Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. G. Rodikova, V. A. Bednazh, On interpolation for the Privalov classes in a disk,
Sib. Èlektron. Mat. Izv., 2019, Volume 16, 1762–1775

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.124>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.166.219.16

April 26, 2023, 04:27:42

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1762–1775 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.124

УДК 517.53

MSC 30E05, 30H99

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В КЛАССАХ И.И. ПРИВАЛОВА В
КРУГЕ

Е.Г. РОДИКОВА, В.А. БЕДНАЖ

ABSTRACT. The problems of interpolation on the set of simple and multiple nodes for the Privalov classes of analytic functions in the unit disk are solved in this article.

Keywords: interpolation, the Carleson condition, simple nodes, multiple nodes, the Privalov classes, analytic functions, unit disk.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, D - единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ - множество всех функций, аналитических в D . При всех $0 < q < +\infty$ определим класс И.И. Привалова P_q :

$$P_q = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\theta})|)^q d\theta < +\infty \right\}.$$

Отметим, что классы P_q при $q > 1$ были введены И.И. Приваловым в [10]. Исследованию некоторых свойств пространств Привалова в случае $1 < q < +\infty$ посвящена монография Гаврилова В.И., Субботина А.В., Ефимова Д.А. [6]. Если $q = 1$ класс Привалова совпадает с хорошо известным в научной литературе классом Р. Неванлинны (см., например, [9]). Случай $0 < q < 1$ в научной литературе мало изучен.

В данной работе исследуются вопросы интерполяции на множестве простых и кратных узлов в классах Привалова. Сформулируем задачу кратной интерполяции в классе P_q : пусть $\{z_k\}_1^\infty$ и $\{w_k\}_1^\infty$ - произвольные последовательности

RODIKOVA, E.G., BEDNAZH, V.A., ON INTERPOLATION FOR THE PRIVALOV CLASSES IN A DISK.

© 2019 Родикова Е.Г., Беднаж В.А.

Первый автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (проект 18-31-00180).

Поступила 1 марта 2019 г., опубликована 29 ноября 2019 г.

комплексных чисел из D ; обозначим через p_j — кратность появления числа z_j во всей последовательности $\{z_k\}_1^\infty$, $s_j \geq 1$ — кратность появления числа z_j на отрезке $\{z_k\}_1^j$. Очевидно, что $1 \leq s_j \leq p_j \leq +\infty$. При каких условиях, налагаемых на рост $\{z_k\}$ и распределение точек w_k , можно построить функцию из класса Π_q , такую что

$$(1) \quad f^{(s_k-1)}(z_k) = w_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Последовательность $\{z_k\}$ в этом случае называют *интерполяционной*. В том случае, если $s_k = 1$, интерполяция осуществляется на множестве простых узлов $\{w_k\}$. Фундаментальный результат в теории интерполяции принадлежит Л. Карлесону. В работе [3] он полностью охарактеризовал интерполяционные последовательности в классе ограниченных аналитических функций. Решением интерполяционных задач в классах функций ограниченного вида занимались А.Г. Нафтаевич [8], А. Хартман и др. [5], в классах Харди — Х. Шапиро и А. Шилдс [18], М.М. Джрбашян [4], К. Сейп [14], в классах В.И. Смирнова — Н. Янагиара [20], в классах с ограничениями на характеристику Р. Неванлинны — В.А. Беднаж, Ф.А. Шамоян, Е.Г. Родикова (см. [1], [2], [11], [12], [17]; подробное описание упомянутых классов см. в монографии [16]). Задача интерполяции в условии равномерной разделенности простых узлов в классах Π_q , ($q > 1$) решена в работе [7]. Обзор ранних результатов по теории интерполяции содержится в монографии С.А. Виноградова и В.П. Хавина [19].

Статья состоит из двух частей: в следующей части работы решается задача интерполяции в условии равномерной разделенности простых узлов в классе Π_q , ($0 < q < 1$). В заключительной части работы мы решаем задачу кратной интерполяции в классах Π_q , ($q > 1$).

2. ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА МНОЖЕСТВАХ КАРЛЕСОНА В КЛАССАХ И. И. ПРИВАЛОВА Π_q , ($0 < q < 1$)

Следуя Л. Карлесону, введем следующее определение.

Определение 1. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$, удовлетворяющая условию Бляшке:

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |z_n|) < +\infty,$$

называется *равномерно разделенной*, если существует $0 < \delta < 1$, такое что

$$(3) \quad \prod_{k \neq n} \left| \frac{z_k - z_n}{1 - \bar{z}_k z_n} \right| \geq \delta, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Условие (3) также называют *условием Карлесона*.

Для заданной последовательности $\{z_n\} \subset D$ и фиксированного $0 < q < +\infty$ обозначим через $l^q(z_n)$ пространство последовательностей $\{w_n\}$, для которых

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |z_n|) (\ln^+ |w_n|)^q < +\infty.$$

Если не оговорено иное, через c , $c_1, \dots, c_n(\alpha, \beta, \dots)$ мы будем обозначать произвольные положительные постоянные, зависящие от $\alpha, \beta, \dots$, значение которых несущественно.

