Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

P. I. Tesemnikov, On the distribution tail of the sum of the maxima of two randomly stopped sums in the presence of heavy tails, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1785–1794

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.126>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.210.77.194

April 26, 2023, 08:34:00

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1785–1794 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.126

УДК 519.224

MSC 60E05

О СУММЕ МАКСИМУМОВ СЛУЧАЙНЫХ СУММ
СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПРИ НАЛИЧИИ ТЯЖЕЛЫХ
ХВОСТОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

П.И. ТЕСЕМНИКОВ

ABSTRACT. We deal with two independent random walks with subexponential distributions of their increments. We study the tail distributional asymptotics for the sum of their partial maxima within random time intervals. Assuming the distributions of the lengths of these intervals to be relatively small, with respect to that of the increments of the random walks, we show that the sum of the maxima takes a large value mostly due a large value of a single summand (this is the so-called "principle of a single big jump").

Keywords: random sums of random variables, convolution tail, convolution equivalence, heavy-tailed distributions, subexponential distributions, the principle of a single big jump.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим две последовательности $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{\eta_j\}_{j=1}^\infty$, каждая из которых состоит из независимых и одинаково распределенных случайных величин. Будем предполагать, что последовательности $\{\xi_i\}$ и $\{\eta_j\}$ независимы между собой, и что $\mathbb{P}(\xi_1 > x) + \mathbb{P}(\eta_1 > x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Обозначим через

$$S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i \quad \text{и} \quad T_l = \sum_{j=1}^l \eta_j$$

ТЕСЕМНИКОВ, П.И., ON THE DISTRIBUTION TAIL OF THE SUM OF THE MAXIMA OF TWO RANDOMLY STOPPED SUMS IN THE PRESENCE OF HEAVY TAILS.

© 2019 ТЕСЕМНИКОВ П.И.

Работа подготовлена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, грант 17-11-01173.

Поступила 26 сентября 2019 г., опубликована 30 ноября 2019 г.

частичные суммы для последовательностей $\{\xi_i\}$ и $\{\eta_j\}$, а через

$$\bar{S}_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k \text{ и } \bar{T}_m = \max_{0 \leq l \leq m} T_l$$

максимумы соответствующих частичных сумм (положим по определению $S_0 = T_0 = 0$).

Далее, пусть (ν, μ) — случайный вектор с неотрицательными целочисленными компонентами, не зависящий от будущего в следующем смысле: для любых целых неотрицательных n и m сигма-алгебры

$$\sigma(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m, \mathbb{I}(\nu \leq n, \mu \leq m)) \text{ и } \sigma(\xi_i, \eta_j; i > n, j > m)$$

независимы (здесь $\mathbb{I}(A)$ — индикатор события A). Нетрудно показать, что если (ν, μ) не зависит от будущего, то независимыми также будут следующие пары сигма-алгебр:

- (i) $\sigma(\xi_1, \dots, \xi_n, \mathbb{I}(\nu \leq n))$ и $\sigma(\xi_i; i > n)$;
- (ii) $\sigma(\eta_1, \dots, \eta_m, \mathbb{I}(\mu \leq m))$ и $\sigma(\eta_j; j > m)$;
- (iii) $\sigma(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m, \mathbb{I}(\gamma \leq n))$ и $\sigma(\xi_i, \eta_j; i > n, j > n)$,

где $\gamma = \max\{\nu, \mu\}$. Будем также предполагать, что $\mathbb{E}\nu$ и $\mathbb{E}\mu$ конечны.

Основная задача этой работы состоит в отыскании условий (на распределения ξ_1, η_1, ν и μ), при которых

$$(1) \quad \mathbb{P}(\bar{S}_\nu + \bar{T}_\mu > x) \sim \mathbb{E}\nu \mathbb{P}(\xi_1 > x) + \mathbb{E}\mu \mathbb{P}(\eta_1 > x) \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

(Здесь $\sim$ означает, что отношение левой и правой частей стремится к единице при $x \rightarrow \infty$).

