m=N+1}^{\infty} (-iz)^m \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1),$$

при этом

$$\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1) = \frac{(-2)^m (m-1)!}{(m-N-1)!(m+N)!} = \frac{(-2)^m C_{m-1}^N}{m! C_{m+N}^N}, \quad 0 \leq N \leq m-1.$$

2) Если рассмотреть конечный отрезок $N+1 \leq m \leq M$, то значения $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1)$ и полиномы Бесселя y_k связываются следующим тождеством

$$(24) \quad 2(-1)^{N+1} (-iz)^M \sum_{k=0}^{\left[\frac{M-N+1}{2}\right]-1} (-1)^k c_{N,k}^{[M]} y_{M-N-2k-1} \left(\frac{-i}{z} \right) \\ = \sum_{m=N+1}^M (-iz)^m \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1),$$

где

$$c_{N,k}^{[M]} = (N-M+2k+1/2) \frac{(-1)^{M-N-k} 2^M C_M^k C_{2M}^{2N+2k+1}}{(M+1)! C_{2M}^{M+1} C_{M-1}^{N+k}}, \quad 0 \leq k \leq M-N-1.$$

Доказательство. 1) Рассмотрим разложение в степенной ряд целой функции

$$2i^N e^{iz} j_N(z) = e^{iz} \int_{-1}^1 e^{izs} P_N(s) ds = \int_{-1}^1 e^{iz(s+1)} P_N(s) ds \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \left(\int_{-1}^1 e^{iz(s+1)} P_N(s) ds \right)_{z=0}^{(m)} = \sum_{m=N}^{\infty} \frac{(iz)^m}{m!} \int_{-1}^1 (s+1)^m P_N(s) ds.$$

Используем теперь (22),

$$\mathbb{P}_{m+1+N}^{[m+1]}(-1) = \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_{-1}^1 (s+1)^m P_N(s) ds,$$

и в итоге получаем нужное

$$2i^N e^{iz} j_N(z) = - \sum_{m=N}^{\infty} (-iz)^m \mathbb{P}_{m+1+N}^{[m+1]}(-1) = - \sum_{m=N+1}^{\infty} (-iz)^{m-1} \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1).$$

Таким образом, $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1)$ это просто коэффициент при z^{m-1} в степенном ряде целой функции $-2i^N e^{-z} j_N(iz)$. Для вычисления $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1)$ воспользуемся формулой (49)

$$2i^N e^{iz} j_N(z) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N+m)!(2iz)^{N+m}}{m!(m+2N+1)!} = 2 \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{(m-1)!(2iz)^{m-1}}{(m-N-1)!(m+N)!}.$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях z в этих рядах дает

$$\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1) = \frac{(-2)^m(m-1)!}{(m-N-1)!(m+N)!} = \frac{(-2)^m C_{m-1}^N}{m! C_{m+N}^N}, \quad 0 \leq N \leq m-1.$$

Пункт 1) доказан. Формула (24) пункта 2) будет доказана в теореме 2. $\square$

Замечание 2. Значение $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1)$ можно вычислить непосредственно по формуле (19), применив формулу Чу–Вандермонда (35). В самом деле, условие $N > N - m$ выполняется, поэтому

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1) &= \frac{(-2)^m}{m!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N, N+1 \\ m+1 \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{(-2)^m}{m!} \frac{(m-N)_N}{(m+1)_N} \\ &= \begin{cases} \frac{(-2)^m C_{m-1}^N}{m! C_{m+N}^N}, & m \geq N+1 \\ 0, & 1 \leq m \leq N \\ P_N(-1) = (-1)^N, & m = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

4. РАЗЛОЖЕНИЕ $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ ПО ПОЛИНОМАМ ЛЕЖАНДРА И КОНЕЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

В этом параграфе будет получено несколько представлений для конечного преобразования Фурье $\widehat{\mathbb{P}}_{m+N}^{[m]}$ от полиномов $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$,

$$(25) \quad \widehat{\mathbb{P}}_{m+N}^{[m]}(z) = \int_{-1}^1 \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(s) e^{isz} ds,$$

аналогичных формулам (47) и (23) для полиномов Лежандра. Затем будет сформулирована и доказана теореме о разложении $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ в сумму по полиномам Лежандра.

Применим преобразование Фурье к обеим частям уравнения (4) и проведем интегрирование по частям m раз. В результате получим формулу

$$(26) \quad \int_{-1}^1 u(s) e^{isz} ds = \frac{i^m}{z^m} \int_{-1}^1 f(s) e^{isz} ds - \frac{i e^{iz}}{z} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{i^k}{z^k} u^{(k)}(1) + \frac{i e^{-iz}}{z} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{i^k}{z^k} u^{(k)}(-1).$$

Если применить ее к уравнению $u^{(m+N+1)}(t) = 0$ и взять $u(t) = \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t)$ — полином степени $m+N$, то получится равенство

$$\widehat{\mathbb{P}}_{m+N}^{[m]}(z) = \frac{-i e^{iz}}{z} \sum_{k=0}^{m+N} \frac{i^k \mathbf{D}^k \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(1)}{z^k} + \frac{i e^{-iz}}{z} \sum_{k=0}^{m+N} \frac{i^k \mathbf{D}^k \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1)}{z^k},$$

переходящее при $m=0$ в равенство для полиномов Лежандра

$$\int_{-1}^1 P_N(s) e^{isz} ds = 2i^N j_N(z) = \frac{-i e^{iz}}{z} \sum_{k=0}^N \frac{i^k P_N^{(k)}(1)}{z^k} + \frac{i e^{-iz}}{z} \sum_{k=0}^N \frac{i^k P_N^{(k)}(-1)}{z^k}$$

и которое совпадает с (54).