При доказательстве основных результатов этой части работы используется оценка роста функции из класса И.И. Привалова:

Теорема 1 (см. [13]). Если $f \in \Pi_q$, $(0 < q < 1)$, $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $z \in D$, то

$$(4) \quad \ln^+ M(r, f) = o\left((1-r)^{-1/q}\right), r \rightarrow 1-0,$$

причем эта оценка является точной.

Справедлива

Теорема 2. Пусть $0 < q < 1$. Если последовательность $\{z_n\} \subset D$ является равномерно разделенной, т.е. удовлетворяет условию (3), то для любой последовательности $\{w_n\} \subset l^q(z_n)$ найдется функция $f \in \Pi_q$, решающая интерполяционную задачу $f(z_n) = w_n$, $n = 1, 2, \dots$

Доказательство. Разобьем последовательность $\{w_n\}$ на две подпоследовательности: $\{w_{n_{k'}}\}$, $\{w_{n_{k''}}\}$, такие что $|w_{n_{k'}}| \leq 1$, $|w_{n_{k''}}| > 1$. Поскольку последовательность $\{z_n\}$ удовлетворяет условию (3), то по теореме Карлесона (см. [3]) можно построить функцию $G \in H^\infty$, такую что $G(z_{n_{k'}}) = w_{n_{k'}}$, $G(z_{n_{k''}}) = 1$. Докажем, что существует функция $F \in H^q$, такая что $F(z_{n_{k'}}) = 0$, $F(z_{n_{k''}}) = \ln w_{n_{k''}}$, где выбрана главная ветвь логарифма. Имеем:

$$|\ln w_{n_{k''}}| \leq \ln |w_{n_{k''}}| + |\arg w_{n_{k''}}| \leq \ln^+ |w_{n_{k''}}| + 2\pi.$$

Ввиду условия $\{w_n\} \subset l^q(z_n)$ теоремы, получим:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |z_n|) \cdot |\ln w_n|^q < +\infty.$$

Из хорошо известной теоремы Шапиро-Шилдса об интерполяции в классах Харди H^q ($0 < q < 1$) (см. [18]) следует существование функции $F \in H^q$ с указанными свойствами.

Рассмотрим теперь аналитическую в D функцию $f = G \cdot \exp F$. Покажем, что она решает задачу интерполяции в классе Привалова.

Оценим $I(q) = \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\theta})|)^q$. Имеем:

$$I(q) \leq \int_{-\pi}^{\pi} (c_G + |F|)^q \leq c_q.$$

Поэтому $f \in \Pi_q$. Далее, $f(z_{n_{k'}}) = G(z_{n_{k'}}) \cdot \exp(F(z_{n_{k'}})) = w_{n_{k'}} \cdot \exp 0$, $f(z_{n_{k''}}) = G(z_{n_{k''}}) \cdot \exp(F(z_{n_{k''}})) = 1 \cdot \exp \ln w_{n_{k''}} = w_{n_{k''}}$. Поэтому $f(z_n) = w_n$ при всех $n = 1, 2, \dots$

Теорема доказана. $\square$

Теорема 3. Найдутся равномерно разделенная последовательность узлов интерполяции $\{z_n\} \subset D$ и последовательность $\{w_n\}$, удовлетворяющая условию:

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |z_n|) (\ln^+ |w_n|)^{q-\varepsilon} < +\infty, \quad 0 < \varepsilon < q < 1,$$

для которых в классе Π_q не существует функции, которая решает задачу интерполяции: $f(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, \dots$

Доказательство. В качестве $\{z_n\}$ возьмем последовательность вещественных чисел $z_n = 1 - \beta^n$, $0 < \beta < 1$, $n = 1, 2, \dots$. Очевидно, что эта последовательность удовлетворяет условию Бляшке и является равномерно разделенной, т.е. удовлетворяет условию (3).

Рассмотрим также последовательность $w_n = \exp\left(\frac{n}{\beta^{n/q}}\right)$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющую условию (5). Очевидно, что

$$(6) \quad (1 - |z_n|)(\ln^+ |w_n|)^q \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Но из оценки (4) следует, что

$$(7) \quad (1 - |z|)(\ln^+ |f(z)|)^q = o(1).$$

На основании (6), (4) заключаем, что в классе Π_q не существует функции, которая решает задачу интерполяции: $f(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, \dots$ при указанном выборе последовательностей $\{z_k\}$, $\{w_k\}$. Теорема доказана.

Замечание 1. При доказательстве этой теоремы использовалась идея Н. Янагиары (см. [20], теорема 4).

Следующее утверждение доказывается в предположении, что $0 < q < +\infty$:

Лемма 1. Если оператор $R(f) = (f(z_1), \dots, f(z_n), \dots)$ отображает пространство Π_q в пространство $l^q(z_n)$, $\{z_n\} \subset D$, то для произвольной функции $g \in H^q$ следующий ряд сходится:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |z_n|) \cdot |g(z_n)|^q < +\infty.$$

Доказательство. Пусть $g \in H^q$, тогда по определению функция $f(z) = \exp g(z)$, $z \in D$, принадлежит классу Привалова Π_q , так как

$$(\ln^+ |f(z)|)^q = (\Re g(z))^+ \leq |g(z)|^q.$$

По условию

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |z_n|) \cdot (\ln^+ |f(z_n)|)^q < +\infty, \quad f \in \Pi_q,$$

