Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. S. Zakharov, Gelfand–Dorfman–Novikov–Poisson superalgebras and their envelopes, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1843–1855

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.131>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.89.197.203

April 26, 2023, 18:02:25

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1843–1855 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.131

УДК 512.554

MSC 17A70

СУПЕРАЛГЕБРЫ
ГЕЛЬФАНДА-ДОРФМАНА-НОВИКОВА-ПУАССОНА И ИХ
ОБЕРТЫВАЮЩИЕ

А.С. ЗАХАРОВ

ABSTRACT. We prove some result of $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -algebras for $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -superalgebras and embedding some $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -superalgebras into $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -superalgebras of vector type. Also we prove that not every $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -superalgebra can be embedded into associative supercommutative superalgebra with even derivation D and product given by $a \circ b = aD(b)$.

Keywords: Gelfand-Dorfman-Novikov-Poisson superalgebras, derivations of algebras, Jordan superalgebras.

1. ВВЕДЕНИЕ

Алгебры Гельфанда-Дорфман-Новикова появились в работах И. М. Гельфанда и И. Я. Дорфман [1], а также А. А. Балинского и С. П. Новикова [2]. В литературе они известны под именем алгебр Новикова, но ввиду того, что работа И. М. Гельфанда и И. Я. Дорфман была раньше, Е. И. Зельманов и Л. А. Бокуть предложили добавить также фамилии соответствующих авторов.

Е. И. Зельманов [3] показал, что конечномерная простая алгебра Гельфанда-Дорфман-Новикова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль является полем. В. Т. Филиппов [4] построил нетривиальные примеры бесконечномерных алгебр Гельфанда-Дорфман-Новикова над полем характеристики нуль и конечномерные алгебры над полем простой характеристики.

ZAKHAROV, A.S., GELFAND-DORFMAN-NOVIKOV-POISSON SUPERALGEBRAS AND THEIR ENVELOPES.

© 2019 ЗАХАРОВ А.С.

Поступила 24 сентября 2019 г., опубликована 5 декабря 2019 г.

Дж. М. Осборн [5, 6, 7] изучал простые алгебры Гельфанда-Дорфман-Новикова. В частности, были описаны алгебры с идемпотентом над полем простой характеристики. К. Ксу [8] развил результаты Дж. М. Осборна и построил описание простых конечномерных алгебр над алгебраически замкнутыми полями простой характеристики.

Понятие алгебр Новикова-Пуассона, которые по указанной выше причине, мы будем называть алгебрами Гельфанда-Дорфман-Новикова-Пуассона, появилось в работе К. Ксу [9] для описания простых алгебр Гельфанда-Дорфман-Новикова над полем характеристики 0. В [10] было построено описание бесконечномерных алгебр Гельфанда-Дорфман-Новикова над полем нулевой характеристики при некоторых ограничениях.

Все примеры алгебр Гельфанда-Дорфман-Новикова и Гельфанда-Дорфман-Новикова-Пуассона, полученные в указанных выше работах, получались из ассоциативных коммутативных алгебр с дифференцированием. А. С. Джумадильдаев и К. Лофволл [11] нашли базис свободной алгебры Гельфанда-Дорфман-Новикова. С помощью этой работы З. Жанг, Ю. Чен и Л. А. Бокуть [12] доказали, что любая супералгебра Гельфанда-Дорфман-Новикова вкладывается в строгую алгебру Гельфанда-Дорфман-Новикова векторного типа. Авторам в [13] было показано вложение алгебр Гельфанда-Дорфман-Новикова-Пуассона в алгебры Гельфанда-Дорфман-Новикова-Пуассона векторного типа. В [14] приведены примеры алгебр Гельфанда-Дорфман-Новикова-Пуассона не векторного типа.

В. Н. Желябин и А. С. Тихов [15] показали связь между алгебрами Гельфанда-Дорфман-Новикова-Пуассона и йордановыми супералгебрами. В работах [16, 17] изучалась эта связь. В данной работе результаты работ [13] и [17] обобщаются на случай супералгебр Гельфанда-Дорфман-Новикова-Пуассона.

Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики не 2. Алгебра A называется *супералгеброй* или, что тоже самое, *$\mathbb{Z}_2$ -градуированной алгеброй*, если $A = A_0 + A_1$ и $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ (сложение идет по модулю 2). Элементы $A_0 \cup A_1$ называются *однородными*. Функция $|\cdot| : A_0 \cup A_1 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, определенная по правилу

$$|a| = \begin{cases} 0, & \text{если } a \in A_0, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Алгеброй Грассмана называется алгебра

$$\Gamma = \langle 1, e_i \mid i \in \mathbb{N}, e_i e_j = -e_j e_i \rangle.$$

Алгебра Γ имеет базис $e_{i_1} \dots e_{i_k}$, где $i_1 < \dots < i_k$, и допускает градуировку $\Gamma_0 + \Gamma_1$, где Γ_0 — пространство, порожденное произведениями четной длины, а Γ_1 — нечетными. Пусть $A = A_0 + A_1$ — произвольная супералгебра, тогда *грассмановой оболочкой* алгебры A называется

$$\Gamma(A) = A_0 \otimes \Gamma_0 + A_1 \otimes \Gamma_1.$$

Пусть Ω — многообразие алгебр. Тогда скажем, что A — Ω -супералгебра, если $\Gamma(A)$ — Ω -алгебра. Так, $\langle A, \cdot \rangle$ — *ассоциативная суперкоммутативная супералгебра*, если для однородных элементов имеют места тождества

$$(1) \quad (a, b, c) = 0,$$

где $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$,

$$(2) \quad ab = (-1)^{|a||b|}ba.$$

Скажем, что $\langle A, \circ \rangle$ — супералгебра Гельфанда-Дорфмана-Новикова, если для однородных элементов имеют места тождества

$$(3) \quad (x \circ y) \circ z = (-1)^{|y||z|}(x \circ z) \circ y;$$

$$(4) \quad (x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) = (-1)^{|x||y|}((y \circ x) \circ z - y \circ (x \circ z)).$$

Для краткости, мы будем писать $\mathcal{GDN}$ -супералгебры.

Супералгебра $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ называется супералгеброй Гельфанда-Дорфмана-Новикова-Пуассона (или $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгеброй), если $\langle A, \cdot \rangle$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра и $\langle A, \circ \rangle$ — $\mathcal{GDN}$ -супералгебра и верны тождества

$$(5) \quad xy \circ z = x(y \circ z);$$

$$(6) \quad (-1)^{|y||z|}xz \circ y - x \circ yz = (-1)^{|x||y|+|x||z|}yz \circ x - (-1)^{|x||y|}y \circ xz.$$

Оказывается, что тождества (3) и (4) излишни для некоторых результатов, поэтому также рассматривается понятие обобщенной супералгебры Гельфанда-Дорфмана-Новикова-Пуассона или $g\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебры. Скажем, что $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — $g\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебра, если $\langle A, \cdot \rangle$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра и имеют место тождества (5) и (6).

Пример 1. Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра и D — четное дифференцирование, то есть $D(A_i) \subseteq A_i$, и для однородных элементов имеет место $D(ab) = aD(b) + D(a)b$, где $\lambda \in A_0^\#$ и $A_0^\# = A_0 + F \cdot 1$ — алгебра с присоединенной единицей. Тогда положим

$$(7) \quad a \circ b = aD(b) + \lambda ab.$$

Получим $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебру $\langle A, \cdot, \circ \rangle$, которую будем обозначать $G\mathcal{DNP}(A, D, \lambda)$ и называть $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгеброй векторного типа. Алгебру $G\mathcal{DNP}(A, D, 0)$ будем называть строгой $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгеброй векторного типа.

Пример 2. В случае, если $\langle A, \cdot \rangle$ — унитарная, то и $g\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебру $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ мы будем называть унитарной. Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — унитарная $g\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебра. Тогда положим

$$(8) \quad \partial(a) = 1 \circ a - a \circ 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \partial(ab) &= 1 \circ ab - ab(1 \circ 1) = a \circ b - ab \circ 1 + (-1)^{|a||b|}b \circ a - ab \circ 1 = \\ &= a(1 \circ b - b \circ 1) + (1 \circ a - a \circ 1)b = \partial(a)b + a\partial(b). \end{aligned}$$

Таким образом, ∂ — дифференцирование, а значит $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ является $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгеброй векторного типа.