Если применить формулу (26) к уравнению $\mathbf{D}^m \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) = P_N(t)$ с частично известными граничными условиями $\mathbf{D}^k \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(1) = 0$ при $0 \leq k \leq m-1$ и

$\mathbf{D}^k \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1) = 0$ при $m - N \leq k \leq m - 1$, то получим

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{P}}_{m+N}^{[m]}(z) &= \frac{2i^{m+N} j_N(z)}{z^m} + \frac{ie^{-iz}}{z} \sum_{k=0}^{m-N-1} \left(\frac{i}{z}\right)^k \mathbf{D}^k \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1) \\ (27) \quad &= \frac{2i^{m+N} j_N(z)}{z^m} + \frac{ie^{-iz}}{z} \sum_{k=N+1}^m \left(\frac{i}{z}\right)^{m-k} \mathbb{P}_{k+N}^{[k]}(-1). \end{aligned}$$

При $N \leq m - 1$ эта формула имеет недостаток с точки зрения обращения преобразования Фурье, так как каждое слагаемое содержит сингулярность, которая исчезает только при их суммировании. Выделим сингулярность в первом слагаемом. Для этого воспользуемся формулой (23)

$$2i^N j_N(z) = \frac{-ie^{-iz}}{z} \sum_{k=N+1}^{\infty} (-iz)^k \mathbb{P}_{k+N}^{[k]}(-1).$$

При $N \leq m - 1$ мы получим разложение Лорана в точке $z = 0$

$$\begin{aligned} \frac{2i^{m+N} e^{iz} j_N(z)}{z^m} &= \frac{-i}{z} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^{m-k} \mathbb{P}_{k+N}^{[k]}(-1) \\ &= \frac{-i}{z} \sum_{k=N+1}^m \left(\frac{i}{z}\right)^{m-k} \mathbb{P}_{k+N}^{[k]}(-1) - \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^{m+1-k} \mathbb{P}_{k+N}^{[k]}(-1) \\ &= \underbrace{\frac{1}{iz} \sum_{k=0}^{m-N-1} \left(\frac{i}{z}\right)^k \mathbb{P}_{m-k+N}^{[m-k]}(-1)}_{\text{главная часть}} - \underbrace{\sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^{m+1-k} \mathbb{P}_{k+N}^{[k]}(-1)}_{\text{правильная часть}}. \end{aligned}$$

Подставляем найденное формулу (27)

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{P}}_{m+N}^{[m]}(z) &= \frac{2i^{m+N} j_N(z)}{z^m} + \frac{ie^{-iz}}{z} \sum_{k=0}^{m-N-1} \left(\frac{i}{z}\right)^k \mathbf{D}^k \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1) \\ &= \frac{-ie^{-iz}}{z} \sum_{k=0}^{m-N-1} \left(\frac{i}{z}\right)^k \mathbb{P}_{m-k+N}^{[m-k]}(-1) - e^{-iz} \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^{m+1-k} \mathbb{P}_{k+N}^{[k]}(-1) \\ &\quad + \frac{ie^{-iz}}{z} \sum_{k=0}^{m-N-1} \left(\frac{i}{z}\right)^k \mathbf{D}^k \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1) = \frac{-ie^{-iz}}{z} \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^{m-k} \mathbb{P}_{k+N}^{[k]}(-1). \end{aligned}$$

В результате мы получаем обобщение формулы (23), которое формулируется в следующем Предложении.

Предложение 4. 1) Если $N \leq m - 1$, то

$$\widehat{\mathbb{P}}_{m+N}^{[m]}(z) = \frac{-ie^{-iz}}{z} \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^{m-k} \mathbb{P}_{k+N}^{[k]}(-1).$$

2) Если $N \geq m$, то

$$\widehat{\mathbb{P}}_{m+N}^{[m]}(z) = \frac{-ie^{-iz}}{z} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^{m-k} \mathbb{P}_{k+N}^{[k]}(-1).$$

Эти две формулы можно объединить в одну

$$\widehat{\mathbb{P}}_{m+N}^{[m]}(z) = \frac{-ie^{-iz}}{z} \sum_{k=\max(m,N)+1}^{\infty} \left(\frac{i}{z}\right)^{m-k} \mathbb{P}_{k+N}^{[k]}(-1),$$

из которой (23) получается при $m = 0$.

В следующей теореме приводится разложение полиномов $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ по полиномам Лежандра.

Теорема 2. 1) Если $N \leq m - 1$, то

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-N+1}{2}\right]-1} (-1)^{m-k} c_{N,k}^{[m]} P_{m-N-2k-1}(t) + \sum_{k=\left[\frac{m-N+1}{2}\right]}^m (-1)^{m-k} c_{N,k}^{[m]} P_{N-m+2k}(t). \end{aligned}$$

2) Если $N \geq m$, то

$$\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} c_{N,k}^{[m]} P_{N-m+2k}(t).$$

Здесь коэффициенты $c_{N,k}^{[m]}$ соответствуют (56), т.е.

$$c_{N,k}^{[m]} = \frac{C_m^k (N - m + 2k + 1/2) \Gamma(N - m + k + 1/2)}{2^m \Gamma(N + k + 3/2)}, \quad 0 \leq k \leq m.$$

Доказательство. Заметим, что вид разложений можно считать известным заранее, исходя из определения (1) полиномов $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$, поэтому наша основная задача состоит в нахождении самих коэффициентов. Как вариант, это можно сделать, учитывая свойство ортогональности полиномов Лежандра. Однако, на наш взгляд, определение коэффициентов удобнее провести в пространстве образов преобразования Фурье, пользуясь при этом свойствами сферических функций Бесселя положительного и отрицательного порядков.

Докажем сначала, что преобразование Фурье $\widehat{\mathbb{P}}_{m+N}^{[m]}$ от полиномов $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ имеет вид:

1) если $N \leq m - 1$, то

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{P}}_{m+N}^{[m]}(z) &= 2(-i)^{m+N+1} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-N+1}{2}\right]-1} c_{N,k}^{[m]} j_{m-N-2k-1}(z) \\ &\quad + 2i^{N+m} \sum_{k=\left[\frac{m-N+1}{2}\right]}^m c_{N,k}^{[m]} j_{N-m+2k}(z), \end{aligned}$$

2) если $N \geq m$, то

$$\widehat{\mathbb{P}}_{m+N}^{[m]}(z) = 2i^{N+m} \sum_{k=0}^m c_{N,k}^{[m]} j_{N-m+2k}(z).$$

Сразу заметим, что второй случай более простой, в нем нет сингулярностей. Поэтому мы будем подробно рассматривать первый случай, содержащий сингулярности. Разобьем разложение (55) на две части, обозначив для краткости

$$\left(\frac{j_N(z)}{z^m}\right)^- = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-N+1}{2}\right]-1} C_{N,k}^{[m]} \underbrace{j_{N-m+2k}(z)}_{<0},$$

$$\left(\frac{j_N(z)}{z^m}\right)^+ = \sum_{k=\left[\frac{m-N+1}{2}\right]}^m C_{N,k}^{[m]} \underbrace{j_{N-m+2k}(z)}_{\geq 0}.$$

Тогда получим

$$\frac{j_N(z)}{z^m} = \sum_{k=0}^m c_{N,k}^{[m]} j_{N-m+2k}(z) = \left(\frac{j_N(z)}{z^m}\right)^- + \left(\frac{j_N(z)}{z^m}\right)^+.$$

