Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. G. Chebunin, S. G. Foss, On stability of multiple access systems with minimal feedback, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1805–1821

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.128>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 35.174.16.151

April 26, 2023, 16:51:19

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1805–1821 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.128

УДК 621.394.74

MSC 60K25

О СТАБИЛЬНОСТИ СИСТЕМ СЛУЧАЙНОГО
МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА С МИНИМАЛЬНОЙ
ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

М.Г. ЧЕБУНИН, С.Г. ФОСС

ABSTRACT. We introduce and analyse a new model of a multiple access transmission system with a non-standard «minimal feedback» information.

We assume that time is slotted and that arriving messages form a renewal process. At the beginning of any time slot n , each message present in the system makes a transmission attempt with a (common) probability p_n that depends on the system information from the past. Given that $B_n \geq 1$ messages make the attempt, each of them is successfully transmitted and leaves the system with probability q_{B_n} , independently of everything else, and stays in the system otherwise. Here $\{q_i\}$ is a sequence of probabilities such that $q_{i_0} > 0$ and $q_i = 0$ for $i > i_0$, for some $i_0 \geq 1$.

We assume that, at any time slot n , the only information available from the past is whether i_0 messages were successfully transmitted or not. We call this the «minimal feedback» (information). In particular, if $i_0 = 1$ and $q_1 = 1$, then this is the known «success-nonsuccess» feedback.

A transmission algorithm, or protocol, is a rule that determines the probabilities $\{p_n\}$. We analyse conditions for existence of algorithms that stabilise the dynamics of the system. We also estimate the rates of convergence to stability. The proposed protocols implement the idea of ‘triple randomization’ that develops the idea of ‘double randomization’ introduced earlier by Foss, Hajek and Turlikov (2016).

CHEBUNIN, M.G., FOSS, S.G., ON STABILITY OF MULTIPLE ACCESS SYSTEMS WITH MINIMAL FEEDBACK.

© 2019 ЧЕБУНИН М.Г., ФОСС С.Г.

РАБОТА ВЫПОЛНЕНА ПРИ ЧАСТИЧНОЙ ПОДДЕРЖКЕ РФФИ (ГРАНТ 17-01-00683) И ПРОГРАММЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ СО РАН № I.1.3., ПРОЕКТ № 0314-2019-0008.

Поступила 16 сентября 2019 г., опубликована 2 декабря 2019 г.

Keywords: random multiple access, binary feedback, multiple transmission; positive recurrence, (in)stability, Foster criterion.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем систему передачи информации со случайным множественным доступом (кратко: «систему СМД») с бесконечным числом пользователей, отправляющих сообщения, и одним передающим прибором, доступным для всех них. Мы предполагаем, что система работает в соответствии с т.н. «адаптивным протоколом АЛОНА», который может быть описан следующим образом. В системе нет взаимодействия между пользователями, и в момент времени n каждое сообщение, присутствующее в системе, направляется на передающий прибор с одной и той же вероятностью p_n , независимо от всех остальных. Предполагается, что время передачи всех сообщений одинаково и равно единице.

Пусть ξ_n — общее количество сообщений, поступающих в систему во временном интервале $[n-1, n)$. Предполагается, что $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ — независимые одинаково распределенные (н. о. р.) случайные величины с конечным средним $\lambda = \mathbf{E}\xi_1$. Обозначим через N_n общее число сообщений, присутствующих в системе в момент времени n .

Предположим сначала, что передающий прибор за единицу времени может передать лишь одно сообщение, т. е. возможны три ситуации: либо не передавалось ни одного сообщения («пустой слот»), либо передавалось одно сообщение («успех»), либо произошло наложение сообщений от двух или более пользователей («конфликт»). Будем называть такую модель *базовой*. Если положить вероятности p_n равными одному и тому же числу $p < 1$, то, как хорошо известно (см. напр. [20]), такая система нестабильна при любом выборе числа p , т. е. $N_n \rightarrow \infty$ п. н. при $n \rightarrow \infty$. Поэтому вероятности p_n должны меняться со временем (адаптироваться к состоянию системы), и мы будем рассматривать *адаптивные* протоколы.

Базовая модель является *централизованной*, если значения N_n доступны пользователям и могут быть использованы для задания p_n . В таком случае (см. напр. [7]–[8]), если $\lambda < e^{-1}$, то протокол, при котором $p_n = 1/\max(1, N_n)$, стабилен (является эргодическим). Если же $\lambda > e^{-1}$, то любой протокол нестабилен, т. е. $N_n \rightarrow \infty$ п. н. при $n \rightarrow \infty$. Пороговый уровень e^{-1} называется *пропускной способностью* системы. В моделях СМД с *пространственными* взаимодействиями существуют централизованные протоколы более общего вида, которые рассматривались в [5].

В данной работе мы будем изучать *децентрализованную* модель СМД, в которой значения N_n не могут наблюдаться. Для базовой децентрализованной модели хорошо известны протоколы, использующие т. н. троичную обратную связь (см. напр. [9]–[10]), при которой пользователи могут наблюдать выход прибора и различать три возможные ситуации: либо «пустой слот», либо «успех», либо «конфликт». С 80-х годов известно (см. напр. [11], [12], [19]), что при использовании троичной обратной связи пропускная способность системы также

равна e^{-1} . Вскоре после появления работ [9]–[10] были предложены и исследованы протоколы, основанные на меньшем объеме информации (то есть при наличии лишь т. н. «двоичной обратной связи») – либо «пустой или непустой слот» (мы не можем отличать успешную передачу от наложения сообщений), либо «конфликт или неконфликт» (мы не можем отличать пустой слот от успешной передачи). В работах [13]–[14] для данных видов обратной связи были доказаны аналогичные результаты существования (отсутствия) стабильного протокола, если скорость входного сигнала ниже (выше) порогового уровня e^{-1} .

Случай двоичной обратной связи «успех-неуспех» оказался более сложным. Сначала были предложены протоколы (см. напр. [15], [16], [17], [18]), обеспечивающие стабильное функционирование системы за счет введения некоторых расширений модели (напр. введения специального тестирующего пакета и т. п.) или за счет использования индивидуальной истории сообщений. Наконец, в работе [3] был предложен стабильный протокол, который использует лишь обратную связь вида «успех-неуспех» без дополнительных опций. Он основан на свежей идее введения второй рандомизации, при которой вероятности p_n зависят не только от случайной обратной связи с прибором передачи, но и от дополнительно введенной последовательности н. о. р. случайных величин. Предложенный в [3] вид протокола зависит от знания границ, в которых может находиться интенсивность входного потока λ . В работе [3] была также сформулирована гипотеза о существовании и виде протокола, являющегося стабильным при всех значениях интенсивности λ из интервала $(0, e^{-1})$.