⁰Здесь и далее по тексту будем считать, что операция $\cdot$ перед $\circ$ имеет приоритет. При этом символ $\cdot$ мы будем опускать.

Для многообразия $DerCom$ ассоциативных суперкоммутативных супералгебр с четным супердифференцированием мы можем построить $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебру. Для унитарных $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебр можно построить ассоциативную суперкоммутативную супералгебру с четным дифференцированием, в которую она вкладывается. Таким образом мы можем говорить об обертывающих в $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебр в многообразии $DerCom$.

Скажем, что супералгебра $\langle B, \cdot, D \rangle$ из многообразия $DerCom$ является *обертывающей* $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебры $\langle A, \cdot, \circ \rangle$, если существует вложение $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ в $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебру векторного типа, построенную по $\langle B, \cdot, D \rangle$. В таком случае супералгебру $\langle B, \cdot, D \rangle$ мы будем называть *специальной*. Если супералгебра $\langle B, \cdot, D \rangle$ не вкладывается ни в какую супералгебру $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебру векторного типа, то она называется *исключительной*.

Для $\mathcal{GDN}$ -супералгебр в [12] доказано, что существует вложение в строгую $\mathcal{GDN}$ -супералгебру векторного типа. Однако, для $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебр попытка ограничиться только строгими $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебрами векторного типа не будет иметь успеха.

Предложение 1. Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — строгая $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебра векторного типа. Тогда имеет место следующее тождество

$$(9) \quad a \circ bc = ab \circ c + (-1)^{|b||c|} ac \circ b.$$

Доказательство. Так как $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — строгая $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебра векторного типа, то для некоторого четного дифференцирования имеем

$$a \circ bc = aD(bc) = abD(c) + aD(b)c = abD(c) + acD(b) = ab \circ c + (-1)^{|b||c|} ac \circ b.$$

□

Приведем пример $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебры, в которой это тождество не выполнено. Для этого достаточно рассмотреть $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебру векторного типа $\mathcal{GDN}\mathcal{P}(A, D, \lambda)$, где $\lambda \neq 0$ и для некоторых элементов x, y имеет место $\lambda xy \neq 0$. Например, возьмем супералгебру полиномов $\mathbb{F}[x]$ от одной четной переменной (нечетная часть нулевая), $\lambda = 1$, $D = 0$. Тогда

$$x \circ xx = x^3 \neq 2x^3 = xx \circ x + xx \circ x.$$

Таким образом, (9) является s -тождеством в случае, если рассматривать вложение в строгие $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебры векторного типа, и существуют исключительные $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебры. Поэтому мы будем рассматривать вложение в $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебры векторного типа.

В конце введения мы докажем одно вспомогательное тождество.

Предложение 2. Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$. Тогда для однородных элементов имеет место тождество

$$(10) \quad abc \circ d - (-1)^{|a||b|+|a||c|+|a||d|} bcd \circ a = ab \circ cd - (-1)^{|a||b|+|a||d|+|c||d|} bd \circ ac.$$

Доказательство. Простой проверкой тождества получим

$$\begin{aligned} abc \circ d - (-1)^{|a||b|+|a||c|+|a||d|} bcd \circ a &= b(-1)^{|a||b|} (ac \circ d - (-1)^{|a||c|+|a||d|} cd \circ a) = \\ &= b(-1)^{|a||b|} (a \circ cd - (-1)^{|a||d|+|c||d|} d \circ ac) = ab \circ cd - (-1)^{|a||b|+|a||d|+|c||d|} bd \circ ac. \end{aligned}$$

□

2. ВЛОЖЕНИЕ $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -СУПЕРАЛГЕБР В $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -СУПЕРАЛГЕБРЫ ВЕКТОРНОГО ТИПА