Рассмотрим сингулярную часть $\left(\frac{j_N(z)}{z^m}\right)^-$ и преобразуем ее, воспользовавшись формулой (52) для сферических функций Бесселя отрицательного порядка

$$j_{-M}(z) = i(-1)^{M-1} j_{M-1}(z) + i^{-(M-1)} \frac{e^{-iz}}{z} y_{M-1}\left(\frac{-i}{z}\right), \quad M \geq 1.$$

Получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{2i^{m+N} j_N(z)}{z^m}\right)^- &= 2(-1)^N \frac{ie^{-iz}}{z} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-N+1}{2}\right]-1} (-1)^k c_{N,k}^{[m]} y_{m-N-2k-1}\left(\frac{-i}{z}\right) \\ &\quad + 2(-i)^{m+N+1} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-N+1}{2}\right]-1} c_{N,k}^{[m]} j_{m-N-2k-1}(z). \end{aligned}$$

Затем данное выражение подставим в основную формулу (27) и сгруппируем вместе сингулярные слагаемые

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{P}}_{m+N}^{[m]}(z) &= \frac{ie^{-iz}}{z} \times \\ &\quad \left(2(-1)^N \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-N+1}{2}\right]-1} (-1)^k c_{N,k}^{[m]} y_{m-N-2k-1}\left(\frac{-i}{z}\right) + \sum_{k=0}^{m-N-1} \left(\frac{i}{z}\right)^k \mathbf{D}^k \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1) \right) \\ &\quad + 2(-i)^{m+N+1} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-N+1}{2}\right]-1} c_{N,k}^{[m]} j_{m-N-2k-1}(z) + \left(\frac{2i^{m+N} j_N(z)}{z^m}\right)^+. \end{aligned}$$

В результате уничтожения сингулярностей получается тождество

$$2(-1)^N \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-N+1}{2}\right]-1} (-1)^k c_{N,k}^{[m]} y_{m-N-2k-1}(-z) + \sum_{k=0}^{m-N-1} z^k \mathbf{D}^k \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(-1) = 0,$$

совпадающее с недоказанной формулой (24), и выражение для $\widehat{\mathbb{P}}_{m+N}^{[m]}$,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{P}}_{m+N}^{[m]}(z) &= 2(-i)^{m+N+1} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-N+1}{2}\right]-1} c_{N,k}^{[m]} j_{m-N-2k-1}(z) + \left(\frac{2i^{m+N} j_N(z)}{z^m} \right)^+ \\ &= 2(-i)^{m+N+1} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-N+1}{2}\right]-1} c_{N,k}^{[m]} j_{m-N-2k-1}(z) + 2i^{N+m} \sum_{k=\left[\frac{m-N+1}{2}\right]}^m c_{N,k}^{[m]} j_{N-m+2k}(z),\end{aligned}$$

в котором обратное преобразование Фурье можно вычислить от каждого слагаемого. В итоге приходим к искомому разложению для $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-N+1}{2}\right]-1} (-1)^{m-k} c_{N,k}^{[m]} P_{m-N-2k-1}(t) + \sum_{k=\left[\frac{m-N+1}{2}\right]}^m (-1)^{m-k} c_{N,k}^{[m]} P_{N-m+2k}(t).\end{aligned}$$

Общая формула (56) для коэффициентов $c_{N,k}^{[m]}$ охватывает диапазон $0 \leq k \leq m$,

$$c_{N,k}^{[m]} = \frac{C_m^k (N-m+2k+1/2) \Gamma(N-m+k+1/2)}{2^m \Gamma(N+k+3/2)}, \quad 0 \leq k \leq m,$$

поэтому гамма-функции могут вычисляться по разным формулам. Разобьём последнюю сумму на две части, в результате получится три части

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-N+1}{2}\right]-1} (-1)^{m-k} c_{N,k}^{[m]} P_{m-N-2k-1}(t) \\ &+ \sum_{k=\left[\frac{m-N+1}{2}\right]}^{m-N-1} (-1)^{m-k} c_{N,k}^{[m]} \underbrace{P_{N-m+2k}(t)}_{\geq 0} + \sum_{k=m-N}^m (-1)^{m-k} c_{N,k}^{[m]} \underbrace{P_{N-m+2k}(t)}_{\geq 0}\end{aligned}$$

и вычислим коэффициенты в каждой части по общей формуле. В первых двух суммах индекс k лежит в диапазоне $0 \leq k \leq m-N-1$ и поэтому при вычислении гамма-функции в числителе будет использоваться формула $\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} 2^{2n} n!}{(2n)!}$. Для третьей суммы мы имеем диапазон $m-N \leq k \leq m$, по-

этому будет применяться формула $\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{\sqrt{\pi} (2n)!}{2^{2n} n!}$. В результате получаются два разных выражения

$$c_{N,k}^{[m]} = (N-m+2k+1/2) \begin{cases} \frac{(-1)^{m-N-k} 2^m C_m^k C_{2m}^{2N+2k+1}}{(m+1)! C_{2m}^{m+1} C_{m-1}^{N+k}}, & 0 \leq k \leq m-N-1 \\ \frac{2^{m+1} C_m^k C_{N+k}^m}{(m+1)! C_{2m+1}^m C_{2N+2k+1}^{2m+1}}, & m-N \leq k \leq m. \end{cases}$$

Теорема доказана. $\square$

5. БАЗИС ПРОСТРАНСТВА $H_0^m(\mathbb{I}) \cap H^{2m}(\mathbb{I})$

Напомним, что система полиномов $\{\mathbb{P}_{2m+N}^{[2m]}, N \geq 0\}$ будет базисом пространства $H^{2m}(\mathbb{I})$, а ее подсистема $\{\mathbb{P}_{2m+N}^{[2m]}, N \geq 2m\}$ — базисом однородного пространства $H_0^{2m}(\mathbb{I})$. Очевидно, часть базиса уже построена, так как при $N \geq 2m$ полиномы $\mathbb{P}_{2m+N}^{[2m]} \in H_0^{2m} \subset H_0^m \cap H^{2m}$, чтобы получить весь базис $H_0^m \cap H^{2m}$, полиномы $\{\mathbb{P}_{2m+N}^{[2m]}, 0 \leq N \leq 2m-1\}$ надо подправить. Для исправления мы воспользуемся равенством $\mathbb{P}_{2m+N}^{[2m]} = \mathbf{J}^m \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$. Разобьем весь диапазон $0 \leq N \leq 2m-1$ на две части. Пусть $N \leq m-1$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{Proj}_{m-N}^{\infty} \mathbb{P}_{m+N}^{[m]} &= \sum_{k=m-N}^m (-1)^{m-k} c_{N,k}^{[m]} P_{N-m+2k} = \sum_{s=0}^N (-1)^{N+s} c_{N,m-N+s}^{[m]} P_{m-N+2s} \\ &= \underbrace{\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor - 1} (-1)^{N+s} c_{N,m-N+s}^{[m]} P_{m-N+2s}}_{\text{степень полинома} \leq m-1} + \sum_{s=\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor}^N (-1)^{N+s} c_{N,m-N+s}^{[m]} \underbrace{P_{m-N+2s}}_{\geq m}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{Proj}_m^{\infty} \mathbb{P}_{m+N}^{[m]} = \sum_{s=\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor}^N (-1)^{N+s} c_{N,m-N+s}^{[m]} \underbrace{\mathbb{P}_{2m-N+2s}^{[m]}}_{\geq 2m} \in H_0^m(\mathbb{I}).$$