поэтому

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |z_n|) \cdot ((\Re g(z))^+)^q < +\infty, \quad g \in H^q.$$

Если $g \in H^q$, то и $-g \in H^q$, а значит, функция $F(z) = \exp(-g(z)) \in \Pi_q$, и по условию

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |z_n|) \cdot (\ln^+ |F(z_n)|)^q < +\infty.$$

Так как $\ln^+ |F(z)| = (-\Re g(z))^+$, а $(-\Re g(z))^+ = (\Re g(z))^-$, то

$$(9) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |z_n|) \cdot ((\Re g(z))^-)^q < +\infty, \quad g \in H^q.$$

Но $|\Re f(z)| = (\Re g(z))^+ + (\Re g(z))^-$, поэтому из (8) и (9) заключаем:

$$(10) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |z_n|) \cdot |\Re g(z_n)|^q < +\infty, \quad g \in H^q.$$

Аналогичные рассуждения можно провести для функций $\pm ig(z) \in H^q$ и $\exp(\pm ig(z)) \in \Pi_q$. Будем иметь:

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |z_n|) \cdot (\Im g(z_n))^q < +\infty, \quad g \in H^q.$$

Следовательно, из (10) и (11) окончательно получим

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |z_n|) \cdot |g(z_n)|^q < +\infty, \quad g \in H^q.$$

Лемма доказана. $\square$

3. КРАТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В КЛАССАХ Π_q , ($q > 1$)

В этой части работы мы решим задачу интерполяции (1) на множестве кратных узлов в классе И.И. Привалова Π_q для случая $1 < q < +\infty$.

Для изложения результатов нам понадобятся дополнительные обозначения и определения. Обозначим через $B(z)$ произведение Бляшке с нулями в точках последовательности $\{z_k\} \subset D$, т.е.

$$(12) \quad B(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \cdot \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z},$$

$B_k(z)$ — произведение Бляшке без k -го фактора. Хорошо известно, что произведение $B(z)$ сходится абсолютно и равномерно в D тогда и только тогда, когда выполняется условие Бляшке (2).

Определение 2. Углом Штольца $\Gamma_\delta(\theta)$ с вершиной в точке $e^{i\theta}$ называется угол раствора $\pi\delta$, $0 < \delta < 1$, биссектриса которого совпадает с отрезком $re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$.

Последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset D$, удовлетворяющую условию Бляшке, а также условиям

$$(13) \quad |B_k(z_k)| \geq \exp \frac{-\mu(k)}{(1 - |z_k|)^{\frac{1}{q}}},$$

для всех $1 < q < +\infty$, где $\mu(k) > 0$, $\mu(k) = o(1)$, $k \rightarrow +\infty$,

$$\sup_{k \geq 1} \{p_k\} < +\infty,$$

отнесем к классу $\tilde{\Delta}$.

Для заданной последовательности $\{z_k\} \subset D$ и фиксированного $1 < q < +\infty$ обозначим через $\tilde{l}^q(z_k)$ пространство последовательностей $\{w_k\}$, для которых

$$\ln^+ |w_k| = o\left((1 - |z_k|)^{-1/q}\right), \quad k \rightarrow +\infty,$$

т.е.

$$(14) \quad |w_k| = \exp \frac{\mu_1(k)}{(1 - |z_k|)^{1/q}},$$

$\mu_1(k) > 0$, $\mu_1(k) = o(1)$, $k \rightarrow +\infty$.

Отметим, что класс $\tilde{l}^q$, а вместе с ним и выражение (14) являются естественными для решения интерполяционной задачи в классах И.И. Привалова Π_q , ($q > 1$), ввиду справедливости следующей теоремы:

Теорема 4 (см. [6], с. 40). Если $f \in \Pi_q$, ($q > 1$), $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $z \in D$, то

$$(15) \quad \ln^+ M(r, f) = o\left((1-r)^{-1/q}\right), \quad r \rightarrow 1-0,$$

причем данная оценка является точной.

Основным результатом этой части статьи является доказательство следующего утверждения:

Теорема 5. Пусть $1 < q < +\infty$; $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - произвольная последовательность комплексных чисел из D , расположенных в конечном числе углов Штольца:

$$\{z_k\}_1^\infty \subset \bigcup_{s=1}^n \Gamma_\delta(\theta_s)$$

при некотором $0 < \delta < 1$.

Если $\{z_k\}_1^\infty \in \tilde{\Delta}$, то для любой последовательности $\{w_k\}_1^\infty \in \tilde{l}^q(z_k)$ можно построить в явном виде функцию $f \in \Pi_q$, ($q > 1$), являющуюся решением интерполяционной задачи (1) при всех $s_k \geq 1$.

Для доказательства основного результата нам понадобятся вспомогательные утверждения.

Рассмотрим в классе Π_q , ($q > 1$) функцию

$$(16) \quad h = h_k(z) = \exp \sum_{s=1}^n \sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m \frac{(1 - \rho_m^2)^\beta}{(1 - z \rho_m e^{-i\theta_s})^{\beta + \frac{1}{q}}}, \quad z \in D,$$

ассоциированную с последовательностью $\{z_k\}$, где $0 < \beta < 1/q$, $0 < \rho_m < 1$, $m = 1, 2, \dots$, $\{u_k\}$ — положительная бесконечно малая последовательность, зависящая от узлов интерполяции $\{z_k\}$.