В работе [4] доказана справедливость гипотезы из работы [3]. Более того, изучен более общий класс децентрализованных моделей СМД, содержащий базовую модель, и для этого класса доказано более общее утверждение, из которого в качестве следствия получен и положительный ответ на сформулированную в [3] гипотезу. Кроме этого, предложена следующая более общая модель передачи сообщений. За единицу времени передающий прибор может передать несколько, но не более $i_0 \geq 1$ сообщений (где i_0 – заданное конечное число), и при передаче каждое из сообщений может быть искажено. Неверно переданные сообщения возвращаются в систему. Предполагается, что обслуживающиеся сообщения не могут обмениваться информацией, и если в момент времени n на обслуживание в прибор поступило $i \in \{1, \dots, i_0\}$ сообщений, то каждое из них может быть передано с одинаковой вероятностью $q_i \in [0, 1]$, где $q_{i_0} > 0$, независимо от всех остальных. В частности, при $i_0 = 1$ и $q_1 = 1$ получается базовая модель. Если же положить $i_0 = k$, $q_1 = q_2 = \dots = q_k = 1$, то получится модель, описание которой можно найти в [19] стр. 262–272. В работе [4] предполагалось также, что при построении протокола доступна информация о количестве переданных сообщений (т. е. мы можем наблюдать выход с прибора). Это согласуется с базовой моделью, т. к. при $i_0 = 1$ и $q_1 = 1$, информацию о том, что произошло – «успех» или «неуспех» – можно интерпретировать и как количество переданных сообщений (либо 1, либо 0). В работе [4] введен и описан достаточно общий класс дважды рандомизированных протоколов с частичной обратной связью, использующих информацию о количестве переданных сообщений. Этот класс протоколов включает в себя протоколы, описанные в одной

из гипотез работы [3]. Задача исследования стабильности протокола сводится к задаче исследования условий положительной возвратности и эргодичности вспомогательной двумерной марковской цепи. В зависимости от вида последовательности $\{q_i\}_{i=1}^{i_0}$ отыскивается граница пропускной способности данной децентрализованной системы СМД, т. е. такое значение интенсивности входного потока λ_{max} , что стабильный протокол АЛОНА может быть построен тогда и только тогда, когда $\lambda < \lambda_{max}$ (см. лемму 4, [4]). В частности, для базовой модели (при $i_0 = 1$, $q_1 = 1$) получаем $\lambda_{max} = e^{-1}$. Далее при некотором ограничении на управляющую последовательность $\{q_i\}_{i=1}^{i_0}$ доказывается стабильность введенного класса протоколов при $\lambda < \lambda_{max}$. В частности, для базовой модели доказана справедливость сформулированной в работе [3] гипотезы, но при некотором уточненном условии. Также, в зависимости от моментных ограничений на распределение случайной величины ξ_1 , получены оценки скорости сходимости рассматриваемой марковской цепи к ее стационарному распределению.

В настоящей работе предлагается обобщение класса децентрализованных моделей СМД, введенного в работе [4], и новый класс протоколов, использующий тройную рандомизацию.

Вводимый нами класс децентрализованных моделей СМД отличается от рассмотренных ранее (см. [4]) в двух аспектах. Во-первых, сняты все излишние ограничения на вероятности q_i , $i \leq i_0$, присутствующие в работе [4]. Теперь предполагается только, что $q_{i_0} > 0$. Это условие никак не ограничивает общности рассмотрения СМД с ограниченной интенсивностью обслуживания, поскольку i_0 определяется как последний номер, для которого $q_{i_0} > 0$.

Во-вторых, для управления протоколом вместо информации о числе переданных сообщений мы потребуем лишь информация о том, было ли достигнуто максимально возможное число передаваемых сообщений i_0 . Другими словами, мы потребуем, чтобы управляющий механизм на каждом временном слоте различал две ситуации: передано максимально возможное число сообщений (т.е. ровно i_0 пользователей сделало попытку передать сообщение и все попытки оказались удачными) или произошло что-то иное (т.е. передано от 0 до $i_0 - 1$ сообщений).

Мы предложим протокол, который обеспечивает эргодичность этой СМД при том же ограничении $\lambda < \lambda_{max}$, что и в предшествующей работе. При этом максимальная пропускная способность λ_{max} является точкой максимума явно определенной в работе функции на неотрицательной полуоси, как и в работе [4]. Отметим, что в работе [4] было показано (по аналогии со случаем $i_0 = 1$), что если $\lambda > \lambda_{max}$, то построить стабильный протокол АЛОНА нельзя.

Предлагаемый протокол использует тройную рандомизацию. Ее идея является развитием идеи двойной рандомизации, предложенной в работе [3]. Мы также предложим пример, в котором наши условия выполнены и построение стабильного алгоритма возможно, однако условия теоремы из [4] на управляющую последовательность $\{q_i\}_{i=1}^{i_0}$ не выполняются. Чтобы обеспечить стабильность во

всем классе многоканальных СМД, предлагается третья рандомизация, которая позволяет не менять на следующем шаге оценку неизвестного числа сообщений в системе (см. подробнее следующий параграф).

Настоящая работа построена следующим образом. В параграфе 2 вводится модель СМД, описывается предлагаемый класс протоколов и формулируется основная теорема. В параграфе 3 строится пробная функция, используемая в доказательстве основной теоремы, и формулируются вспомогательные утверждения. В параграфе 4 приводится доказательство основной теоремы. Доказательства вспомогательных утверждений приводятся в приложении. Доказательства многих утверждений проводятся по аналогии с доказательствами соответствующих утверждений из работы [4].

Напомним следующие стандартные обозначения. Для двух положительных функций ϕ и ψ , запись $\phi(t) = o(\psi(t))$ означает, что $\phi(t)/\psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, и запись $\phi(t) \sim \psi(t)$ — что эти функции эквивалентны, т. е. $\phi(t)/\psi(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В это параграфе мы опишем новый класс протоколов передачи информации и сформулируем полученные нами результаты.

Итак, мы рассматриваем децентрализованную модель СМД с бесконечным числом пользователей и одним передающим прибором, доступным для всех них. Пользователи обмениваются сообщениями по этому прибору. Предполагается, что время передачи каждого сообщения равно единице. Напомним, что система работает в соответствии с «протоколом АЛОНА», ξ_n — общее количество сообщений, поступающих в систему во временном интервале $[n-1, n)$. Предполагается, что $\{\xi_n\}$ — н. о. р. случайные величины с конечным средним $\lambda = \mathbf{E}\xi_1$. Пусть N_n — общее (ненаблюдаемое) число сообщений, присутствующих в системе в момент времени n , и $\{q_i\}_{i=1}^{i_0}$ — управляющая последовательность (известная) работы прибора. Обозначим через B_n суммарное (ненаблюдаемое) количество сообщений, поступивших на передающий прибор, а через J_n — суммарное (ненаблюдаемое) количество сообщений, переданных прибором в момент времени n . Ясно, что B_n — случайная величина с условно биномиальным распределением $B(N_n, p_n)$, т. е.

$$\mathbf{P}(B_n = k | N_n = m, p_n = p) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$$

при $k = 0, 1, \dots, m$. Положим $B_n = 0$ при $N_n = 0$. Если $B_n \in \{1, \dots, i_0\}$, то J_n также будет случайной величиной с условно биномиальным распределением $B(B_n, q_{B_n})$. В противном случае $J_n = 0$, т. е. либо слот является пустым ($B_n = 0$), либо происходит конфликт сообщений ($B_n > i_0$). Имеет место следующая рекурсия:

$$(1) \quad N_{n+1} = N_n - J_n + \xi_{n+1}.$$

Для более формального описания модели зададим два взаимно независимых семейства $\{U_{n,j}^{(1)}\}_{n \geq 0, j \geq 1}$, $\{U_{n,j}^{(2)}\}_{n \geq 0, j \geq 1}$ н. о. р. случайных величин, имеющих

равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Тогда B_n и J_n можно задать следующими формулами:

$$B_n = \sum_{j=1}^{N_n} I(U_{n,j}^{(1)} < p_n)$$

и

$$J_n = I(B_n \in \{1, \dots, i_0\}) \cdot \left(\sum_{j=1}^{B_n} I(U_{n,j}^{(2)} < q_i) \right) \in \{0, \dots, i_0\},$$

где как обычно $\sum_1^0 = 0$.