Пусть теперь $m \leq N \leq 2m-1$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{Proj}_{N-m}^{\infty} \mathbb{P}_{m+N}^{[m]} &= \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} c_{N,k}^{[m]} P_{N-m+2k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{m-\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (-1)^{m-k} c_{N,k}^{[m]} P_{N-m+2k}}_{\text{степень полинома} \leq m-1} \\ &+ \sum_{k=m-\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^m (-1)^{m-k} c_{N,k}^{[m]} \underbrace{P_{N-m+2k}}_{\geq m} \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\mathbf{Proj}_m^{\infty} \mathbb{P}_{m+N}^{[m]} = \sum_{k=m-\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^m (-1)^{m-k} c_{N,k}^{[m]} \underbrace{P_{N-m+2k}}_{\geq m} \in H_0^m(\mathbb{I}).$$

Таким образом, у нас есть основания для определения новых полиномов $\widehat{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]}$.

Определение 2. Определим на отрезке $\mathbb{I}$ с помощью m -кратного интегрирования и ортогонального проецирования полиномы степени $2m+N$ и уровня $2m$

$$\widehat{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]}(t) = \mathbf{J}_m^m \mathbf{Proj}_m^{\infty} \mathbf{J}_m^m P_N(t) = \mathbf{J}_m^m \mathbf{Proj}_m^{\infty} \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t).$$

Проверим, что полиномы $\tilde{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]} = \mathbf{J}_m^m \mathbf{Proj}_m^\infty \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ удовлетворяют уравнению $\mathbf{D}^{2m} \tilde{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]} = P_N$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{2m} \tilde{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]} &= \mathbf{D}^{2m} \mathbf{J}_m^m \mathbf{Proj}_m^\infty \mathbb{P}_{m+N}^{[m]} = \mathbf{D}^m \mathbf{Proj}_m^\infty \mathbb{P}_{m+N}^{[m]} = \\ &= \mathbf{D}^m (\mathbb{P}_{m+N}^{[m]} - \mathbf{Proj}_0^{m-1} \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}) = \mathbf{D}^m \mathbb{P}_{m+N}^{[m]} = P_N. \end{aligned}$$

Имеет место

Теорема 3. Система полиномов $\{\tilde{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]}, N \geq 0\}$ образует базис в пространстве $H^{2m}(\mathbb{I}) \cap H_0^m(\mathbb{I}) \subset H^{2m}(\mathbb{I})$, замкнутом подпространстве $H^{2m}(\mathbb{I})$, удовлетворяют уравнению $\mathbf{D}^{2m} \tilde{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]} = P_N$ и разлагаются по полиномам $\mathbb{P}_{m+n}^{[m]}$ уровня m

$$\tilde{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]}(t) = \begin{cases} (-1)^N \sum_{s=\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor}^N (-1)^s c_{N,m-N+s}^{[m]} \mathbb{P}_{2m-N+2s}^{[m]}(t), & 0 \leq N \leq m-1 \\ (-1)^m \sum_{k=m-\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^m (-1)^k c_{N,k}^{[m]} \mathbb{P}_{N+2k}^{[m]}(t), & m \leq N \leq 2m-1 \\ \mathbb{P}_{2m+N}^{[2m]}(t) = (-1)^m \sum_{k=0}^m (-1)^k c_{N,k}^{[m]} \mathbb{P}_{N+2k}^{[m]}(t), & 2m \leq N, \end{cases}$$

коэффициенты разложений вычисляются по формуле

$$(28) \quad c_{N,k}^{[m]} = \frac{(N-m+2k+1/2)2^m C_m^k}{(m+1)!} \frac{2C_{N+k}^m}{C_{2m+1}^m C_{2N+2k+1}^{2m+1}}, \quad m-N \leq k \leq m.$$

Пример 1. Пусть $m = 1$ и $N = 0, 1, 2$. В этом простом случае имеем

$$\tilde{\mathbb{P}}_{2+N}^{[2]}(t) = \begin{cases} c_{0,1}^{[1]} \mathbb{P}_2^{[1]}(t), & N = 0 \\ c_{1,1}^{[1]} \mathbb{P}_3^{[1]}(t), & N = 1 \\ \mathbb{P}_{2+N}^{[2]}(t) = -c_{N,0}^{[1]} \mathbb{P}_N^{[1]}(t) + c_{N,1}^{[1]} \mathbb{P}_{N+2}^{[1]}(t), & N \geq 2. \end{cases}$$

Вычислим коэффициенты по формуле (28): $c_{0,1}^{[1]} = 1$, $c_{1,1}^{[1]} = \frac{1}{3}$, $c_{2,0}^{[1]} = \frac{1}{5}$, $c_{2,1}^{[1]} = \frac{1}{5}$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_2^{[2]}(t) &= \mathbb{P}_2^{[1]}(t) = \frac{t^2-1}{2}, \quad \tilde{\mathbb{P}}_3^{[2]}(t) = \frac{1}{3} \mathbb{P}_3^{[1]}(t) = \frac{t^3-t}{6}, \\ \tilde{\mathbb{P}}_4^{[2]}(t) &= \mathbb{P}_4^{[2]}(t) = -c_{2,0}^{[1]} \mathbb{P}_2^{[1]}(t) + c_{2,1}^{[1]} \mathbb{P}_4^{[1]}(t) = \frac{\mathbb{P}_4^{[1]}(t) - \mathbb{P}_2^{[1]}(t)}{5} = \frac{(t^2-1)^2}{8}, \end{aligned}$$

где полиномы

$$\mathbb{P}_2^{[1]} = \frac{t^2-1}{2}, \quad \mathbb{P}_3^{[1]} = \frac{t^3-t}{2}, \quad \mathbb{P}_4^{[1]} = \frac{(t^2-1)(5t^2-1)}{8}, \quad \mathbb{P}_4^{[2]} = \frac{(t^2-1)^2}{8}$$

уже были подсчитаны в таблице 1.