Эта задача тесно связана с задачей нахождения асимптотики вероятности разорения в модели с одной страховой компанией, имеющей два контракта, длительность каждого из которых случайна (и определяется некоторыми внешними факторами). Рассмотрим модель в дискретном времени, где единицей измерения выбран, скажем, день. Предположим, что компания имеет капитал x рублей и заключает в некоторый момент два контракта, где длительность первого составляет ν дней, а второго — μ дней. По первому контракту разность суммы страховых взносов и суммы страховых выплат за k -ый день составляет ξ_k рублей, а по второму — η_k . Окончательные расчеты осуществляются в момент окончания последнего из контрактов. Нас интересует вероятность того, что компания не сможет этого сделать — в случае, когда x принимает большое значение.

Всюду далее будем предполагать, что

$$\mathbb{P}(\xi_1 > x) = c_1 \bar{F}(x) + o(\bar{F}(x)) \text{ и } \mathbb{P}(\eta_1 > x) = c_2 \bar{F}(x) + o(\bar{F}(x))$$

при $x \rightarrow \infty$ для некоторого распределения F с неограниченным справа носителем и неотрицательных постоянных c_1 и c_2 таких, что $c_1 + c_2 > 0$ (мы используем одно и то же обозначение F для вероятностного распределения на прямой и его функции распределения и под $\bar{F}(x) \equiv 1 - F(x)$ понимаем правый хвост распределения F). При этих условиях асимптотическая эквивалентность (1) принимает вид:

$$(2) \quad \mathbb{P}(\bar{S}_\nu + \bar{T}_\mu > x) \sim (c_1 \mathbb{E}\nu + c_2 \mathbb{E}\mu) \bar{F}(x) \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

или, что то же самое,

$$(3) \quad \mathbb{P}(\bar{S}_\nu + \bar{T}_\mu > x) = (c_1 \mathbb{E}\nu + c_2 \mathbb{E}\mu) \bar{F}(x) + o(\bar{F}(x)).$$

Аналогичная асимптотическая эквивалентность была установлена ранее в одномерном случае. Сначала Асмуссен в [1, стр. 358, Теорема 2.1] показал, что для $\nu = \inf \{n \geq 1 : S_n \leq 0\}$

$$(4) \quad \mathbb{P}(\bar{S}_\nu > x) \sim \mathbb{E}\nu \mathbb{P}(\xi_1 > x) \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

если $\mathbb{E}\xi_1 < 0$, а распределение случайной величины ξ_1 сильно субэкспоненциально (см. определение ниже).

Затем Фосс и Захари в [4, стр. 3, Теорема 1] установили, что при тех же предположениях на распределение ξ_1 результат (4) остается верным и для произвольных неотрицательных целочисленных случайных величин ν с конечным средним, не зависящих от будущего. В той же работе авторы показали (см. [4, стр. 14, Следствие 3]), что при некоторых условиях на малость хвоста $\mathbb{P}(\nu > x)$ по отношению к хвосту $\mathbb{P}(\xi_1 > x)$, эквивалентность (4) имеет место и без предположения отрицательности среднего.

Позже Фосс, Пальмовский и Захари (см. [3]) получили ряд обобщений полученных в [4] результатов.

Распределение G с носителем на $\mathbb{R}_+$ называется *субэкспоненциальным*, если $\bar{G}(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и $\bar{G} * \bar{G}(x) \sim 2\bar{G}(x)$ при $x \rightarrow \infty$ (где $*$ — оператор свертки распределений). В общем случае, распределение G с носителем на $\mathbb{R}$ *субэкспоненциально* ($G \in \mathcal{S}$), если распределение $G^+ \equiv G\mathbf{I}_{\mathbb{R}_+}$ субэкспоненциально (здесь $\mathbf{I}_{\mathbb{R}_+}$ — индикаторная функция полуоси $\mathbb{R}_+$).

Отметим, что если распределение F субэкспоненциально, а ν и μ неслучайны, то результат (3) является прямым следствием свойств субэкспоненциальных распределений (см. [2, стр. 108]).

Мы будем работать с чуть более узким, чем $\mathcal{S}$, классом распределений — классом *сильно субэкспоненциальных* распределений, введенных в 1988 году Клюшпельберг в [5]. Распределение G с носителем на $\mathbb{R}$ называется *сильно субэкспоненциальным* ($G \in \mathcal{S}^*$), если $\bar{G}(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и

$$\int_0^x \bar{G}(x-y)\bar{G}(y)dy \sim 2m_{G^+}\bar{G}(x) \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

где $m_{G^+} = \int_0^\infty \bar{G}(x)dx < \infty$.