Напомним, что мы рассматриваем децентрализованные протоколы, при которых известны лишь значения из прошлого $\mathbf{I}(J_k = i_0)$, $k < n$. Мы рассматриваем протоколы, в которых $\{p_n\}$ определены рекуррентно как (случайное) число, которое зависит от истории системы только через p_{n-1} и $\mathbf{I}(J_{n-1} = i_0)$. Заметим, что двумерная последовательность (N_n, p_n) , $n = 1, 2, \dots$, образует однородную по времени цепь Маркова.

Пусть $N_0 = m \geq 0$ — начальное количество сообщений в системе и $S_0 = s \geq 1$ положительное число, которое является «оценкой» неизвестного m . Пусть $\mathcal{H}$ — класс неубывающих функций $h : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{N}$ таких, что $h(t) \uparrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ и

$$(2) \quad h(t) = o(\sqrt{t}).$$

Каждой функции $h \in \mathcal{H}$ сопоставим $\mathcal{E}_h$ — класс положительных функций $\varepsilon_h : [1, \infty) \rightarrow (0, 1/2]$ таких, что если $h(t)$ есть неограниченная функция, то при $t \rightarrow \infty$

$$(3) \quad \varepsilon_h(t) \rightarrow 0 \text{ и } h(t)\varepsilon_h^2(t) \rightarrow \infty.$$

Обозначим через

$$p(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{i_0} \frac{q_i \cdot z^i}{(i-1)!}.$$

Рассмотрим функцию $\lambda(z) \stackrel{\text{def}}{=} p(z)e^{-z}$ при $z \geq 0$. Обозначим через

$$\lambda_{\max} = \max_{0 < z < \infty} \lambda(z) = \lambda(z_0),$$

где $z_0 = \max\{z^* : \lambda(z^*) = \lambda_{\max}\}$ — крайняя правая точка глобального максимума функции $\lambda(z)$.

В ряде частных случаев z_0 находится в явном виде. Например, если $i_0 = 1$ и $q_1 = 1$, то $p(z) = z$ и $\lambda_{\max} = e^{-1}$ при $z_0 = 1$. Если $i_0 = 2$ и $q_1 q_2 > 0$, то

$$p(z) = q_1 z + q_2 z^2, \quad z_0 = 1 - q + \sqrt{1 + q^2}, \quad \lambda_{\max} = \lambda(z_0), \quad \text{где } q = q_1/(2q_2).$$

Если $i_0 = k \geq 1$ и $q_i = 1/i$ при $i \in \{1, \dots, k\}$, то

$$p(z) = \sum_{i=1}^k \frac{z^i}{i!}, \quad z_0 = (k!)^{1/k}, \quad \lambda_{\max} = \lambda(z_0).$$

В работе [4] при построении стабильного протокола предполагалось существование единственной экстремальной точки функции $\lambda(z)$ при $z > 0$, т.е. существование ровно одного корня уравнения $p'(z) - p(z) = 0$ при $z > 0$. Это условие выполнено для всех приведенных выше примеров, однако оно выполняется не для любой управляющей последовательности $\{q_i\}_{i=1}^{i_0}$. Например, предположим, что $q_1 \neq 0$ и определим $a_i = q_i/(q_1(i-1)!)$ при $i \geq 1$, где $a_i \in [0, \infty)$. Тогда

$$p'(z) - p(z) = q_1 \sum_{i=1}^{i_0} a_i z^{i-1} (i - z) = q_1 f_{i_0}(z).$$

Пусть $i_0 = 5$, $q_2 = q_3 = q_4 = 0$, тогда $f_5(z) = 1 - z + a_5 z^4(5 - z)$. Ясно, что $f(1) > 0$, $f(2) < 0$, $f(4) > 0$ при $3/256 < a_5 < 1/24$. Поэтому функция $f_5(z)$ имеет более одного корня при $z > 0$, например при $a_5 = 0,02$.

Определим при $t \geq 1$ следующие функции

$$\beta(t) = 1 - \varepsilon_h(t), \quad \alpha(t) = 1 - \frac{1}{1 + \beta^{i_0}(t) \exp(z_0 \varepsilon_h(t)/\beta(t))}$$

Пусть далее $C \in \mathbf{N}$ — некоторый положительный параметр, и пусть $\{I_n\}$ — последовательность н. о. р. случайных величин, которая не зависит от введенных ранее управляющих случайных величин $\{\xi_n\}$, $\{U_{n,j}^{(1)}\}$, $\{U_{n,j}^{(2)}\}$ и имеет распределение Бернулли с параметром $1/2$, т. е.

$$\mathbf{P}(I_n = 1) = 1 - \mathbf{P}(I_n = 0) = 1/2.$$

Класс протоколов $\mathcal{A}$ определяется через C , z_0 , h , ε_h , $\{J_n\}$ и $\{I_n\}$ следующим образом. Вероятности передачи p_n и числа S_n обновляются рекуррентно: зная S_n и $\mathbf{I}(J_n = i_0)$, полагаем

$$p_n = \begin{cases} \beta(S_n)/S_n, & \text{если } I_n = 0, \\ 1/S_n, & \text{если } I_n = 1, \end{cases}$$

затем с параметром $\alpha(S_n)$ разыгрываем бернуллиевскую случайную величину θ_n , и полагаем

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n + C, & \text{если } J_n \neq i_0, \\ S_n + Ch(S_n), & \text{если } J_n = i_0 \text{ и } I_n + \theta_n = 0, \\ S_n, & \text{если } J_n = i_0 \text{ и } I_n + \theta_n = 1, \\ \max(S_n - Ch(S_n), 1), & \text{если } J_n = i_0 \text{ и } I_n + \theta_n = 2. \end{cases}$$

Обозначим такой протокол $A(C, z_0, h, \varepsilon_h) \in \mathcal{A}$. Заметим, что последовательность $\{(S_n, N_n)\}$ образует однородную по времени цепь Маркова. Далее, для $X_n = (S_n, N_n)$ определим норму $|X_n| = |S_n| + |N_n|$. Будем предполагать, что $X_0 = x = (s, m)$ — неслучайное начальное состояние. Будем использовать следующие сокращения $\mathbf{E}_x\{\cdot\} := \mathbf{E}\{\cdot \mid X_0 = x\}$ и $\mathbf{P}_x\{\cdot\} := \mathbf{P}\{\cdot \mid X_0 = x\}$.