Пример 2. На рис. 1 и рис. 2 изображены случаи $N \geq t$ и $N < t$, соответственно. Полиному $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ сопоставляется точка решетки с координатами (N, t) . Пунктирная линия $t = N$ разделяет эти случаи и сама соответствует полиномам $\mathbb{P}_{2m}^{[m]}$.

Рис. 1. Случай $N \geq t$: $m = 4$, $N = 7$, $\mathbb{P}_{11}^{[4]} = \sum_{k=0}^4 (-1)^{4-k} c_{7,k}^{[4]} P_{3+2k}$,

$$\text{Proj}_4^\infty \mathbb{P}_{11}^{[4]} = \sum_{k=1}^4 (-1)^{4-k} c_{7,k}^{[4]} P_{3+2k}.$$

Рис. 2. Случай $N < t$: $m = 5$, $N = 3$, $\mathbb{P}_8^{[5]} = q_1 + \sum_{k=2}^5 (-1)^{5-k} c_{3,k}^{[5]} P_{-2+2k}$,

$$\text{Proj}_5^\infty \mathbb{P}_8^{[5]} = \sum_{k=4}^5 (-1)^{5-k} c_{3,k}^{[5]} P_{-2+2k}.$$

6. ФАКТОРИЗАЦИЯ ОПЕРАТОРА ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Рассмотрим задачу (1)–(2) в слабой формулировке: для функции $f \in L_2(\mathbb{I})$, найти функцию $u \in H_0^m(\mathbb{I})$, удовлетворяющую условию

$$\int_{-1}^1 \mathbf{D}^m u \mathbf{D}^m v dt = \int_{-1}^1 f v dt \quad \text{или} \quad ((u, v))_{H_0^1(\mathbb{I})} = (f, v)_{L_2(\mathbb{I})} \quad \forall v \in H_0^m(\mathbb{I}).$$

Из теоремы 1 мы знаем, что в пространстве $H_0^m(\mathbb{I})$ система $\{\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}, N \geq m\}$ образует полиномиальный ортогональный базис, что поможет нам найти слабое решение. Решение будет иметь вид

$$u(t) = \sum_{N=m}^{\infty} u_N \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) \in H_0^m(\mathbb{I}),$$

поэтому

$$((u, \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}))_{H_0^1(\mathbb{I})} = (f, \mathbb{P}_{m+N}^{[m]})_{L_2(\mathbb{I})} = (-1)^m (\mathbf{J}^m f, P_N)_{L_2(\mathbb{I})}.$$

С другой стороны,

$$((u, \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}))_{H_0^1(\mathbb{I})} = u_N ((\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}, \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}))_{H_0^1(\mathbb{I})} = u_N (P_N, P_N)_{L_2(\mathbb{I})} = \frac{2}{2N+1} u_N.$$

В результате получаем решение задачи Дирихле в виде ряда, который сходится по норме $H_0^m(\mathbb{I})$,

$$(29) \quad u(t) = (-1)^m \sum_{N=m}^{\infty} (N+1/2) (\mathbf{J}^m f, P_N)_{L_2(\mathbb{I})} \mathbb{P}_{m+N}^{[m]}(t) \in H_0^m(\mathbb{I}).$$

Мы сможем просуммировать этот ряд, для этого надо сделать следующие действия

$$\begin{aligned} u(t) &= (-1)^m \mathbf{J}^m \sum_{N=m}^{\infty} (N+1/2) (\mathbf{J}^m f, P_N)_{L_2(\mathbb{I})} P_N(t) \\ &= (-1)^m \mathbf{J}^m \mathbf{Proj}_m^{\infty} \underbrace{\sum_{N=0}^{\infty} (N+1/2) (\mathbf{J}^m f, P_N)_{L_2(\mathbb{I})} P_N(t)}_{=\mathbf{J}^m f} = (-1)^m \mathbf{J}^m \mathbf{Proj}_m^{\infty} \mathbf{J}^m f \\ &= (-1)^m \mathbf{J}^{2m} f - \underbrace{(-1)^m \mathbf{J}^m \mathbf{Proj}_0^{m-1} \mathbf{J}^m f}_{deg=2m-1}. \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что решение u принадлежит пространству $H^{2m}(\mathbb{I})$, удовлетворяет уравнению $(-1)^m \mathbf{D}^{2m} u = f$ и $u \in H_0^m(\mathbb{I}) \cap H^{2m}(\mathbb{I})$, т.е. решение задачи Дирихле (1)–(2) представляется в виде

$$u(t) = [\mathbf{G}_{2m} f](t) = (-1)^m \mathbf{J}^m \mathbf{Proj}_m^{\infty} \mathbf{J}^m f(t)$$

и $\mathbf{G}_{2m} = (-1)^m \mathbf{J}^m \mathbf{Proj}_m^{\infty} \mathbf{J}^m$ — факторизация оператора Грина задачи (1)–(2).

Если правая часть в (1) представлена рядом Лежандра–Фурье

$$(-1)^m f(t) = \sum_{N=0}^{\infty} f_N P_N(t),$$

то решением будет ряд

$$u(t) = \sum_{N=0}^{\infty} f_N \tilde{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]}(t) = \underbrace{\sum_{N=0}^{2m-1} f_N \tilde{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]}(t)}_{\in H_0^m(\mathbb{I})} + \underbrace{\sum_{N=2m}^{\infty} f_N \mathbb{P}_{2m+N}^{[2m]}(t)}_{\in H_0^{2m}(\mathbb{I})}.$$

Покажем, что решение $u \in H^{2m}(\mathbb{I})$. Во-первых, для второй (бесконечной) суммы сразу вычисляется и оценивается энергетическая норма в пространстве $H_0^{2m}(\mathbb{I})$, имеем

$$\left\| \sum_{N=2m}^{\infty} f_N \mathbb{P}_{2m+N}^{[2m]} \right\|_{H_0^{2m}(\mathbb{I})} = \left\| \sum_{N=2m}^{\infty} f_N P_N \right\|_{L_2(\mathbb{I})} \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{I})}.$$