Известно (см. [2, стр. 55, Следствие 3.26]), что принадлежность к классам $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}^*$ сохраняется при переходе к эквивалентному распределению (если F принадлежит одному из этих классов и $\bar{F}(x) \sim \bar{G}(x)$ при $x \rightarrow \infty$, то и G принадлежит этому классу) и, что $\mathcal{S}^* \subsetneq \mathcal{S}$ (см. [2, стр. 55, Теорема 3.27] и [2, стр. 63-65]).

В случае, когда сигма-алгебры $\sigma(\nu, \xi_i; i \geq 1)$ и $\sigma(\mu, \eta_j; j \geq 1)$ независимы и распределение $F \in \mathcal{S}^*$, результат (2) может быть получен из (4) и свойств класса $\mathcal{S}$ (см. [2, стр. 52, следствие 3.18]).

В настоящей работе мы рассмотрим случай, когда ν и μ могут зависеть как от последовательностей $\{\xi_i\}$ и $\{\eta_j\}$, так и друг от друга. Главным результатом нашей работы является Теорема 1, устанавливающая достаточные условия для выполнения результата (2).

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Напомним несколько определений и известных свойств.

Будем говорить, что распределение G имеет *длинный правый хвост* ($G \in \mathcal{L}$), если $\overline{G}(x) > 0$ при всех x и

$$\frac{\overline{G}(x+h)}{\overline{G}(x)} \rightarrow 1 \text{ при } x \rightarrow \infty$$

для любого фиксированного $h > 0$.

В [2, стр. 46, Лемма 3.4] показано, что любое субэкспоненциальное (и, в частности, сильно субэкспоненциальное) распределение имеет длинный правый хвост.

Также, известно (см. [2, стр. 20, Лемма 2.19]), что для любого распределения G с длинным правым хвостом можно найти монотонно возрастающую функцию $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такую, что $h(x) \leq x/2$, $h(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$ и

$$(5) \quad \frac{\overline{G}(x \pm h(x))}{\overline{G}(x)} \rightarrow 1 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Свойство (5) будем называть *h -нечувствительностью* распределения G .

Перейдем к формулировке основных результатов нашей работы. Напомним, что мы рассматриваем независимые между собой последовательности $\{\xi_i\}$ и $\{\eta_j\}$, каждая из которых состоит из независимых и одинаково распределенных случайных величин и изучаем асимптотику вероятности

$$\mathbb{P}(\overline{S}_\nu + \overline{T}_\mu > x) \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

где

$$S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i, \quad T_l = \sum_{j=1}^l \eta_j, \quad \overline{S}_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k, \quad \overline{T}_m = \max_{0 \leq l \leq m} T_l,$$

а случайный вектор (ν, μ) с интегрируемыми неотрицательными целочисленными компонентами не зависит от будущего. Отметим, что компоненты этого вектора могут быть зависимы между собой произвольным образом.

Мы будем также предполагать, что

$$(6) \quad \mathbb{E}|\xi_1| < \infty, \quad \mathbb{E}|\eta_1| < \infty$$

и

$$(7) \quad \mathbb{P}(\xi_1 > x) = c_1 \overline{F}(x) + o(\overline{F}(x)) \quad \text{и} \quad \mathbb{P}(\eta_1 > x) = c_2 \overline{F}(x) + o(\overline{F}(x))$$

для некоторого распределения F с неограниченным справа носителем, причем

$$(8) \quad c_1 \geq 0, \quad c_2 \geq 0 \quad \text{и} \quad c_1 + c_2 > 0.$$

Мы начнем с вводного Предложения 1, а затем приведем наш главный результат — Теорему 1.

Всюду далее через $a \vee b$ ($a \wedge b$) мы будем обозначать максимум (минимум) из двух чисел a и b .