Отметим некоторые простые свойства рассматриваемых протоколов. Для $m > i_0$ при $|x| \rightarrow \infty$, $m/s \rightarrow z \in [0, \infty]$

$$\mathbf{E}_x J_0 = \sum_{i=1}^{i_0} \mathbf{E}(J_0 | B_0 = i) \cdot \mathbf{P}_x(B_0 = i)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{i_0} i \cdot q_i \cdot \frac{C_m^i}{2} \cdot \left(\left(\frac{\beta(s)}{s} \right)^i \cdot \left(1 - \frac{\beta(s)}{s} \right)^{m-i} + \left(\frac{1}{s} \right)^i \cdot \left(1 - \frac{1}{s} \right)^{m-i} \right) \\
(4) \quad &\sim j(z, \beta(s)) = \frac{1}{2} \lambda(\beta(s) \cdot z) + \frac{1}{2} \lambda(z),
\end{aligned}$$

равномерно по всем $\beta(s) \in [0.5, 1]$, где $z^k e^{-z} = 0$ при $z \in \{0, \infty\}$, и $\lambda(z)$ — положительная функция, определенная ранее. Заметим, что $\lambda(0) = 0$ и $\lambda(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$.

Определение 1. Будем говорить, что цепь Маркова $\{X_n\}$ положительно возвратна, если существует компактное множество $K \in \mathbf{R}_+^2$ такое, что

- для любой пары начальных значений $(S_0, N_0) = (s, m)$,

$$\tau_{s,m} = \min\{n \geq 1 : (S_n, N_n) \in K\} < \infty \quad \text{п. н.}$$

- кроме того,

$$\sup_{(s,m) \in K} \mathbf{E} \tau_{s,m} < \infty.$$

Определение 2. Состояние $x_0 = (S_0, N_0)$ называется атомом цепи $\{X_n\}$, если $\mathbf{P}_x \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = x_0\} \right) = 1$ для любого $x = (s, m)$. Пусть $X_0 = x_0$ — атом цепи $\{X_n\}$. Обозначим $\tau_{x_0} = \min\{n > 0 : X_n = x_0\}$. Атом x_0 называется положительным, если $\mathbf{E} \tau_{x_0} < \infty$.

Хорошо известно (см. [1] и [2]), что если цепь Маркова $\{X_n\}$ апериодична и имеет положительный атом, то цепь эргодична в смысле сходимости в метрике полной вариации: существует вероятностная мера π такая, что для любого начального значения (s, m) распределение случайного вектора (S_n, N_n) сходится к π в метрике полной вариации, т. е.

$$d(P_n, \pi) = \sup_B |\mathbf{P}((S_n, N_n) \in B) - \pi(B)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

где супремум берется по всем борелевским множествам $B \in \mathbf{R}_+^2$.

Всюду далее мы будем предполагать апериодичность $\{X_n\}$. В частности, для этого достаточно, чтобы $h(s) \geq i_0$ и $\mathbf{P}\{\xi_1 = 0\} > 0$. Поясним вышесказанное. Выберем некоторое $i > 0$ такое, что $\mathbf{P}\{\xi_1 = i\} > 0$. Тогда с положительной вероятностью осуществимы следующие цепочки переходов: $(1, 0) \rightarrow (1 + C, i) \rightarrow \dots \rightarrow (1 + Ci_0, ii_0) \rightarrow (1, (i - 1)i_0) \rightarrow (1 + C, (i - 1)i_0) \rightarrow \dots \rightarrow (1 + C, 2i_0) \rightarrow (1, i_0) \rightarrow (1, 0)$ и $(1, 0) \rightarrow (1 + C, i) \rightarrow \dots \rightarrow (1 + Ci_0, ii_0) \rightarrow (1, (i - 1)i_0) \rightarrow (1 + C, (i - 1)i_0) \rightarrow \dots \rightarrow (1 + C, 2i_0) \rightarrow (1 + 2C, 2i_0) \rightarrow (1, i_0) \rightarrow (1, 0)$, поэтому наибольший общий делитель всевозможных моментов возвращений в состояние $(1, 0)$ равен единице, и все состояния цепи сообщающиеся. В частности, для базовой модели (т. е. при $i_0 = 1$ и $q_1 = 1$) из условия $\mathbf{E} \xi_1 < 1$ следует, что $\mathbf{P}\{\xi_1 = 0\} > 0$. Ясно, что если конечное множество положительно возвратно, то в нем можно найти положительно возвратный атом. Поэтому при доказательстве эргодичности мы будем доказывать лишь положительную возвратность в конечное множество для цепи $\{X_n\}$.

Определение 3. Мы называем цепь Маркова $\{X_n\}$ невозвратной, если существует начальное значение (s, t) такое, что $S_n + N_n \rightarrow \infty$ п. н. при $n \rightarrow \infty$.

Определение 4. Протокол A стабилен, если цепь Маркова $\{X_n\}$, определенная в A , эргодична, и нестабилен, если цепь Маркова невозвратна.

В работе доказана следующая основная теорема о стабильности рассматриваемых протоколов.

Теорема 1. Пусть $\lambda = \mathbf{E}\xi_1 < \lambda_{\max}$ и выполнены (2) и (3), тогда существует константа $C \in \mathbf{N}$, т. ч. протокол $A(C, z_0, h, \varepsilon_h)$ стабилен для любого $\lambda \in (0, \lambda_{\max})$.

Замечание 1. Из теоремы 1 следует, что стабильный протокол может быть построен и без условия существования единственной точки максимума функции $\lambda(z)$ при $z > 0$, которое предполагалось в работе [4]. Помимо этого, для построения стабильного протокола в работе [4] использовалась информация о точном количестве сообщений, переданных в текущем слоте. Однако с помощью тройной рандомизации удастся уменьшить требуемую обратную связь с прибора до двоичной функции $\mathbf{I}(J_n = i_0)$. Ниже из доказательства теоремы 1 будет видно, что при любом выборе пары чисел $0 < \lambda_- < \lambda_+ < \lambda_{\max}$, можно построить протокол с ограниченными скачками (в котором функции h и ε_h будут постоянными, зависящими от λ_- и λ_+), стабильный для любого $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$.

В теореме 1 доказываемся сходимость к предельному распределению вспомогательной цепи Маркова, описывающей динамику системы. Ясно, что оценки скорости сходимости зависят от моментных условий на входной поток. Ниже мы приводим два утверждения, доказательства которых практически следуют доказательствам аналогичных результатов из работы [4]. Поэтому мы приводить их не будем.

Предложение 1. Пусть $\lambda < \lambda_{\max}$ и при некотором $\alpha > 1$ конечен степенной момент $\mathbf{E}\xi_1^\alpha < \infty$. Тогда для всех стабильных протоколов, в которых $h(s) = o(s^{\alpha'})$, где $\alpha' = \min\{1/2, 1 - 1/\alpha\}$, справедлива следующая оценка скорости сходимости в теореме 1

$$d(P_n, \pi) \leq C_1/n^{\alpha-1},$$

где C_1 — некоторая постоянная.

Предложение 2. Пусть $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$ и $\lambda_+ < \lambda_{\max}$. Если при некотором $\mu > 0$ конечен экспоненциальный момент $\mathbf{E}e^{\mu\xi_1} < \infty$, то для стабильных протоколов с ограниченными скачками (в которых функции h и ε_h будут постоянными, зависящими от λ_- и λ_+), существует $\mu' \in (0, \mu]$ такое, что справедлива следующая оценка скорости сходимости в теореме 1

$$d(P_n, \pi) \leq C_2 e^{-\mu' n},$$

где C_2 — некоторая постоянная.