Покажем, что $h_k \in \Pi_q$, ($q > 1$). Для этого, без ограничения общности будем считать, что все узлы интерполяции находятся в угле $\Gamma_\delta(\theta)$. Обозначим для краткости $\beta' = \beta + \frac{1}{q}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |h_k(re^{i\varphi})|)^q d\varphi &= \\ &= \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ \left| \exp \sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m \frac{(1 - \rho_m^2)^\beta}{(1 - re^{i\varphi} \rho_m e^{-i\theta})^{\beta'}} \right| \right)^q d\varphi \leq \\ &\leq \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m \frac{(1 - \rho_m^2)^\beta}{|1 - r \rho_m e^{i(\varphi - \theta)}|^{\beta'}} \right)^q d\varphi. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством Минковского:

$$\begin{aligned}
 & \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |h_k(re^{i\varphi})|)^q d\varphi \leq \\
 & \leq \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(u_k^m \frac{(1-\rho_m^2)^\beta}{|1-r\rho_m e^{i(\varphi-\theta)}|^{\beta'}} \right)^q d\varphi \right)^{1/q} \right)^q = \\
 & = \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} u_k^{mq} \frac{(1-\rho_m^2)^{\beta q}}{|1-r\rho_m e^{i(\varphi-\theta)}|^{\beta'q}} d\varphi \right)^{1/q} \right)^q \leq \\
 & \leq \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{u_k^m (1-\rho_m^2)^\beta}{(1-r\rho_m)^{(\beta'q-1)/q}} \right)^q = \\
 & = \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{u_k^m (1-\rho_m^2)^\beta}{(1-r\rho_m)^\beta} \right)^q \leq \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{u_k^m (1-\rho_m^2)^\beta}{(1-\rho_m)^\beta} \right)^q = \\
 & = \frac{2^{\beta q}}{2\pi} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m \right)^q = \frac{2^{\beta q}}{2\pi} \cdot \left(\frac{u_k}{1-u_k} \right)^q < +\infty.
 \end{aligned}$$

Значит, $h_k \in \Pi_q$, ($q > 1$).

Справедлива

Лемма 2. Если точки последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ находятся в конечном числе углов Штольца, то есть $\{z_k\}_1^\infty \subset \bigcup_{s=1}^n \Gamma_\delta(\theta_s)$, тогда для функции $h(z)$, определяемой равенством (16) с условиями $u_k = (\mu_1(k) + \mu(k))^{\frac{1}{2m_0}}$, $k = 1, 2, \dots$, μ_1, μ — бесконечно малые последовательности из оценок (14) и (13) соответственно, $1 - \rho_m = (2u_k^q)^m$, $m = 1, 2, \dots$, $m_0 = \inf_{\rho_m > r_k} m$, справедлива следующая оценка:

$$(17) \quad |h(z_k)| \geq \exp \frac{\mu_0(k)}{(1-|z_k|)^{1/q}}.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем предполагать, что все узлы интерполяции находятся в угле $\Gamma_\delta(\theta)$. Обозначим для краткости $\beta' = \beta + \frac{1}{q}$. Тогда

$$h(z) = h_k(z) = \exp \sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m \frac{(1-\rho_m^2)^\beta}{(1-z\rho_m e^{-i\theta})^{\beta'}}, z \in D.$$

Оценим $h(z_k)$ в угле $\Gamma_\delta(\theta)$.

$$\begin{aligned}
 |h(z_k)| &= \exp \sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m \Re \frac{(1-\rho_m^2)^\beta}{(1-z_k \rho_m e^{-i\theta})^{\beta'}} = \\
 &= \exp \sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m (1-\rho_m^2)^\beta \frac{\Re(1-\overline{z_k} \rho_m e^{i\theta})^{\beta'}}{|1-z_k \rho_m e^{-i\theta}|^{2\beta'}}.
 \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}\Re(1 - \overline{z_k} \rho_m e^{i\theta})^{\beta'} &= \Re\left(1 - r_k \rho_m e^{-i(\varphi_k - \theta)}\right)^{\beta'} = \\ &= \Re\left(1 - \rho_m r_k + \rho_m r_k (1 - e^{-i(\varphi_k - \theta)})\right)^{\beta'} = \\ &= \Re\left(1 - \rho_m r_k + \rho_m r_k (1 - e^{-i(\varphi_k - \theta)})\right)^{\beta'} = \\ &= (\rho_m r_k \rho)^{\beta'} \cdot \Re\left(\frac{1 - \rho_m r_k}{\rho_m r_k \rho} + e^{-i\varphi}\right)^{\beta'},\end{aligned}$$

где $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$, $(1 - e^{-i(\varphi_k - \theta)}) = \rho e^{-i\varphi}$, $|\varphi| < \frac{\pi\delta}{2} < \frac{\pi}{2\beta'}$. А значит,

$$\Re(1 - \overline{z_k} \rho_m e^{i\theta})^{\beta'} \geq c_1 (\rho_m r_k \rho)^{\beta'}, \quad c_1 > 0,$$

по лемме, установленной Ф. А. Шамояном в работе [15].