Справедливо

Предложение 1. Пусть $F \in \mathcal{S}$, выполнены условия (6) и (7), и константы c_1 и c_2 положительны. Тогда

- (i) $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(\overline{S}_\nu + \overline{T}_\mu > x)}{\overline{F}(x)} \geq c_1 \mathbb{E}\nu + c_2 \mathbb{E}\mu.$
- (ii) $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(\overline{S}_\nu \vee \overline{T}_\mu > x)}{\overline{F}(x)} \geq c_1 \mathbb{E}\nu + c_2 \mathbb{E}\mu.$

(iii) Если, дополнительно,

$$\mathbb{P}(\bar{S}_\nu > x) \sim \mathbb{E}\nu \mathbb{P}(\xi_1 > x) \text{ и } \mathbb{P}(\bar{T}_\mu > x) \sim \mathbb{E}\mu \mathbb{P}(\eta_1 > x),$$

то

$$(9) \quad \mathbb{P}(\bar{S}_\nu \vee \bar{T}_\mu > x) \sim (c_1 \mathbb{E}\nu + c_2 \mathbb{E}\mu) \bar{F}(x).$$

Замечание 1. Пусть выполнены условия Предложения 1. Известно, что условие пункта (iii) Предложения 1 выполнено в следующих случаях:

(i) $\mathbb{P}(\nu \leq N, \mu \leq N) = 1$ для некоторого $N \geq 1$ ([3, стр. 1939, Теорема 1]).

(ii) $F \in \mathcal{S}^*$ и

$$(10) \quad \mathbb{P}(\nu > h(x)) = o(\bar{F}(x)) \text{ и } \mathbb{P}(\mu > h(x)) = o(\bar{F}(x))$$

для некоторой функции $h(x)$ такой, что распределение F является h -нечувствительным ([4, стр. 14, Следствие 3]).

(iii) $F \in \mathcal{S}^*$, $\mathbb{E}\xi_1 < 0$ и $\mathbb{E}\eta_1 < 0$ ([4, стр. 3, Теорема 1]).

Приведем теперь главный результат нашей работы, в котором мы обобщаем одномерный результат (4) на двумерный случай.

Теорема 1. Пусть $F \in \mathcal{S}^*$, выполнены условия (6), (7), (8), и для некоторой функции $h(x)$ такой, что распределение F является h -нечувствительным, выполнено условие:

$$(11) \quad \mathbb{P}(\nu \vee \mu > h(x)) = o(\bar{F}(x)).$$

Тогда результат (2) имеет место.

Поскольку,

$$\mathbb{P}(\nu > h(x)) \vee \mathbb{P}(\mu > h(x)) \leq \mathbb{P}(\nu \vee \mu > h(x)) \leq \mathbb{P}(\nu > h(x)) + \mathbb{P}(\mu > h(x)).$$

то условие (11) — краткая форма условий (10).

Заметим ещё, что правые части асимптотик (9) и (2) совпадают по форме.

Остальная часть работы посвящена доказательствам Предложения 1 и Теоремы 1.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство Предложения 1. Вначале докажем пункт (ii).

В [3, стр. 1939, Теорема 1] показано, что если $\mathbb{P}(\nu \leq r) = 1$ для некоторого целого $r \geq 1$ и $F \in \mathcal{L}$, то

$$(12) \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(\bar{S}_\nu > x)}{\bar{F}(x)} \geq c_1 \mathbb{E}\nu.$$

Зафиксируем $r \geq 1$. Положим

$$\nu_r = \nu \wedge r \text{ и } \mu_r = \mu \wedge r.$$

Тогда

$$(13) \quad \mathbb{P}(\bar{S}_\nu \vee \bar{T}_\mu > x) \geq \mathbb{P}(\bar{S}_{\nu_r} \vee \bar{T}_{\mu_r} > x) = \mathbb{P}(\bar{S}_{\nu_r} > x) + \mathbb{P}(\bar{T}_{\mu_r} > x) - \mathbb{P}(\bar{S}_{\nu_r} \wedge \bar{T}_{\mu_r} > x).$$

Так как $F \in \mathcal{S}$, вероятность

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bar{S}_{\nu_r} \wedge \bar{T}_{\mu_r} > x) &= \mathbb{P}(\bar{S}_{\nu_r} > x, \bar{T}_{\mu_r} > x) \leq \mathbb{P}(\bar{S}_r > x, \bar{T}_r > x) \\ &= \mathbb{P}(\bar{S}_r > x) \mathbb{P}(\bar{T}_r > x) = c_1 c_2 (r \bar{F}(x))^2 + o((\bar{F}(x))^2) = o(\bar{F}(x)), \end{aligned}$$

и, следовательно, в силу (12) и (13)

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(\bar{S}_\nu \vee \bar{T}_\mu > x)}{\bar{F}(x)} \geq c_1 \mathbb{E}\nu_r + c_2 \mathbb{E}\mu_r$$

при всех $r \geq 1$. Переходя к пределу по $r \rightarrow \infty$, получаем, что

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(\bar{S}_\nu \vee \bar{T}_\mu > x)}{\bar{F}(x)} \geq c_1 \mathbb{E}\nu + c_2 \mathbb{E}\mu.$$

Пункт (ii) доказан.