Замечание 2. Из формулировки предложения 1 видно, что при $\alpha \in (1, 2)$ появляется дополнительное ограничение на функцию h , т. е. $h(s) = o(s^{1-1/\alpha})$ при $s \rightarrow \infty$. В частности, если значение α нам не известно, то для справедливости предложения 1 в качестве $h(s)$ можно взять любую медленно меняющуюся функцию (м. м. ф.), скажем $h(s) = [(\ln s)^k]$ или $h(s) = [\exp(\sqrt{\ln s})]$.

3. ПОСТРОЕНИЕ ПРОБНОЙ ФУНКЦИИ

Далее нам понадобится пробная функция $L(x) = L(x_1, x_2)$, которую мы определим, по аналогии с построениями в работах [3] и [4], через ее линии уровня. Данные линии уровня будут зависеть от некоторых положительных постоянных k_1 и k_2 , которые будут определены в доказательстве теоремы 1. Построим $L(x_1, x_2) = c > 0$ следующим образом (см. рис. 1). Мы стартуем из точки $(0, c)$ и движемся (в положительном квадранте) по прямой с угловым коэффициентом k_1 до пересечения с лучом $z = \frac{x_2}{x_1} = z_2$, т. е. если $z \geq z_2$, то $L(x_1, x_2) = x_2 - k_1 x_1$. Затем от луча $z = z_2$ до луча $z = z_2 - \varepsilon$ рисуем гладкую кривую так, чтобы ее градиент изменялся (покомпонентно линейно в зависимости от углового коэффициента z) от $(-k_1, 1)$ до $(0, 1)$. От луча $z = z_2 - \varepsilon$ рисуем прямую параллельно оси абсцисс до пересечения с лучом $z = z_0$. От $z = z_0$ до $z = z_0 - \varepsilon$ рисуем гладкую кривую так, чтобы ее градиент изменялся (покомпонентно линейно в зависимости от углового коэффициента z) от $(0, 1)$ до $(k_2, 0)$. От луча $z = z_0 - \varepsilon$ рисуем прямую параллельно оси ординат до пересечения с лучом $z = t_1 + \varepsilon$. Затем до луча $z = t_1$ рисуем гладкую кривую так, чтобы ее градиент изменялся (покомпонентно линейно в зависимости от углового коэффициента z) от $(k_2, 0)$ до $(k_2, -1)$ и соединяем кривую с некоторой точкой $(c', 0)$ лежащей на оси абсцисс, прямой с угловым коэффициентом k_2 .

Рис.1: Линии уровня $L(x_1, x_2) = c$.

Более точно, полагая $z = \frac{x_2}{x_1}$ и

$$\nabla L(x) = \begin{pmatrix} L'_{x_1}(x) \\ L'_{x_2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(z) \\ G_2(z) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -k_1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{при } z \geq z_2, \\ \begin{pmatrix} \frac{z_2-z}{\varepsilon} k_1 - k_1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{при } z_2 \geq z \geq z_2 - \varepsilon, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{при } z_2 - \varepsilon \geq z \geq z_0, \\ \begin{pmatrix} \frac{z_0-z}{\varepsilon} \cdot k_2 \\ \frac{z-z_0}{\varepsilon} + 1 \end{pmatrix} & \text{при } z_0 \geq z \geq z_0 - \varepsilon, \\ \begin{pmatrix} k_2 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{при } z_0 - \varepsilon \geq z \geq t_1 + \varepsilon, \\ \begin{pmatrix} \frac{z-t_1}{\varepsilon} k_2 \\ \frac{z-t_1}{\varepsilon} - 1 \end{pmatrix} & \text{при } t_1 + \varepsilon \geq z \geq t_1, \\ \begin{pmatrix} k_2 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{при } z \leq t_1. \end{cases}$$

строим линии уровня с помощью следующей формулы для восстановления функции по ее начальной точке и градиенту

$$F(x_1, x_2) = F(x_1^0, x_2^0) + \int_{x_1^0}^x F'_{x_1}(u, y_1^0) du + \int_{y_1^0}^{y_1} F'_{x_2}(x_1, u) du,$$

где в качестве начальной точки берется $(0, c)$. Таким образом, все точки линии уровня $L(x) = c$ удовлетворяют интегральному уравнению

$$\int_0^{x_1} L'_{x_1}(u, c) du + \int_c^{x_2} L'_{x_2}(x_1, u) du = 0.$$

Нам потребуются вспомогательные утверждения, которые, вообще говоря, носят общий характер и относятся к виду построенных нами пробных функций. Сформулируем три вспомогательные леммы, доказательство которых аналогично доказательствам соответствующих лемм из [4] и помещено в приложение. Мы будем пользоваться следующим определением. Пусть $X_0 = x = (s, m)$, под $\Delta L(x)$ понимаем приращение $L(X_1) - L(x)$. Будем полагать, что $k_1 < z_0 - \varepsilon$. Положим $T_1 = (z_0 - \varepsilon - k_1)/(1 + z_0 - \varepsilon)$, $T_2 = \max(k_1, k_2, 1)$.

Лемма 1. Для $L(x)$, определенной выше при $s \geq 0$, $m \geq 0$ справедливо

- 1) $T_1 \cdot |x| \leq L(x) \leq T_2 \cdot |x|$,
- 2) если для некоторого $\alpha > 1$ выполнено $\mathbf{E} \xi_1^\alpha < \infty$, то найдется последовательность $h(s) \rightarrow \infty$ такая, что $\mathbf{E} |\Delta L(x)|^\alpha = o((L(x))^{\alpha-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Лемма 2. Пусть $h \in \mathcal{H}$, тогда

$$(5) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} (\mathbf{E}_x(L(X_1) - L(x)) - \nabla L(x) \cdot \mathbf{E}_x(X_1 - x)) = 0.$$

Лемма 3. Пусть выполнены (2) и (3), тогда для любого фиксированного $z \in (0, \infty)$

$$(6) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} h(s) \left((\beta(s))^k e^{\varepsilon(s)z} (1 - \alpha(s)) - \alpha(s) \right) = \infty,$$

где предел равен $-\infty$ при $z \leq z_0$ и $+\infty$ при $z > z_0$.

Замечание 3. Первый пункт леммы 1 является общим фактом и относится только к виду функции $L(x)$. Второй пункт леммы 1 является простым следствием первого пункта, определений $\Delta L(x)$ и класса протоколов $\mathcal{A}$.

Лемма 2 справедлива не только для цепи Маркова, ассоциированной с протоколом из класса $\mathcal{A}$, но и для более широкого класса цепей Маркова, определенных в положительном квадранте. В качестве X_n достаточно взять цепь Маркова такую, что выражение $L(X_1) - L(x) - \nabla L(x) \cdot (X_1 - x)$ будет равномерно интегрируемо и будет сходиться к нулю по вероятности при $|x| \rightarrow \infty$.

4. СТАБИЛЬНОСТЬ

Доказательство теоремы 1.