С другой стороны,

$$|1 - e^{-i(\varphi_k - \theta)}|^{\beta'} = 2^{\beta'} \sin^{\beta'}\left(\frac{\theta - \varphi_k}{2}\right) = 2^{\beta'} \sin^{\beta'} \frac{\varphi}{2},$$

поэтому

$$\begin{aligned}\Re \frac{1}{(1 - z_k \rho_m e^{-i\theta})^{\beta'}} &\geq \frac{c_1 (\rho_m r_k)^{\beta'} 2^{\beta'} \sin^{\beta'}\left(\frac{\theta - \varphi_k}{2}\right)}{\left((1 - \rho_m r_k)^2 + 4 \sin^2\left(\frac{\theta - \varphi_k}{2}\right) \rho_m r_k\right)^{\beta'}} \\ &\geq \frac{2^{\beta'} \sin^{\beta'} \frac{\varphi}{2}}{(1 - \rho_m r_k)^{2\beta'} \cdot \left(1 + \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{(1 - \rho_m r_k)^2}\right)^{\beta'}}.\end{aligned}$$

Так как $\{z_k\} \subset \Gamma_\delta(\theta)$, то

$$\frac{\left|\sin\left(\frac{\theta - \varphi_k}{2}\right)\right|}{(1 - r_k)} \leq C.$$

Значит,

$$\Re \frac{1}{(1 - z_k \rho_m e^{-i\theta})^{\beta'}} \geq \frac{c(\beta')}{(1 - \rho_m r_k)^{\beta'}}.$$

Таким образом, для $h(z_k)$ в угле $\Gamma_\delta(\theta)$ справедлива следующая оценка:

$$|h(z_k)| \geq \exp c(\beta') \sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m \frac{(1 - \rho_m^2)^\beta}{(1 - r_k \rho_m)^{\beta'}}.$$

Отметим, что ряд $\sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m \frac{(1 - \rho_m^2)^\beta}{(1 - r_k \rho_m)^{\beta'}}$ сходится. Действительно,

$$u_k^m \frac{(1 - \rho_m^2)^\beta}{(1 - r_k \rho_m)^{\beta'}} \leq u_k^m \frac{(1 - \rho_m^2)^\beta}{(1 - \rho_m)^{\beta'}} \leq u_k^m \frac{2^\beta}{(1 - \rho_m)^{1/q}}.$$

По условию $1 - \rho_m = (2u_k^q)^m$, поэтому

$$u_k^m \frac{(1 - \rho_m^2)^\beta}{(1 - r_k \rho_m)^{\beta'}} \leq \frac{2^\beta}{2^m},$$

и ряд сходится в $\Gamma_\delta(\theta)$, ввиду сходимости числового ряда $\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{1/q}}\right)^m$.

Продолжим оценивать $|h(z_k)|$ снизу. Для этого разобьем внутреннюю сумму на части:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m \frac{(1 - \rho_m^2)^\beta}{(1 - r_k \rho_m)^{\beta'}} = \\ &= \sum_{(1 - \rho_m) < (1 - r_k)} (\dots) + \sum_{(1 - \rho_m) > (1 - r_k)} (\dots) + \sum_{(1 - \rho_m) = (1 - r_k)} (\dots) = \\ &= S_1(k) + S_2(k) + S_3(k). \end{aligned}$$

Оценим каждую из этих сумм в отдельности.

$$\begin{aligned} S_2(k) &= \sum_{(1 - \rho_m) > (1 - r_k)} u_k^m \frac{(1 - \rho_m^2)^\beta}{(1 - r_k \rho_m)^{\beta'}} \geq \\ &\geq \sum_{\rho_m < r_k} u_k^m \frac{1}{(1 - \rho_m^2)^{\beta' - \beta}} \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/q} \sum_{\rho_m < r_k} u_k^m \frac{1}{(1 - \rho_m)^{\frac{1}{q}}}. \end{aligned}$$

По условию $1 - \rho_m = (2u_k^q)^m$, поэтому

$$S_2(k) \geq \frac{1}{2^{1/q}} \cdot \sum_{\rho_m < r_k} \left(\frac{1}{2^{1/q}}\right)^m = c(q, m_0^{(2)}) = \text{const.}$$

Здесь $m_0^{(2)} = \sup_{\rho_m < r_k} m$. Перейдем к оценке $S_3(k)$.

$$S_3(k) = \sum_{(1 - \rho_m) = (1 - r_k)} u_k^m \frac{(1 - \rho_m^2)^\beta}{(1 - r_k \rho_m)^{\beta'}} = \sum_{\rho_m = r_k} u_k^m \frac{1}{(1 - r_k^2)^{1/q}} = \frac{u_k^{m_0^{(3)}}}{(1 - r_k^2)^{1/q}},$$

где $m_0^{(3)}$ — номер, при котором $\rho_m = r_k$. Оценим теперь $S_1(k)$ снизу.