В данном разделе мы продолжим конструкцию локализации кольца на $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебры. Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебра. Рассмотрим произвольное мультипликативно замкнутое множество $S \subseteq A_0$. Элементы A_0 относительно операции $\cdot$ коммутируют со всеми элементами A . Рассмотрим множество пар $A \times S$ и отношение эквивалентности $\sim$ такое, что $(a, s) \sim (b, t)$ в том и только том случае, если для некоторого $r \in S$ имеет место $r(at - bs) = 0$. Фактормножество $(A \times S)/\sim$ мы обозначим $S^{-1}A$, его элементы будем называть дробями и записывать $\frac{a}{s}$. Операции продолжаются так же, как и для алгебр.

$$(11) \quad \alpha \frac{a}{s} + \beta \frac{b}{r} = \frac{\alpha ar + \beta bs}{bs}; \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{r} = \frac{ab}{sr}.$$

Не трудно заметить, что операции корректны и $\langle S^{-1}A, \cdot \rangle$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра. Обозначим через $\frac{a}{1}, \frac{1}{s}$ и 1 соответственно дроби $\frac{as}{s}, \frac{s}{s^2}$ и $\frac{s}{s}$. При этом мы, вообще говоря, не предполагаем, что $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — унитарная. Тогда преобразование $\varphi : A \rightarrow S^{-1}A$, действующее по правилу $\varphi(a) = \frac{a}{1}$, является гомоморфизмом. Если среди S нет делителей нуля, то φ — вложение. Доказательство повторяет доказательство аналогичных результатов для алгебр, так как элементы S — четные и коммутируют со всеми элементами из A .

Далее мы должны продолжить операцию $\circ$ на дроби. Положим

$$(12) \quad \lambda_{xyz} = \frac{xy \circ z + xz \circ y - x \circ yz}{xyz},$$

где $x, y, z \in S$. Так же, как и в лемме 2 [13], мы можем получить, что $\lambda_{xyz} = \lambda_{rst}$ и, в частности, использовать обозначение λ . Тогда положим

$$(13) \quad \frac{a}{s} \circ \frac{b}{t} = \lambda \frac{ab}{st} + \frac{a \circ b}{st} - \frac{ab \circ t}{st^2}.$$

Предложение 3. Умножение $\circ$ задано корректно на $S^{-1}A$.

Доказательство. Пусть $\frac{a}{s} = \frac{c}{u}$ и $\frac{b}{t} = \frac{d}{v}$. Это значит, что существуют $r, w \in S$ такие, что

$$r(au - sc) = w(bv - td) = 0.$$

Мы хотим показать, что $\frac{a}{s} \circ \frac{b}{t} = \frac{c}{u} \circ \frac{d}{v}$. То есть,

$$\lambda \frac{ab}{st} + \frac{a \circ b}{st} - \frac{ab \circ t}{st^2} = \lambda \frac{cd}{uv} + \frac{c \circ d}{uv} - \frac{cd \circ v}{uv^2}.$$

Не трудно заметить, что $\lambda \frac{ab}{st} = \lambda \frac{cd}{uv}$. Тогда достаточно показать

$$\frac{a \circ b}{st} - \frac{ab \circ t}{st^2} = \frac{c \circ d}{uv} - \frac{cd \circ v}{uv^2}.$$

Что, в свою очередь, эквивалентно

$$\frac{at \circ b - ab \circ t}{st^2} = \frac{cv \circ d - cd \circ v}{uv^2}.$$

Последнее равенство будет следовать из

$$rw^2 \left((at \circ b - ab \circ t)uv^2 - (cv \circ d - cd \circ v)st^2 \right) = 0.$$

Правую часть перепишем в виде

$$rw^2\left((at \circ b - ab \circ t)uv^2 - (ct \circ b - cb \circ t)sv^2\right) + rw^2\left((ct \circ b - cb \circ t)sv^2 - (cv \circ d - cd \circ v)st^2\right).$$

Первую скобку преобразуем следующим образом:

$$rw^2\left((at \circ b - ab \circ t)uv^2 - (ct \circ b - cb \circ t)sv^2\right) = w^2tv^2(r(au - sc) \circ b) - w^2v^2(r(au - sc))b \circ t = 0.$$

Вторую скобку преобразуем следующим образом:

$$rscw^2\left((tv^2 \circ b - bv^2 \circ t) - (t^2v \circ d - t^2d \circ v)\right).$$