Напомним, что $X_n = (S_n, N_n)$ — цепь Маркова, принимающая значения в положительном квадранте и при $s + m \rightarrow \infty$, $m/s \rightarrow z$ для $s > i_0 \cdot Ch(s)$,

$$j(s, m) := \mathbf{E}(J_n | X_n = (s, m)) \sim j(z, \beta(s)) = \frac{1}{2} \lambda(\beta(s) \cdot z) + \frac{1}{2} \lambda(z),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(J_n = i_0 | X_n = (s, m)) &= \mathbf{P}(J_n = i_0 | B_n = i_0) \cdot \mathbf{P}(B_n = i_0 | X_n = (s, m)) \\ &= \frac{(q_{i_0})^{i_0} C_m^{i_0}}{2} \left(\left(\frac{\beta(s)}{s} \right)^{i_0} \left(1 - \frac{\beta(s)}{s} \right)^{m-i_0} + \left(\frac{1}{s} \right)^{i_0} \left(1 - \frac{1}{s} \right)^{m-i_0} \right) \\ &\sim \frac{(q_{i_0})^{i_0}}{2i_0!} ((\beta(s)z)^{i_0} e^{-\beta(s) \cdot z} + z^{i_0} e^{-z}) := j^*(z, \beta(s)), \end{aligned}$$

где $j^*(0, \beta(s)) = j^*(\infty, \beta(s)) = 0$ и $j^*(z, \beta(s)) \sim j^*(z, 1)$ при $s \rightarrow \infty$. Ясно, что

$$\max_{z \in [0, \infty]} j^*(z, \beta(s)) \leq \max_{z \in [0, \infty]} j^*(z, 1) = j^*(i_0, 1) \leq \frac{(i_0)^{i_0}}{i_0!} e^{-i_0} := \kappa_{i_0} < 1.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} a(s, m) &:= \mathbf{E}(N_{n+1} - N_n | S_n = s, N_n = m) \sim a(z, \beta(s)) = \lambda - j(z, \beta(s)), \\ b(s, m) &:= \mathbf{E}(S_{n+1} - S_n | S_n = s, N_n = m) \sim b(z, h(s), \beta(s)) \\ &= C(1 - j^*(z, \beta(s))) + Ch(s) \left(\frac{(q_k)^k (\beta(s)z)^k}{2 k!} e^{-\beta(s)z} (1 - \alpha(s)) - \frac{(q_k)^k z^k}{2 k!} e^{-z} \alpha(s) \right) \\ &= C(1 - j^*(z, \beta(s))) + Ch(s) \frac{(q_k)^k}{2k!} z^k e^{-z} \left((\beta(s))^k e^{\varepsilon(s)z} (1 - \alpha(s)) - \alpha(s) \right), \end{aligned}$$

равномерно по всем $\beta(s) \in [0.5, 1]$.

Заметим, что $a(z, \beta(s)) \sim \lambda - p(z)e^{-z} = \lambda - j(z, 1) = a^*(z)$ при $s \rightarrow \infty$. Обозначим через t_1^* , t_2^* корни уравнения $b(z, h(s), \beta(s)) = 0$, через z_1^* , z_2^* ближайшие слева и справа к z_0 корни уравнения $a(z, \beta(s)) = 0$ и через z_1^{**} , z_2^{**} ближайшие слева и справа корни уравнения $a^*(z) = 0$. В силу леммы 3 при увеличении s корни t_1^* и t_2^* сходятся сверху, соответственно, к нулю и z_0 . Так как при увеличении s корни z_1^* и z_2^* сходятся к z_1^{**} и z_2^{**} , то при достаточно больших s корни z_1^* и z_2^* будут, соответственно, больше чем $z_1 = z_1^{**} - \varepsilon$ и $z_2 = z_2^{**} - \varepsilon$.

Для стабильности протокола достаточно показать, что найдутся пробная функция $L(x)$ и постоянная K такие, что

- (1) $\mathbf{E}_x(L(X_1) - L(x)) < \infty$, для всех x , таких что $L(x) \leq K$.
- (2) $\mathbf{E}_x(L(X_1) - L(x)) < -\delta < 0$, для всех x , таких что $L(x) > K$.

Будем строить линии уровня тестовой функции $L(x)$ по вышеуказанному правилу (см. рис. 1). Выберем $t_1 < \frac{\lambda}{4C}$ и ε так, чтобы

$$t_1 + \varepsilon < z_{\min} - \varepsilon < z_1 < z_1^{**} < z_0 - \varepsilon < z_0 < z_2 - \varepsilon < z_2^{**},$$

где $z_{\min}$ — минимальный корень уравнения $a^*(z) = 0$. Пусть $z = m/s$ и

$$k(z, s) = \frac{a(z, \beta(s))}{b(z, h(s), \beta(s))},$$

тогда при достаточно малом t_1 , положительном $b(z, h(s), \beta(s))$ и $z \leq t_1$ верно, что

$$k(z, s) > \frac{a(t_1, \beta(s))}{C} > \frac{a^*(t_1)}{C} > \frac{\lambda}{2C} = k_2.$$

Аналогично при $z > z_2$ и $C > \frac{2\lambda}{(1-\kappa_{i_0}) \cdot z_0}$ верно

$$k(z, s) < \frac{\lambda}{2\lambda/z_0} = z_0/2 = k_1,$$

т. к. при достаточно больших s и $z > z_0$ второе слагаемое в определении функции $b(z, h(s), \beta(s))$ больше нуля, следовательно, $b(z, h(s), \beta(s)) > C(1 - j^*(z, \beta(s))) > C(1 - \kappa_{i_0}) > 2\lambda/z_0$.

Из леммы 1 и определения $X_n = (S_n, N_n)$ для любого конечного K получаем справедливость (1). Для доказательства (2) достаточно показать, что

$$\limsup_{s+m \rightarrow \infty} \mathbf{E}_x(L(X_1) - L(x)) < 0.$$

Действительно, в силу леммы 2 достаточно показать, что

$$\begin{aligned} \limsup_{s+m \rightarrow \infty} \nabla L(x) \cdot \mathbf{E}_x(X_1 - x) &= \limsup_{s+m \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} G_1(\frac{m}{s}) \\ G_2(\frac{m}{s}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b(\frac{m}{s}, h(s), \beta(s)) \\ a(\frac{m}{s}, \beta(s)) \end{pmatrix} := \\ &= \limsup_{s+m \rightarrow \infty} \delta(s, m) < -\delta < 0. \end{aligned}$$

Докажем справедливость последнего. Пусть $m/s \rightarrow \infty$, тогда

$$\delta(s, m) \rightarrow \begin{pmatrix} -k_1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda - k_1 \cdot C < -\lambda\kappa_{i_0}/(1 - \kappa_{i_0}) < 0.$$

Пусть теперь $m/s \rightarrow z \in [0, \infty)$, тогда $s \rightarrow \infty$ и, начиная с некоторого s_0 , для всех $s \geq s_0$ справедливо

$$t_1^* < t_1 < t_1 + \varepsilon < z_{\min} - \varepsilon < z_1 < z_1^* < z_0 - \varepsilon < z_0 < t_2^* < z_2 - \varepsilon < z_2 < z_2^*.$$

По построению $L(x)$ ясно, что для $z > z_2$ при достаточно больших s и m выполнено $\delta(s, m) < -\delta < 0$. То же самое верно и для $z \leq z_2$, т. к. в этом случае, начиная с некоторого большого s_0 , для всех $s \geq s_0$ справедливо, что G_1 и b принимают разные знаки так же как G_2 и a , а т. к. они непрерывны и одновременно не обращаются в ноль, получаем требуемое.