Доказательство пункта (i) следует из очевидного неравенства

$$\mathbb{P}(\bar{S}_\nu + \bar{T}_\mu > x) \geq \mathbb{P}(\bar{S}_\nu \vee \bar{T}_\mu > x)$$

и пункта (ii).

Для доказательства пункта (iii) достаточно заметить, что

$$\mathbb{P}(\bar{S}_\nu \vee \bar{T}_\mu > x) \leq \mathbb{P}(\bar{S}_\nu > x) + \mathbb{P}(\bar{T}_\mu > x)$$

и воспользоваться пунктом (ii).

Предложение 1 доказано. $\square$

Перейдем к доказательству Теоремы 1. Мы проведем его в несколько этапов. Вначале мы докажем частный случай Теоремы 1 (см. Предложение 2 ниже), предполагая, что выполнены следующие условия:

$$(14) \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0 \text{ и } \mathbb{P}(\xi_1 \geq 0) = \mathbb{P}(\eta_1 \geq 0) = 1.$$

Доказательство Предложения 2 основано на трех вспомогательных леммах.

Затем мы докажем Теорему 1 в общем случае.

Итак, пусть выполнены условия (14). Положим $\zeta_i = \xi_i + \eta_i$ и

$$Z_k = \sum_{i=1}^k \zeta_i.$$

Определим моменты остановки

$$\begin{aligned} \kappa(x) &= \min \{k \geq 0 : Z_k > x\}, \\ \nu(x) &= \min \{n \geq 0 : S_n > x\}, \\ \mu(x) &= \min \{m \geq 0 : T_m > x\}. \end{aligned}$$

Ясно, что $\nu(x) \geq \kappa(x)$ и $\mu(x) \geq \kappa(x)$.

Лемма 1. Пусть выполнены условия Теоремы 1 и условия (14). Тогда

$$\mathbb{P}(S_\nu + T_\mu > x, \nu(x) > \kappa(x), \mu(x) > \kappa(x)) = o(\bar{F}(x)).$$

Доказательство. Положим $\gamma = \nu \vee \mu$. Так как $\{S_\nu + T_\mu > x\} \subseteq \{\gamma \geq \kappa(x)\}$, то

$$(15) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}(S_\nu + T_\mu > x, \nu(x) > \kappa(x), \mu(x) > \kappa(x)) &\leq \mathbb{P}(\gamma \geq \kappa(x), Z_{\kappa(x)-1} > h(x)) \\ &+ \mathbb{P}(\gamma \geq \kappa(x), \nu(x) > \kappa(x), \mu(x) > \kappa(x), Z_{\kappa(x)-1} \leq h(x)). \end{aligned}$$

Рассмотрим по отдельности каждое из слагаемых в правой части полученного неравенства.

В силу наших предположений, $\mathbb{P}(\nu > h(x)) = o(\bar{F}(x))$. Следовательно, согласно пункту (ii) Замечания 1,

$$\mathbb{P}(\gamma \geq \kappa(x)) \sim \mathbb{E}\gamma \mathbb{P}(\zeta_1 > x).$$

В [4, стр. 7, Лемма 1] было показано, что

$$\mathbb{P}(\gamma \geq \kappa(x), Z_{\kappa(x)-1} \leq h(x)) \sim \mathbb{E}\gamma \mathbb{P}(\zeta_1 > x).$$

Следовательно,

$$(16) \quad \mathbb{P}(\gamma \geq \kappa(x), Z_{\kappa(x)-1} > h(x)) = o(\overline{F}(x)).$$