$$\begin{aligned} S_1(k) &= \sum_{(1 - \rho_m) < (1 - r_k)} u_k^m \frac{(1 - \rho_m^2)^\beta}{(1 - r_k \rho_m)^{\beta'}} = \sum_{\rho_m > r_k} u_k^m \frac{(1 - \rho_m^2)^\beta}{(1 - r_k \rho_m)^{\frac{1}{q}} (1 - r_k \rho_m)^\beta} \geq \\ &\geq \frac{1}{(1 - r_k^2)^{\frac{1}{q}}} \sum_{\rho_m > r_k} u_k^m \frac{(1 - \rho_m^2)^\beta}{(1 - r_k \rho_m)^\beta} \geq \\ &\geq \frac{1}{(1 - r_k^2)^{\beta + \frac{1}{q}}} \cdot \left(u_k^{m_0} (1 - \rho_{m_0}^2)^\beta + \sum_{\rho_m > r_k, m \neq m_0} u_k^m \frac{(1 - \rho_m^2)^\beta}{(1 - r_k \rho_m)^\beta} \right). \end{aligned}$$

Здесь $m_0 = \inf_{\rho_m > r_k} m$. Снова используем условие $1 - \rho_m = (2u_k^q)^m$, а также $0 < \beta < 1/q$. Имеем:

$$S_1(k) \geq \frac{2^{m_0 \beta} \cdot u_k^{(q\beta + 1)m_0}}{(1 - r_k^2)^{\beta + \frac{1}{q}}} \geq \frac{u_k^{2m_0}}{(1 - r_k^2)^{\beta + \frac{1}{q}}}.$$

Из оценок S_1 , S_2 , S_3 заключаем:

$$S \geq \frac{u_k^{2m_0}}{(1 - r_k)^{\beta + \frac{1}{q}}} + c(q, m_0^{(2)}) + \frac{u_k^{m_0^{(3)}}}{(1 - r_k)^{1/q}},$$

откуда

$$S(k) > \frac{u_k^{2m_0}}{(1-r_k)^{\frac{1}{q}}}.$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$(18) \quad |h(z_k)| \geq \exp \frac{\mu_0(k)}{(1-r_k)^{\frac{1}{q}}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

где $\mu_0(k) = \mu(k) + \mu_1(k) = u_k^{2m_0}$, $\mu_0(k) = o(1)$, $k \rightarrow +\infty$. Лемма 2 доказана. $\square$

Для произвольного $z_k \in D$ обозначим

$$K_\eta(z_k) := \left\{ z \in D : |z - z_k| < \exp \frac{-\eta}{(1-|z_k|)^{1/q}} \right\}, \quad \eta > 0.$$

Лемма 3. Если $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \tilde{\Delta}$, то

$$(19) \quad \max_{t \in K_\eta(z_k)} |B_k^{-1}(t)| \leq c |B_k^{-1}(z_k)|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Требуемая оценка устанавливается аналогичным образом, как в работе [1, с. 23].

Для формулировки и доказательства дальнейших результатов введем дополнительные обозначения. Сначала заметим, что функция $B_k(z) \cdot \left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z} \right)^{p_k+1}$ является аналитической в D и не обращается в нуль в некоторой окрестности точки $z = z_k$. Для произвольного $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию

$$(20) \quad \tau_k(z) = \left\{ B_k(z) \cdot \left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z} \right)^{p_k+1} \cdot h(z) \right\}^{-1},$$

где $h(z)$ определяется равенством (16).

Можно утверждать, что в любой достаточно малой ε -окрестности точки z_k справедливо разложение:

$$\tau_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z_k)(z-z_k)^\nu, \quad |z-z_k| < \varepsilon,$$

$$\text{где } a_\nu(z_k) = \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu}{dz^\nu} \left[\left\{ B_k(z) \cdot \left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z} \right)^{p_k+1} \cdot h(z) \right\}^{-1} \right]_{z=z_k}.$$

Лемма 4. Если $\{z_k\}_1^\infty \in \tilde{\Delta}$, тогда коэффициенты разложения $a_\nu(z_k)$ удовлетворяют следующей оценке:

$$|a_\nu(z_k)| \leq a(\nu), \quad 0 \leq \nu \leq p_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $a(\nu)$ зависит от ν .

Доказательство леммы 4 проводится стандартным образом с использованием лемм 2 и 3, а также с учетом условия (13) (см. [1, с. 26]).

Введём в рассмотрение также полиномы

$$q_k(z) = \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} a_\nu(z_k)(z-z_k)^\nu, \quad k = 1, 2, \dots$$

Определим теперь систему аналитических функций в D :

$$(21) \quad \tilde{\Omega}_k(z) = \frac{(z - z_k)^{s_k-1} q_k(z)}{(s_k - 1)! \tau_k(z)}.$$

Очевидно, что

$$\tilde{\Omega}_k(z) = h(z) \frac{B_k(z)}{(s_k - 1)!} \cdot \left(\frac{1 - |z_k|^2}{1 - \bar{z}_k z} \right)^{p_k+1} \cdot \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} a_\nu(z_k) (z - z_k)^{\nu+s_k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отметим, что метод построения такой системы функций впервые был предложен М.М. Джрбашяном в [4]. Справедливо следующее утверждение:

Лемма 5. *Функции системы (21) обладают следующими интерполяционными свойствами:*

$$\tilde{\Omega}_k^{(r)}(z_k) = \begin{cases} 1, & r = s_k - 1; \\ 0, & r \neq s_k - 1, \quad 0 \leq r \leq p_k - 1. \end{cases}$$

Доказательство. Действительно, это сразу следует из разложения

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_k(z) &= \frac{(z - z_k)^{s_k-1}}{(s_k - 1)!} - \left(\frac{1 - |z_k|^2}{1 - \bar{z}_k z} \right)^{p_k+1} \cdot \frac{B_k(z) h(z)}{(s_k - 1)!} \times \\ &\times \sum_{\nu=p_k-s_k+1}^{+\infty} a_\nu(z_k) (z - z_k)^{\nu+s_k-1} = \frac{(z - z_k)^{s_k-1}}{(s_k - 1)!} - \lambda(z), \end{aligned}$$

где функция $\lambda(z)$ имеет нуль кратности p_k в точке $z = z_k$. Лемма 5 доказана. $\square$

Доказательство. Докажем теорему 5.