Доказательство теоремы 1 завершено.

Чтобы убедиться в справедливости замечания 1, нужно вместо $h(s)$ выбрать достаточно большую постоянную $D(\lambda_-, \lambda_+)$, а вместо $\varepsilon_h(s)$ выбрать достаточно малое значение $\varepsilon_D(\lambda_-, \lambda_+)$ такие, что все проделанные в доказательстве теоремы 1 выкладки останутся справедливыми для всех λ из отрезка $[\lambda_-, \lambda_+]$.

Авторы выражают благодарность А.П. Ковалевскому за полезные обсуждения и замечания.

5. ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1.

1) Так как $L(0, 0) = 0$, то полагая $(x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$, получаем

$$L(x) = \int_0^{x_1} L'_{x_1}(u, 0) du + \int_0^{x_2} L'_{x_2}(x_1, u) du \leq \int_0^{x_1} T_2 du + \int_0^{x_2} T_2 du = T_2 \cdot (x_1 + x_2).$$

Рассмотрим линию уровня $L(x) = c$, из построения можно заметить, что каждая точка данной линии по координатам меньше точки пересечения прямых $x_2 = k_1 x_1 + c$ и $x_2 = (z_0 - \varepsilon)x_1$, т. е. точки $\left(\frac{c}{z_0 - \varepsilon - k_1}, \frac{c(z_0 - \varepsilon)}{z_0 - \varepsilon - k_1}\right)$.

Следовательно, $c/T_1 = L(x)/T_1 \geq x_1 + x_2$.

2) В силу определения $\nabla L(x)$, используя формулу конечных приращений, получаем следующую оценку $|\Delta L(x)| \leq T_2 \cdot (Ch(s) + \xi_1 + i_0)$. Следовательно, при $\alpha \geq 2$ подойдут все последовательности $h(s) = o(\sqrt{s})$. Для $\alpha < 2$ подойдут $h(s) = o(s^{1-1/\alpha})$ при $s \rightarrow \infty$. В частности, если значение $\alpha < 2$ нам не известно, то в качестве $h(s)$ можно взять лубую м. м. ф., например $h(s) = [\exp(\sqrt{\ln s})]$.

Доказательство леммы 1 завершено.

Напомним следующее определение: последовательность $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ случайных величин называется *равномерно интегрируемой* (РИ), если

$$\sup_n \mathbf{E}(|X_n|; |X_n| \geq N) \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Известно (см. [6], теорема 6.1.7, стр. 137), что если $X_n \rightarrow X$ по вероятности и последовательность $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ — РИ, то существует $\mathbf{E}|X|$ и $\mathbf{E}|X_n - X| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство леммы 2.

Положим $\eta = \mathbf{I}(I_n = 0, \theta_n = 0) - \mathbf{I}(I_n = 1, \theta_n = 1)$ и $\zeta = \mathbf{I}(J_0 = i_0)$. Тогда

$$(7) \quad X_1 - X_0 = \begin{pmatrix} C \cdot (1 + \zeta \cdot (\eta \cdot h(s) - 1)) \\ \xi - J_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \zeta(s) \\ \hat{\xi} \end{pmatrix},$$

где $|\zeta(s)| \leq_{\text{п. н.}} C \cdot h(s)$, $|\hat{\xi}| \leq_{\text{п. н.}} \xi + i_0$.

По формуле конечных приращений для некоторого случайного $\theta = \theta(x, X_1) \in (0, 1)$ имеем

$$L(X_1) - L(x) = \nabla L(x + \theta \cdot (X_1 - x)) \cdot (X_1 - x).$$

Пусть $z_x = m/s$ и $z_{X_\theta} = (m + \theta \cdot \hat{\xi}) / (s + \theta \cdot \zeta(s))$ — угловые коэффициенты точек x и $x + \theta(X_1 - x)$.

Обозначим через $\eta_1^{s,m} = (G_1(z_{X_\theta}) - G_1(z_x)) \cdot \zeta(s)$, $\eta_2^{s,m} = (G_2(z_{X_\theta}) - G_2(z_x)) \cdot \hat{\xi}$. В силу определения $\nabla L(x)$ (5) принимает следующий вид

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathbf{E}_x((\nabla L(x + \theta \cdot (X_1 - x)) - \nabla L(x)) \cdot (X_1 - x))$$

$$(8) \quad = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathbf{E}_x(\eta_1^{s,m} + \eta_2^{s,m}) = 0.$$

Выберем $s_0 > \max(i_0/z_2, 1)$ такое, что для всех $s \geq s_0$ выполнено $C \cdot h(s)/\sqrt{s} < 1/2$. Рассмотрим два семейства случайных величин

$$\{\eta_1^{s,m}\}_{s \geq s_0, m \geq 0} \quad \text{и} \quad \{\eta_2^{s,m}\}_{s \geq s_0, m \geq 0}.$$

Для доказательства (8) достаточно показать, что оба семейства РИ и что $\eta_1^{s,m} \rightarrow 0$ и $\eta_2^{s,m} \rightarrow 0$ п. н. при $|x| \rightarrow \infty$.

Пусть $z_x \geq 4 \cdot z_2$, тогда

$$z_{X_\theta} = \frac{z_x + \theta \cdot \widehat{\xi}/s}{1 + \theta \cdot \zeta(s)/s} >_{\text{п. н.}} \frac{z_x - i_0/s}{2} > z_2,$$

и в силу определения $\nabla L(x)$ получаем, что $\eta_1^{s,m} \equiv 0$, $\eta_2^{s,m} \equiv 0$ (т. к. $G_1(z_{X_\theta}) = G_1(z_x)$, $G_2(z_{X_\theta}) = G_2(z_x)$).

Пусть $z_x \leq 4 \cdot z_2 < \infty$ (в данном случае, т. к. $|x| \rightarrow \infty$ с необходимостью получаем, что $s \rightarrow \infty$), тогда в силу (7) при достаточно больших s

$$(9) \quad |z_{X_\theta} - z_x| = \left| \frac{\theta \cdot \widehat{\xi}/s - z_x \cdot \theta \cdot \zeta(s)/s}{1 + \theta \cdot \zeta(s)/s} \right| <_{\text{п. н.}} 2 \left(\frac{\xi + i_0}{s} + \frac{2 \cdot z_2}{\sqrt{s}} \right).$$

Заметим, что $|\eta_2^{s,m}| \leq_{\text{п. н.}} 2(\xi + i_0)$, т. к. $|G_2(z_{X_\theta}) - G_2(z_{X_0})| \leq 2$. Следовательно, семейство $\{\eta_2^{s,m}\}_{s \geq s_0, m \geq 0}$ — РИ, т. к. $\mathbf{E}\xi < \infty$.