Далее,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\gamma \geq \kappa(x), \nu(x) > \kappa(x), \mu(x) > \kappa(x), Z_{\kappa(x)-1} \leq h(x)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\gamma \geq k, S_k \leq x, T_k \leq x, Z_{k-1} \leq h(x), Z_k > x) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\gamma \geq k, \xi_k \leq x, \eta_k \leq x, \xi_k + \eta_k > x - h(x)) \\ &= \mathbb{P}(\xi_1 \leq x, \eta_1 \leq x, \xi_1 + \eta_1 > x - h(x)) \mathbb{E}\gamma. \end{aligned}$$

По свойствам субэкспоненциальных распределений

$$\mathbb{P}(\xi_1 \leq x, \eta_1 \leq x, \xi_1 + \eta_1 > x - h(x)) = o(\overline{F}(x)).$$

Следовательно,

$$(17) \quad \mathbb{P}(\gamma \geq \kappa(x), \nu(x) > \kappa(x), \mu(x) > \kappa(x), Z_{\kappa(x)-1} < h(x)) = o(\overline{F}(x)).$$

Комбинация (15), (16) и (17) дает желаемый результат.

Лемма 1 доказана. $\square$

Лемма 2. Пусть выполнены условия Теоремы 1 и условия (14). Тогда

$$(18) \quad \mathbb{P}(S_\nu + T_\mu > x) \sim \mathbb{P}(A_1(x)) + \mathbb{P}(A_2(x)),$$

где

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \{S_\nu + T_\mu > x, \nu(x) = \kappa(x), \mu(x) > \kappa(x)\}, \\ A_2(x) &= \{S_\nu + T_\mu > x, \nu(x) > \kappa(x), \mu(x) = \kappa(x)\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Согласно Лемме 1

$$(19) \quad \begin{aligned} & \mathbb{P}(\overline{S}_\nu + \overline{T}_\mu > x) = \mathbb{P}(A_1(x)) + \mathbb{P}(A_2(x)) \\ &+ \mathbb{P}(\overline{S}_\nu + \overline{T}_\mu > x, \nu(x) = \kappa(x), \mu(x) = \kappa(x)) + o(\overline{F}(x)). \end{aligned}$$

Рассмотрим третье слагаемое в (19).

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(S_\nu + T_\mu > x, \nu(x) = \kappa(x), \mu(x) = \kappa(x)) \\ &\leq \mathbb{P}(\gamma \geq \kappa(x), \nu(x) = \kappa(x), \mu(x) = \kappa(x)) \\ &= \mathbb{P}(\gamma \geq \kappa(x), \nu(x) = \kappa(x), \mu(x) = \kappa(x), Z_{\kappa(x)-1} \leq h(x)) + o(\overline{F}(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\gamma \geq k, S_k > x, T_k > x, Z_{k-1} \leq h(x)) + o(\overline{F}(x)) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\gamma \geq k, \xi_k > x - h(x), \eta_k > x - h(x)) + o(\overline{F}(x)) \\ &= (\overline{F}(x))^2 \mathbb{E}\gamma + o(\overline{F}(x)) = o(\overline{F}(x)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}(S_\nu + T_\mu > x) \sim \mathbb{P}(A_1(x)) + \mathbb{P}(A_2(x)).$$

Лемма 2 доказана. $\square$

Лемма 3. Пусть выполнены условия Теоремы 1 и условия (14). Тогда для $i = 1, 2$

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(A_i(x))}{\bar{F}(x)} \leq c_i \mathbb{E} \nu.$$

Доказательство. Ясно, что:

$$(20) \quad \mathbb{P}(A_1(x)) = \mathbb{P}(A_1(x), \gamma \geq \kappa(x)) = \mathbb{P}(A_1(x), \nu \geq \kappa(x)) + \mathbb{P}(A_1(x), \nu < \kappa(x), \mu \geq \kappa(x)).$$

Для первого слагаемого в правой части (20) справедлива следующая оценка сверху:

$$\mathbb{P}(A_1(x), \nu \geq \kappa(x)) \leq \mathbb{P}(\nu \geq \nu(x)) = \mathbb{P}(S_\nu > x) \sim c_1 \mathbb{E} \nu \bar{F}(x).$$

Следовательно, для доказательства Леммы 2 достаточно показать, что второе слагаемое в правой части (20) имеет больший порядок малости чем $\bar{F}(x)$.