Предположим, что узлы интерполяции удовлетворяют следующим условиям: $\{z_k\} \subset \Gamma_\delta(\theta)$ при некотором $0 < \delta < 1$ и $\{z_k\} \in \tilde{\Delta}$. Для произвольной последовательности $\{w_k\} \in l^q$ построим интерполяционную функцию $f(z)$ следующим образом:

$$(22) \quad f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} w_k \tilde{\Omega}_k(z) \frac{h(z)}{h(z_k)}, \quad z \in D,$$

где h определяется равенством (16).

Используя лемму 5, получим: $f^{(s_k-1)}(z_k) = w_k, k = 1, 2, \dots$

Теперь докажем, что функция $f(z)$ принадлежит классу Π_q , ($q > 1$). Так как $\{z_k\} \subset \Gamma_\delta(\theta)$, а члены последовательности $\{w_k\}_1^{+\infty}$ удовлетворяют условию (14), то по лемме 2 при всех $k = 1, 2, \dots$ получим:

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \sum_{z_k \in \Gamma_\delta(\theta)} \left| \frac{w_k}{h(z_k)} \right| \cdot |\tilde{\Omega}_k(z)| \cdot |h(z)| \leq \\ &\leq c_0 \sum_{z_k \in \Gamma_\delta(\theta)} \exp \frac{\mu_1(k) - \mu_0(k)}{(1 - |z_k|)^{\frac{1}{q}}} \cdot |\tilde{\Omega}_k(z)| \cdot |h(z)| \leq \\ &\leq c_0 \sum_{z_k \in \Gamma_\delta(\theta)} |\tilde{\Omega}_k(z)| \cdot |h(z)|, \end{aligned}$$

так как

$$\exp \frac{\mu_1(k) - \mu_0(k)}{(1 - |z_k|)^{\frac{1}{q}}} \leq 1.$$

Таким образом, имеем:

$$|f(z)| \leq c_0 \sum_{k=1}^{+\infty} |\tilde{\Omega}_k(z)| \cdot |h(z)|.$$

Оценим теперь сверху функции системы $\tilde{\Omega}_k(z)$ при всех $k = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} |\tilde{\Omega}_k(z)| &= |h(z)| \frac{|B_k(z)|}{(s_k - 1)!} \cdot \left(\frac{1 - |z_k|^2}{|1 - \bar{z}_k z|} \right)^{p_k+1} \times \\ &\times \left| \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} a_\nu(z_k)(z - z_k)^{\nu+s_k-1} \right|. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\left(\frac{1 - |z_k|^2}{|1 - \bar{z}_k z|} \right)^{p_k+1} |z - z_k|^{s_k-1+\nu} \leq \frac{(1 - |z_k|^2)^{p_k+1}}{|1 - \bar{z}_k z|^{p_k+2-s_k-\nu}}.$$

Так как $|B_k(z)| \leq 1$, при всех $z \in D$, то

$$|f(z)| \leq c_0 \sum_{k=1}^{+\infty} |\tilde{\Omega}_k(z)| \cdot |h(z)| \leq c_0 \sum_{k=1}^{+\infty} |h(z)|^2 \frac{1}{(s_k - 1)!} \cdot \frac{(1 - |z_k|^2)^{p_k+2-s_k-\nu}}{|1 - \bar{z}_k z|^{p_k+2-s_k-\nu}}.$$

Обозначим через

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1 - |z_k|^2)^{p_k+2-s_k-\nu}}{(1 - \bar{z}_k z)^{p_k+2-s_k-\nu}}.$$

Так как последовательность $\{z_k\}$ удовлетворяет условию Бляшке, то

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(re^{i\theta})| d\theta &= \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|^2)^{p_k+2-s_k-\nu} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|1 - \bar{z}_k r e^{i\theta}|^{p_k+2-s_k-\nu}} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|^2) < +\infty, \end{aligned}$$

то есть $\varphi \in H^1$, а значит, и $\varphi \in \Pi_q$, ($q > 1$), поскольку $H^p \subset \Pi_q$ при всех $0 < p < +\infty$ и $1 < q < +\infty$.

Имеем:

$$|f(z)| \leq c_0 |h(z)|^2 \cdot |\varphi(z)|.$$

Очевидно, что функция $|h(z)|^2 \in \Pi_q$, ($q > 1$). А значит, и функция $f \in \Pi_q$, ($q > 1$).