Первая сумма (конечная) есть полином степени $4m-1$ и, значит, есть элемент $H^{2m}(\mathbb{I})$, $\sum_{N=0}^{2m-1} f_N \tilde{\mathbb{P}}_{2m+N}^{[2m]}(t) \in H^{2m}(\mathbb{I})$. Для оценки нормы в пространстве $H^{2m}(\mathbb{I})$, т.е. для оценки всех производных полинома порядка $k \leq 2m$, воспользуемся неравенством Маркова–Никольского для производной порядка k полинома степени $n = 4m-1$ относительно L_2 -метрики на отрезке $\mathbb{I}$

$$\|\mathbf{D}^k p_n\|_{L_2(\mathbb{I})} \leq C_k n^{2k} \|p_n\|_{L_2(\mathbb{I})},$$

см. [13, стр. 284, п. 55, формула (8)]. В итоге получим, что решение u принадлежит подпространству $H^{2m}(\mathbb{I}) \cap H_0^m(\mathbb{I})$ с оценкой для нормы

$$\|u\|_{H^{2m}(\mathbb{I})} \leq C \|f\|_{L_2(\mathbb{I})}.$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена факторизация оператора Грина краевой задачи Дирихле (1)–(2) на отрезке $\mathbb{I}$. Полученная факторизация связана с полиномами, для которых введено обозначение $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$, и изучению которых отведена большая часть работы. В теореме 2 решается задача разложения $\mathbb{P}_{m+N}^{[m]}$ в сумму по полиномам Лежандра. В результате появилась возможность осуществлять операцию ортогонального проецирования в пространстве $L_2(\mathbb{I})$, построить базис в пространстве Соболева $H_0^m(\mathbb{I}) \cap H^{2m}(\mathbb{I})$ и решение задачи (1)–(2) в виде ряда. Предполагается, что полученные результаты будут применены при решении краевых задач на отрезке $\mathbb{I}$ более общего характера.

8. ПРИЛОЖЕНИЕ

В Приложении приводятся формулы, которые соответствуют теме нашего исследования. Эти формулы можно найти в известной справочной литературе и монографиях, например, в [22, 12, 14, 9, 15, 16, 21, 23, 24, 10]. В некоторых случаях приводятся ссылки на Интернет-ресурс, справочник по спец. функциям: NIST Digital Library of Mathematical Functions. <http://dlmf.nist.gov/>.

8.1. Гипергеометрическая функция Гаусса. Гипергеометрическая функция Гаусса является решением гипергеометрического дифференциального уравнения Гаусса

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$$

и представляется в виде степенного ряда

$$(30) \quad {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} z^k,$$

где параметры $a, b, c \in \mathbb{C}$, c не является отрицательным целым числом или 0. Символ Похгаммера $(a)_n$ определяется как $(a)_0 = 1$ и $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$.

Степенной ряд (30) сходится для $|z| < 1$ (см. [8, стр. 63], [10, стр. 283]) и становится конечной суммой (обрывается), если $a \in -\mathbb{N}$ или $b \in -\mathbb{N}$.

Для гипергеометрических функции Гаусса имеет место формула дифференцирования

$$(31) \quad \frac{d^m}{dz^m} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z \right) = \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a+m, b+m \\ c+m \end{matrix} \middle| z \right),$$

см. [11, Eq. 15.5.2], <http://dlmf.nist.gov/15.5.2>.

Гипергеометрическую функцию Гаусса при определенных условиях выражается через интеграл Эйлера

$$(32) \quad {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 r^{a-1} (1-r)^{c-a-1} (1-zr)^{-b} dr,$$

где $\Re(a) > 0$, $\Re(c-a) > 0$, $|z| < 1$, см. [17, стр. 44, формула (1.7.8)].

Интеграл Эйлера определяет бета-функцию,

$$(33) \quad B(a, b) = \frac{1}{a} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, 1-b \\ a+1 \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 r^{a-1} (1-r)^{b-1} dr.$$

Интегральное представление Эйлера позволяет вычислить значение гипергеометрической функции Гаусса при $z = 1$,

$$(34) \quad {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad \Re(c-a-b) > 0.$$

Формула Чу–Вандермонда:

$$(35) \quad {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N, b \\ c \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{(c-b)_N}{(c)_N}, \quad N > b-c,$$

см. [11, Eq. 15.4.24], <http://dlmf.nist.gov/15.4.24>.

Из интегрального представления Эйлера для гипергеометрической функции Гаусса ${}_2F_1$ следуют также другие тождества и преобразования.

8.2. Полиномы Якоби и Лежандра. Многочлены Якоби с параметрами $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ определяются как

$$(36) \quad P_N^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{(\alpha+1)_N}{N!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N, N+\alpha+\beta+1 \\ \alpha+1 \end{matrix} \middle| \frac{1-t}{2} \right), \quad N \geq 1,$$

причем классическим считается случай $\alpha, \beta > -1$, см. [12, формула (4.21.2)].

При $\alpha = \beta = 0$ мы получаем формулу (38) для многочленов Лежандра.

Полиномы Лежандра P_N определяются формулой Родрига

$$(37) \quad P_N(t) = \mathbf{D}^N \frac{(t^2-1)^N}{2^N N!}$$

и выражаются через гипергеометрическую функцию Гаусса (формула Мерфи)

$$(38) \quad P_N(t) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N, N+1 \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{1-t}{2} \right) = \sum_{k=0}^N \frac{(-N)_k (N+1)_k}{k! (1)_k} \frac{(1-t)^k}{2^k},$$

где ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса (30), см. [11, Eq. 14.7.13], <http://dlmf.nist.gov/14.7.13>.

Производящая функция для полиномов Лежандра имеет следующий вид

$$(39) \quad \frac{1}{\sqrt{1-2tz+z^2}} = \sum_{N=0}^{\infty} P_N(t) z^N, \quad |z| < 1,$$

см. [11, Eq. 14.7.19], <http://dlmf.nist.gov/14.7.19>.

Формула Кристоффеля–Дарбу,

$$(40) \quad K_{m-1}(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2k+1}{2} P_k(x) P_k(y) = \frac{m}{2} \frac{P_m(x) P_{m-1}(y) - P_{m-1}(x) P_m(y)}{x - y},$$

см. [11, Eq. 18.2.12], <http://dlmf.nist.gov/18.2.12>. Здесь $K_{m-1}(x, y)$ есть $(m-1)$ -ядро Дирихле.

14.18.6 см. [11, Eq. 14.18.6], <http://dlmf.nist.gov/14.18.6>.

Полиномы Лежандра P_N связаны со сферическими функциями Бесселя j_N положительного индекса через преобразование Фурье (47).