По аналогии с доказательством Леммы 1:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1(x), \nu < \kappa(x), \mu \geq \kappa(x)) &\sim \mathbb{P}(A_1(x), \nu < \kappa(x), \mu \geq \kappa(x), Z_{\kappa(x)-1} \leq h(x)) \\ &\leq \mathbb{P}(T_\mu > x - h(x), \nu(x) = \kappa(x), \mu(x) > \kappa(x), \mu > \kappa(x)) \\ &\sim \mathbb{P}(T_\mu > x, \nu(x) = \kappa(x), \mu(x) > \kappa(x), \mu > \kappa(x)), \end{aligned}$$

где последняя эквивалентность имеет место в силу h -нечувствительности распределения случайной величины T_μ .

Далее,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(T_\mu > x, \nu(x) = \kappa(x), \mu(x) > \kappa(x), \mu > \kappa(x)) \\ &= \mathbb{P}(\mu \geq \mu(x) > \kappa(x), \nu(x) = \kappa(x)) \\ &\leq \mathbb{P}(\mu \geq \mu(x) > \nu(x)) \\ &\sim \mathbb{P}(\mu \geq \mu(x) > \nu(x), T_{\mu(x)-1} \leq h(x)) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_m > x, \mu \geq m, S_{m-1} > x, T_{m-1} \leq h(x)) \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\eta_m > x - h(x), \mu \geq m, S_{m-1} > x). \end{aligned}$$

Так как сигма-алгебры

$$\sigma(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}, \eta_1, \dots, \eta_{m-1}, \mathbb{I}(\gamma \leq m-1)) \quad \text{и} \quad \sigma(\xi_i, \eta_j; i \geq m, j \geq m)$$

независимы, получаем:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\eta_m > x - h(x), \mu \geq m, S_{m-1} > x) \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\eta_m > x - h(x), \gamma \geq m, S_{m-1} > x) \\ &= \mathbb{P}(\eta_1 > x - h(x)) \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\gamma \geq m, S_{m-1} > x) \\ &\sim c_2 \bar{F}(x) \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\gamma \geq m, S_{m-1} > x) \\ &\leq c_2 \bar{F}(x) \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\gamma \geq m, S_\gamma > x) \\ &= c_2 \bar{F}(x) \mathbb{E}(\gamma; S_\gamma > x), \end{aligned}$$

где $\mathbb{E}(\xi; E) \equiv \mathbb{E} \xi \mathbb{I}(E)$ для любого события E .

Согласно нашим предположениям, $\mathbb{P}(\gamma < \infty) = 1$. Следовательно,

$$\mathbb{P}(S_\gamma < \infty) = 1 \text{ и } \mathbb{P}(S_\gamma > x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Поэтому,

$$\mathbb{E}(\gamma; S_\gamma > x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

и

$$\mathbb{P}(A_1(x), \nu < \kappa(x), \mu \geq \kappa(x), Z_{\kappa(x)-1} \leq h(x)) = o(\bar{F}(x)).$$

Следовательно,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{A_1(x)}{\bar{F}(x)} \leq c_1 \mathbb{E}\nu.$$

Доказательство для $A_2(x)$ абсолютно аналогично.

Лемма 3 доказана. $\square$

Предложение 2. Пусть выполнены условия Теоремы 1 и условия (14). Тогда

$$\mathbb{P}(S_\nu + T_\mu > x) \sim (c_1 \mathbb{E}\nu + c_2 \mathbb{E}\mu) \bar{F}(x).$$

Доказательство Предложения 2. Согласно пункту (i) Предложения 1

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_\nu + T_\mu > x)}{\bar{F}(x)} \geq c_1 \mathbb{E}\nu + c_2 \mathbb{E}\mu.$$

С другой стороны, пользуясь Леммами 2 и 3, получаем, что

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_\nu + T_\mu > x)}{\bar{F}(x)} \leq c_1 \mathbb{E}\nu + c_2 \mathbb{E}\mu.$$

Предложение 2 доказано. $\square$

Перейдем к доказательству Теоремы 1 в общем случае.