Так как $\sup_{z \geq 0} \max(|G'_1(z)|, |G'_2(z)|) = 1/\varepsilon$, то в силу определения $\nabla L(x)$, пользуясь теоремой об оценке конечных приращений, получаем

$$(10) \quad |G_1(z_{X_\theta}) - G_1(z_x)| \leq \frac{k_1 + k_2}{\varepsilon} |z_{X_\theta} - z_x|, \quad |G_2(z_{X_\theta}) - G_2(z_x)| \leq \frac{2}{\varepsilon} |z_{X_\theta} - z_x|.$$

Следовательно, в силу (7), (9) и (10) при $s \rightarrow \infty$

$$|\eta_2^{s,m}| \leq_{\text{п. н.}} \frac{2}{\varepsilon} |z_{X_\theta} - z_x| \cdot (\xi + i_0) <_{\text{п. н.}} \frac{4}{\varepsilon} \left(\frac{(\xi + i_0)^2}{s} + \frac{2 \cdot z_2 \cdot (\xi + i_0)}{\sqrt{s}} \right) \rightarrow_{\text{п. н.}} 0,$$

$$|\eta_1^{s,m}| \leq_{\text{п. н.}} \frac{k_1 + k_2}{\varepsilon} |z_{X_\theta} - z_x| \cdot Ch(s) <_{\text{п. н.}} \frac{2(k_1 + k_2)}{\varepsilon} \left(\frac{\xi + i_0}{2\sqrt{s}} + \frac{2z_2 Ch(s)}{\sqrt{s}} \right) \rightarrow_{\text{п. н.}} 0.$$

Из последнего получаем, что семейство $\{\eta_1^{s,m}\}_{s \geq s_0, m \geq 0}$ — РИ, т. к. $\mathbf{E}\xi_1 < \infty$.

Доказательство леммы 2 завершено.

Доказательство леммы 3.

Так как $\beta(s) \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \infty$, то $1 - \alpha(s) \rightarrow \frac{1}{2}$ при $s \rightarrow \infty$. В силу эквивалентности $e^x \sim 1 + x$ при $x \rightarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned} h(s) \left((\beta(s))^k e^{\varepsilon(s)z} (1 - \alpha(s)) - \alpha(s) \right) &= h(s) \frac{(\beta(s))^k (e^{\varepsilon(s)z} - e^{\varepsilon(s)z_0/\beta(s)})}{1 + (\beta(s))^k e^{\varepsilon(s)z_0/\beta(s)}} \\ &\sim \frac{h(s)}{2} (1 + \varepsilon(s)z - 1 - \varepsilon(s)z_0/\beta(s)) = \frac{\varepsilon(s)h(s)}{2\beta(s)} (\beta(s)z - z_0) \\ (11) \quad &\sim \frac{\varepsilon(s)h(s)}{2} (z - z_0 - \varepsilon(s)z_0) \text{ при } s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом (6) следует из (11) и того, что $h(s) \cdot \varepsilon_h^2(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ (т. е. предел равен $-\infty$ при $z \leq z_0$ и $+\infty$ при $z > z_0$).

Доказательство леммы 3 завершено.

REFERENCES

- [1] M. Bramson, *Stability of queueing networks*, Lecture Notes in Mathematics, 1950. Berlin: Springer, 2008. Zbl 1152.60004
- [2] S. Meyn, R. L. Tweedie, *Markov Chains: Stochastic Stability*, Springer, 1993. Zbl 0925.60001
- [3] S. G. Foss, B. Hajek, A. M. Turlikov, *Doubly Randomised Protocols for a Random Multiple Access Channel with «Success-Nonsuccess» Feedback*, Problems of Information Transmission, **52:2** (2016), 60–70. MR3592234
- [4] M. Chebunin, *On ergodic algorithms in systems of multiple access with partial feedback*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 762–781. MR3553168
- [5] C. Bordenave, S. Foss, V. Shneer, *A Random Multiple Access Protocol with Spatial Interactions*, Journal of Applied Probability, **46:3** (2009), 844–865. MR2562325
- [6] A. A. Borovkov, *Probability Theory*, Universitext, 2013. MR3086572
- [7] G. Fayolle, E. Gelembé, J. Labetoulle, *Stability and optimal control of the packet switching broadcast channel*, J. of Assoc. Comput. Mach., **24** (1977), 375–386. MR0445639
- [8] G. I. Falin, *Random processes in structurally complex queueing systems*, Dissertation d.f.-m.s. - M.: MSU, 1989.
- [9] B. S. Tsybakov, V. A. Mihajlov, *Free synchronized access in a broadcast channel with a feedback*, Problems of Information Transmission, **14:4** (1978), 32–59. Zbl 0423.94013
- [10] J. L. Capetanakis, *Tree algorithms for packet broadcast channels*, IEEE Transactions on Information Theory, **25:5** (1979), 505–515. Zbl 0414.94019
- [11] B. Hajek, T. van Loon, *Decentralized dynamic control of a multiaccess broadcast channel*, IEEE Trans. Automatic Control, **27:3** (1982), 559–569. Zbl 0486.93077
- [12] V. A. Mihajlov, *Geometrical Analysis of the Stability of Markov Chains in $\mathbf{R}_+^n$ and Its Application to Throughput Evaluation of the Adaptive Random Multiple Access Algorithm*, Problems of Information Transmission, **24:1** (1988), 47–56. Zbl 0673.60072
- [13] N. Mehravari, T. Berger, *Poisson multiple-access contention with binary feedback*, IEEE Transactions on Information Theory, **30:5** (1984), 745–751. Zbl 0553.94002
- [14] B. Paris, B. Aazhang, *Near-optimum control of multiple-access collision channels*, IEEE Transactions on Wireless Communications, **40** (1992), 1298–1308. Zbl 0825.94162
- [15] A. Malkov, A. Turlikov, *Random multiple access protocols for communication systems with «success-failure» feedback*, IEEE International Workshop on Information Theory, (1995), 1–39.
- [16] B. S. Tsybakov, A. N. Beloyarov, *Random multiple access in a channel with a binary feedback «Success-Failure»*, Problems of Information Transmission, **26:3** (1990), 67–82. Zbl 0719.94010
- [17] B. S. Tsybakov, A. N. Beloyarov, *Random multiple access in a channel with a binary feedback*, Problems of Information Transmission, **26:4** (1990), 83–97. Zbl 0746.94014
- [18] A. Turlikov, S. Foss, *On ergodic algorithms in random multiple access systems with «success-failure» feedback*, Problems of Information Transmission, **46:2** (2010), 185–201. Zbl 1237.94006
- [19] S. G. Foss, *Stochastic recursive sequences and their applications in Queueing*, Dissertation d.f.-m.s. - Novosibirsk, IM SB RAS, 1992.
- [20] A. Ephremides, B. Hajek, *Information theory and communication networks: An unconsummated union*, IEEE Trans. Inform. Theory, **44:6** (1998), 2416–2434. Zbl 1125.94302

MIKHAIL GEORGIEVICH CHEBUNIN
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 4, KOPTYUGA AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA;
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 2, PIROGOVA STR.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA.
E-mail address: chebuninmikhail@gmail.com

SERGEY GEORGIEVICH FOSS
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
2, PIROGOVA STR.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA;
HERIOT-WATT UNIVERSITY,
EH14 4AS, EDINBURGH, UK;
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
4, KOPTYUGA AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA.
E-mail address: `sergueiorfoss25@gmail.com`