Полиномы Лежандра образуют ортогональный базис в пространстве $L_2(\mathbb{I})$ и являются частными случаями многочленов Гегенбауэра $C_n^{(\lambda)}$ при $\lambda = 1/2$ и полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}$ при $\alpha = \beta = 0$. Свойства этих полиномов можно найти в монографии [12].

8.3. Присоединенные функции Лежандра первого рода. Альтернативное название для присоединенных функций Лежандра на отрезке $\mathbb{I} = [-1, 1]$ это функции Феррера. Присоединенные функции Лежандра первого рода P_N^m степени N и порядка m , $-N \leq m \leq N$, определяются как

$$(41) \quad P_N^m(t) = (-1)^m (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \mathbf{D}^{m+N} \frac{(t^2-1)^N}{2^N N!},$$

см. [11, Eq. 14.7.10], <http://dlmf.nist.gov/14.7.10>.

Между функциями P_N^m и P_N^{-m} с положительными и отрицательными целыми порядками имеется соотношение,

$$P_N^{-m}(t) = (-1)^m \frac{(N-m)!}{(N+m)!} P_N^m(t), \quad |m| \leq N,$$

см. [11, Eq. 14.9.3], <http://dlmf.nist.gov/14.9.3>.

При $m \geq 0$ из (41) следует

$$P_N^m(t) = (-1)^m (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \mathbf{D}^m P_N(t),$$

см. [11, Eq. 14.7.8], <http://dlmf.nist.gov/14.7.8>.

При $m \geq 0$ для P_N^m и гипергеометрической функции Гаусса имеет место формула

$$(42) \quad P_N^m(t) = \frac{(-1)^m (N+m)! (1-t^2)^{m/2}}{2^m m! (N-m)!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} m-N, m+N+1 \\ m+1 \end{matrix} \middle| \frac{1-t}{2} \right),$$

см. [11, Eq. 14.3.4], <http://dlmf.nist.gov/14.3.4>, которая эквивалентна

$$(43) \quad P_N^m(t) = (-1)^m \frac{(N+m)!}{m! (N-m)!} \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^{m/2} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -N, N+1 \\ m+1 \end{matrix} \middle| \frac{1-t}{2} \right),$$

см. [11, Eq. 14.3.5], <http://dlmf.nist.gov/14.3.5>.

$$(44) \quad P_N^m(t) = \frac{(-1)^m (N+m)!}{2^N m! (N-m)!} (1+t)^{N-m/2} (1-t)^{m/2} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} m-N, -N \\ m+1 \end{matrix} \middle| \frac{t-1}{t+1} \right),$$

При отрицательном целом порядке $-m \leq 0$ мы имеем

$$(45) \quad P_n^{-m}(t) = (-1)^m (1-t^2)^{-\frac{m}{2}} \int_1^t ds_1 \int_1^{s_1} ds_2 \dots \int_1^{s_{m-1}} P_N(s_m) ds_m \\ = \frac{(-1)^m (1-t^2)^{-\frac{m}{2}}}{(m-1)!} \int_1^t (t-s)^{m-1} P_n(s) ds,$$

см. [11, Eq. 14.6.6], <http://dlmf.nist.gov/14.6.6>.

Присоединенные функции Лежандра первого рода P_N^m выражаются через полиномы Гегенбауэра $C_n^{(\lambda)}$ (ультрасферические полиномы), см. [11, Eq. 15.9.2], <http://dlmf.nist.gov/15.9.2>.

$$(46) \quad P_N^{-m}(t) = \frac{(2m)!(N-m)!}{2^m m! (N+m)!} (1-t^2)^{m/2} C_{N-m}^{(m+\frac{1}{2})}(t), \quad 0 \leq m \leq N,$$

см. [11, Eq. 14.3.21], <http://dlmf.nist.gov/14.3.21>.

8.4. Сферические функции Бесселя. Классическая монография [14] содержит обширную информацию и массу сведений по сферическим функциям Бесселя. Сферические функции Бесселя первого рода j_N связаны с цилиндрическими бесселевыми функциями $J_{N+1/2}$ порядка $N + \frac{1}{2}$

$$j_N(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{N+1/2}(z), \quad J_{N+1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+N+1/2}}{k! \Gamma(k+N+3/2)},$$

см. [16, стр. 12].

Сферические функции Бесселя j_N положительного индекса связаны с полиномами Лежандра P_N через конечное преобразование Фурье

$$(47) \quad 2i^N j_N(z) = \int_{-1}^1 P_N(s) e^{isz} ds,$$

см. [11, Eq. 18.17.19], <https://dlmf.nist.gov/18.17.19>, что эквивалентно разложению

$$(48) \quad e^{izt} = \sum_{k=0}^{\infty} i^k (2k+1) j_k(z) P_k(t).$$

В нашей работе также рассматриваются сферические функции Бесселя отрицательного порядка j_{-M} , $M \geq 1$ (некоторые авторы называют эти функции сферическими функциями Неймана)

$$j_{-M}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{-M+1/2}(z), \quad J_{-M+1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k-M+1/2}}{k! \Gamma(k-M+3/2)}.$$

Сферические функции Бесселя j_N положительного индекса являются целыми функциями, тогда как функции $j_{-M}(z)$ с отрицательным индексом в точке $z = 0$ имеют полюс порядка M . Целая функция $e^{\pm iz} j_N(z)$ имеет степенной ряд,

$$(49) \quad e^{\pm iz} j_N(z) = (2z)^N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(N+k)! (\pm iz)^k}{k! (k+2N+1)!},$$

см. [16, стр. 19].

Простейшими примерами сферических функций Бесселя служат функции $j_0(z) = \frac{\sin z}{z}$ и $j_{-1}(z) = \frac{\cos z}{z}$.

8.5. Полиномы Бесселя (см. <https://dlmf.nist.gov/18.34>). В монографии [18] изучаются полиномы Бесселя и их обобщения, доказываются свойства и рассматриваются приложения в различных областях математики.

Полиномы Бесселя $y_M(z)$ определяются формулой

$$(50) \quad y_M(z) = \sum_{k=0}^M \frac{(M+k)! z^k}{2^k (M-k)! k!},$$

см. [19, стр. 101, формула (3)], [20, стр. 62, формула (2)] и подчиняются рекуррентному соотношению

$$y_{M+1}(z) = (2M+1)zy_M(z) + y_{M-1}(z), \quad y_{-1}(z) = y_0(z) = 1, \quad y_1(z) = z + 1,$$

см. [19, стр. 101].