Доказательство Теоремы 1. Нижняя оценка

$$(21) \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(\bar{S}_\nu + \bar{T}_\mu > x)}{\bar{F}(x)} \geq c_1 \mathbb{E}\nu + c_2 \mathbb{E}\mu$$

в случае, когда $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ следует из пункта (i) Предложения 1. Если же одна из констант (скажем, c_2) равна 0, то оценка (21) также имеет место, в силу очевидного неравенства

$$\bar{S}_\nu + \bar{T}_\mu \geq \bar{S}_\nu$$

и (12).

Докажем верхнюю оценку. Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

Пусть $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ — независимые между собой последовательности независимых и одинаково распределенных неотрицательных случайных величин, не зависящие от последовательностей $\{\xi_i\}$ и $\{\eta_j\}$ и случайного вектора (ν, μ) . Будем считать, что

$$\mathbb{P}(\phi_1 > x) \sim \varepsilon \bar{F}(x) \text{ и } \mathbb{P}(\psi_1 > x) \sim \varepsilon \bar{F}(x).$$

Положим

$$\xi'_i = \xi_i \vee \phi_i, \quad \eta'_j = \eta_j \vee \psi_j, \quad S'_k = \sum_{i=1}^k \xi'_i \text{ и } T'_l = \sum_{j=1}^l \eta'_j.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi'_1 > x) &= \mathbb{P}(\xi_1 > x) + \mathbb{P}(\phi_1 > x) - \mathbb{P}(\xi_1 > x) \mathbb{P}(\phi_1 > x) \sim (c_1 + \varepsilon) \bar{F}(x); \\ \mathbb{P}(\eta'_1 > x) &= \mathbb{P}(\eta_1 > x) + \mathbb{P}(\psi_1 > x) - \mathbb{P}(\eta_1 > x) \mathbb{P}(\psi_1 > x) \sim (c_2 + \varepsilon) \bar{F}(x).\end{aligned}$$

Из определения ξ'_i и η'_j следует, что $\bar{S}_\nu \leq S'_\nu$ и $\bar{T}_\mu \leq T'_\mu$. Следовательно,

$$\mathbb{P}(\bar{S}_\nu + \bar{T}_\mu > x) \leq \mathbb{P}(S'_\nu + T'_\mu > x) \sim ((c_1 + \varepsilon)\mathbb{E}\nu + (c_2 + \varepsilon)\mathbb{E}\mu) \bar{F}(x),$$

где последняя эквивалентность выполнена в силу Предложения 2.

Следовательно,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(\bar{S}_\nu + \bar{T}_\mu > x)}{\bar{F}(x)} \leq c_1 \mathbb{E}\nu + c_2 \mathbb{E}\mu + \varepsilon (\mathbb{E}\nu + \mathbb{E}\mu)$$

при любом $\varepsilon > 0$. Переходя к пределу по $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$(22) \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(\bar{S}_\nu + \bar{T}_\mu > x)}{\bar{F}(x)} \leq c_1 \mathbb{E}\nu + c_2 \mathbb{E}\mu.$$

Комбинация (21) и (22) дает желаемый результат (2).

Теорема 1 доказана. □

В заключение автор хочет поблагодарить С. Г. Фосса и Е. И. Прокопенко за постановку задачи, плодотворные обсуждения и полезные замечания.

REFERENCES

- [1] S. Asmussen, *Subexponential asymptotics for stochastic processes: extremal behavior, stationary distributions and first passage probabilities*, The Annals of Applied Probability, **8**:2 (1998), 354–374. MR1624933
- [2] S. Foss, D. Korshunov, S. Zachary, *An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions*, 2nd edition, New York: Springer, 2013. MR3097424
- [3] S. Foss, Z. Palmowski, S. Zachary, *The probability of exceeding a high boundary on a random time interval for a heavy-tailed random walk*, The Annals of Applied Probability, **15**:3 (2005), 1936–1957. MR2152249
- [4] S. Foss, S. Zachary, *The maximum on a random time interval of a random walk with long-tailed increments and negative drift*, The Annals of Applied Probability, **13**:1 (2003), 37–53. MR1951993
- [5] C. Klüppelberg, *Subexponential distributions and integrated tails*, Journal of Applied Probability, **25**:1 (1988), 132–141. MR929511

PAVEL IGOREVICH TESEMNIKOV
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 1, PIROGOVA STR.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: tesemnikov.p@gmail.com