Теорема доказана. $\square$

Замечание 2. Справедливость обратного утверждения в классе Π_q , ($q > 1$) установлена в работе [7] для случая простых узлов: если задача (1) разрешима при $s_k = 1$ и $\{w_k\}_1^\infty \in l^q$, то узлы интерполяции $\{z_k\}_1^\infty$ принадлежат классу $\tilde{\Delta}$. Вопрос о том, верно ли утверждение, обратное теореме 5, пока остается открытым. Очевидно, он сводится к исследованию оператора дифференцирования в классах И.И. Привалова.

Замечание 3. При доказательстве результатов этой части работы использовались методы работ [4] и [2].

Авторы выражают искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Ф. А. Шамояну за помощь в написании статьи и ценные замечания.

REFERENCES

- [1] Bednazh V. A., *Description of traces, characteristic of the principal parts in the Laurent expansion of classes of meromorphic functions with restrictions on growth characteristics Nevanlinna*: Thesis Abstract, St.Peter., (2007). (in Russian)
- [2] Bednazh V.A., Rodikova E.G., Shamoyan F.A., *Multiple interpolation and principal parts of a Laurent series of meromorphic functions in the unit disk with power growth of the Nevanlinna characteristic*, Complex Analysis and Operator Theory, **11**:1 (2017), 197–215. MR3595982
- [3] Carleson L., *An interpolation problem for bounded analytic functions*, Amer. J. Math., **80** (1958), 921–930. MR117349
- [4] Djrbashian M.M., *Basicity of some biorthogonal systems and the solution of the multiple interpolation problem in H^p -classes in the halfplane*, Izv. Akad. Nauk ArmSSR, Matematika, **43**: 6 (1978), 1327–1384. (in Russian)
- [5] Hartmann A., Massaneda X., Nicolau A., Thomas P., *Interpolation in the Nevanlinna and Smirnov classes and harmonic majorants*, J. Funct. Anal., **217**:1 (2004), 1–37. MR2097605
- [6] Gavrilov V. I., Subbotin A. V., Efimov D. A., *Boundary properties of analytic functions (further contribution)*. — Moscow: Publishing House of the Moscow University, 2012. (in Russian)
- [7] Mestrovic R., Susic J., *Interpolation in the spaces $N^p(1 < p < +\infty)$* , Filomat, **27**:2 (2013), 291–299. Zbl 1340.30163
- [8] Naftalevic A. G., *On interpolation by functions of bounded characteristic*, Vilniaus Valst. Univ. Mokslu Darbai. Mat. Fiz. Chem. Mokslu Ser., **5**, (1956), 5–27. (in Russian)
- [9] Nevanlinna R., *Eindeutige analytische Funktionen*, 2nd ed., Berlin: Springer-Verlag, 1953. MR0057330
- [10] Privalov I. I., *Boundary properties of single-valued analytic functions*, M.: Izd. Moscow State University, 1941. (in Russian)
- [11] Rodikova E.G., *On Interpolation in the class of analytic functions in the unit disk with the Nevanlinna characteristic from L_p -spaces*, Journ. of Siberian Fed. Univ. Math. and Phys. **9**:1 (2016), 69–78.
- [12] Rodikova E.G., *On multiple interpolation in the class of analytic functions in a disk with the Nevanlinna characteristic from L_p -spaces*, Siberian Electronic Math. Reports, **14** (2017), 264–273. (in Russian) MR3633263
- [13] Rodikova E.G., *Coefficient multipliers for the Privalov class in a disk*, Journ. of Siberian Fed. Univ. Math. and phys. **11**:6 (2018), 723–732. MR3899010
- [14] Seip K., *Interpolating and sampling in spaces of analytic functions*, University Lecture Series 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004. MR2040080
- [15] Shamoyan F.A., *M. M. Dzhrbashian's factorization theorem and characterization of zeros of functions analytic in the disk with a majorant of bounded growth*, Izv. Akad. Nauk ArmSSR, Matematika. 13, **5–6** (1978), 405–422. (in Russian) Zbl 0411.30018
- [16] Shamoyan F.A., *Weighted spaces of analytic functions with mixed norm*, Bryansk: Bryansk St. Univ., 2014.
- [17] Shamoyan F.A., Rodikova E.G., *On interpolation in the class of analytic functions in the unit disk with power growth of the Nevanlinna characteristic*, Journ. of Siberian Fed. Univ. Math. and Phys., **7**:2 (2014), 235–243.
- [18] Shapiro H. S., Shields A. L., *On some interpolation problems for analytic functions*, Amer. J. Math., **83** (1961), 513–532. MR133446
- [19] Vinogradov S. A., Havin V. P., *Free interpolation in H^∞ and in some other classes of functions*, J. of Math. Sci., **47** (1974), 15–54. (in Russian) MR0393497
- [20] Yanagihara N., *Interpolation theorem for the class N^+* , Illinois J. Math., **18** (1974), 457–435. Zbl 0296.30028

EUGENIA GENNADEVNA RODIKOVA
BRYANSK STATE UNIVERSITY,
14, BEZHITSKAYA STR.,
BRYANSK, 241036, RUSSIA
E-mail address: `evheny@yandex.ru`

VERA ARKADIEVNA BEDNAZH
BRYANSK STATE UNIVERSITY,
14, BEZHITSKAYA STR.,
BRYANSK, 241036, RUSSIA
E-mail address: `vera.bednazh@mail.ru`