Также полиномы Бесселя выражаются через гипергеометрическую функцию

$$y_M(z) = {}_2F_0 \left(\begin{matrix} -M, M+1 \\ \sim \end{matrix} \middle| \frac{-z}{2} \right).$$

Полиномы Бесселя являются ортогональными многочленами на единичной окружности с весовой функцией $\rho(z) = e^{-2/z}$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} y_M(z) y_N(z) e^{-2/z} dz = \frac{(-1)^{N+1} 2\delta_N^M}{2N+1},$$

см. [19, стр. 104, формула (17)], [20, стр. 62, формула (4)], [11, Eq. 18.34.6], <https://dlmf.nist.gov/18.34.6>.

Сферические функции Бесселя положительного и отрицательного порядков связаны с многочленами Бесселя $y_M(z)$ посредством формул

$$(51) \quad 2i^M j_M(z) = \frac{-ie^{iz}}{z} y_M \left(\frac{i}{z} \right) + (-1)^M \frac{ie^{-iz}}{z} y_M \left(\frac{-i}{z} \right), \quad M \geq 0,$$

$$(52) \quad j_{-M}(z) = i(-1)^{M-1} j_{M-1}(z) + i^{-(M-1)} \frac{e^{-iz}}{z} y_{M-1} \left(\frac{-i}{z} \right), \quad M \geq 1,$$

см. [19, стр. 103, формула (13)].

Из (51) и (52) получается следующая формула для полиномов Бесселя

$$\frac{e^{-iz}}{z} y_M \left(\frac{-i}{z} \right) = (-i)^{M+1} j_M(z) + i^M j_{-M-1}(z),$$

см. [19, стр. 103].

Если учесть, что $P_M^{(k)}(1) = \frac{(M+k)!}{2^k k! (M-k)!}$, то (50) можно переписать в виде

$$(53) \quad y_M(z) = \sum_{k=0}^M P_M^{(k)}(1) z^k = (-1)^M \sum_{k=0}^M (-1)^k P_M^{(k)}(-1) z^k.$$

Например, равенство (51) в таком случае, принимает вид

$$(54) \quad 2i^M j_M(z) = \frac{-ie^{iz}}{z} \sum_{k=0}^M \frac{i^k P_M^{(k)}(1)}{z^k} + \frac{ie^{-iz}}{z} \sum_{k=0}^M \frac{i^k P_M^{(k)}(-1)}{z^k}.$$

Наконец, приведем важную для нас формулу

$$\frac{j_N(z)}{z^m} = \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{(N-m+2k+1/2)\Gamma(N-m+k+1/2)}{2^m \Gamma(N+k+3/2)} j_{N-m+2k}(z),$$

см. [14, 5.21, формула (2)] или

$$(55) \quad \frac{j_N(z)}{z^m} = \sum_{k=0}^m c_{N,k}^{[m]} j_{N-m+2k}(z),$$

где через $c_{N,k}^{[m]}$ обозначены коэффициенты разложения

$$(56) \quad c_{N,k}^{[m]} = \frac{C_m^k (N-m+2k+1/2)\Gamma(N-m+k+1/2)}{2^m \Gamma(N+k+3/2)}, \quad 0 \leq k \leq m.$$

REFERENCES

- [1] L.F. Rakhmatullina, *Der Greensche Operator und die Regularisierung linearer Randwertprobleme*, Differ. Uravn., **15**:3 (1979), 425–435. (in Russian) Zbl 0405.34016
- [2] K.M. Das, A.S. Vatsala, *Green's function for n - n boundary value problem and an analogue of Hartman's result*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **51**:3 (1975), 670–677. MR377161
- [3] G.B. Gustafson, *A Green's function convergence principle, with applications to computation and norm estimates*, Rocky Mountain J. Math., **6**:3 (1976), 457–492. MR414978
- [4] L. Kong, J. Wang, *The Green's Function for $(k, n-k)$ Conjugate Boundary Value Problems and Its Applications*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **255** (2001), 404–422. MR1815789
- [5] A. Bottcher, *The Constants in the Asymptotic Formulas by Rambour and Seghier for Inverses of Toeplitz Matrices*, Integral Equations and Operator Theory, **50**:1 (2004), 43–55. MR2091053
- [6] K. Watanabe, Y. Kametaka, H. Yamagishi, A. Nagai, K. Takemura, *The best constant of Sobolev inequality corresponding to clamped boundary value problem*, Boundary Value Problems, **2011** (2011), Article ID 875057. MR2783107
- [7] F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*, Chichester: John Wiley & Sons, 1986. MR856916
- [8] V.I. Smirnov, *Kurs vysshej matematiki*, v.4, part 2, 1981.
- [9] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th printing, New York: Dover, 1972.
- [10] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: theory and applications*, Amsterdam: Gordon and Breach, 1993. MR1347689
- [11] F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, 2010.
- [12] G. Szego, *Orthogonal Polynomials*, Colloquium publ. Vol. XXIII. Providence, Rhode Island: American Math. Society, 1939. MR0000077

- [13] S.G. Mihlin, *Higher-dimensional singular integrals and integral equations*, Moscow: Fizmatgiz, 1962. MR0155165
- [14] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge: Cambridge University Press, 1944. MR0010746
- [15] H. Bateman, *Higher Transcendental Functions*, V. I., New York: McGraw-Hill, 1953. Zbl 0051.30303
- [16] H. Bateman, *Higher Transcendental Functions*, V. II., New York: McGraw-Hill, 1953.
- [17] A.M. Mathai, H.J. Haubold, *Special Function for Applied Scientist*, Berlin: Springer, 2010.
- [18] E. Grosswald, *Bessel Polynomials*, Lecture Notes in Mathematics, **698**, New York: Springer-Verlag, 1978. MR520397
- [19] H.L. Krall, Orrin Frink, *A New Class of Orthogonal Polynomials: The Bessel Polynomials*, Trans. Amer Math. Soc., **65**:1 (1949), 100–115. MR28473
- [20] J. Burchall, *The Bessel Polynomials*, Canad. J. Math., **3** (1951), 62–68. MR0039123
- [21] A. Nikiforov, V.B. Uvarov, *Special Function of Mathematical Physics*, Basel: Birkhäuser-Verlag, 1988. MR922041
- [22] E.D. Rainville, *Special Functions*, Bronx, New York: Chelsea Publishing Co., 1971. MR0393590
- [23] A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev, *Integrals and series*. Vol. 2, New York: Gordon & Breach Science Publishers, 1986. MR874987
- [24] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products* [in Russian], Moscow: Nauka, 1971; English transl.: New York–London: Academic Press, 1994.

SERGEY GAVRILOVICH KAZANTSEV
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
4, KOPTYUGA AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: `kazan@math.nsc.ru`