По предложению 2 получим

$$\begin{aligned} rscw^2\left((tv^2 \circ b - bv^2 \circ t) - (t^2v \circ d - t^2d \circ v)\right) &= rscw^2(tv \circ vb - bv \circ tv) - rscw^2(tv \circ td - td \circ tv) = \\ &= rscw^2(tv \circ vb - tv \circ td) - rscw(w(bv - td)) \circ tv = -rsc(w^2vt \circ vb - w^2vt \circ td). \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение в скобках:

$$\begin{aligned} w^2(tv \circ vb - tv \circ td) &= w(tv \circ wvb - vb \circ twv + wvb \circ tv) - w(tv \circ wtd - td \circ twv + wtd \circ tv) = \\ &= w(tv \circ wvb - tv \circ wtd) - w(vb \circ twv - td \circ twv) + w(wvb \circ tv - wtd \circ tv). \end{aligned}$$

Заметим, что для каждой скобки имеет место следующее:

$$w(tv \circ wvb - tv \circ wtd) = wtv \circ (w(vb - td)) = 0;$$

$$w(vb \circ twv - td \circ twv) = w(vb - td) \circ twv = 0;$$

$$w(wvb \circ tv - wtd \circ tv) = w(w(vb - td) \circ tv) = 0.$$

Таким образом, предложение доказано. $\square$

Предложение 4. Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — $g\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебра и S — мультипликативно замкнутое множество. Тогда $\langle S^{-1}A, \cdot, \circ \rangle$ — также $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебра векторного типа.

Доказательство. Проверим, что $\langle S^{-1}A, \cdot, \circ \rangle$ является $g\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгеброй векторного типа. Сначала проверим тождество (5).

$$\frac{a}{s} \left(\frac{b}{r} \circ \frac{c}{t} \right) = \frac{a}{s} \left(\lambda \frac{bc}{rt} + \frac{b \circ c}{tr} - \frac{bc \circ r}{tr^2} \right) = \lambda \frac{abc}{srt} + \frac{ab \circ c}{str} - \frac{abc \circ r}{str^2} = \left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{r} \right) \circ \frac{c}{t}.$$

Тождество (6) будет иметь вид

$$(-1)^{|b||c|} \left(\frac{a}{s} \cdot \frac{c}{r} \right) \circ \frac{b}{t} - \frac{a}{s} \circ \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{r} \right) = (-1)^{|a||b|+|a||c|} \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{r} \right) \circ \frac{a}{s} - (-1)^{|a||c|} \frac{b}{t} \circ \left(\frac{a}{s} \cdot \frac{c}{r} \right).$$

По определению операций получим

$$\begin{aligned} &(-1)^{|b||c|} \left(\lambda \frac{acb}{srt} + \frac{ac \circ b}{srt} - \frac{acb \circ t}{srt^2} \right) - \left(\lambda \frac{abc}{str} + \frac{a \circ bc}{str} - \frac{abc \circ rt}{sr^2t^2} \right) - \\ &(-1)^{|a||b|+|a||c|} \left(\lambda \frac{bca}{trs} + \frac{bc \circ a}{trs} - \frac{bca \circ s}{trs^2} \right) + (-1)^{|a||c|} \left(\lambda \frac{bac}{tsr} + \frac{b \circ ac}{trs} - \frac{bac \circ rs}{tr^2s^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Тогда перепишем правую часть следующим образом:

$$\begin{aligned} & \lambda \left((-1)^{|b||c|} \frac{acb}{srt} - \frac{abc}{str} - (-1)^{|a||b|+|a||c|} \frac{bca}{trs} + (-1)^{|a||c|} \frac{bac}{tsr} \right) + \\ & (-1)^{|b||c|} \frac{ac \circ b}{srt} - \frac{a \circ bc}{srt} - (-1)^{|a||b|+|a||c|} \frac{bc \circ a}{trs} + (-1)^{|a||c|} \frac{b \circ ac}{trs} - \\ & \left((-1)^{|b||c|} \frac{acb \circ t}{srt^2} - \frac{abc \circ rt}{sr^2t^2} - (-1)^{|a||b|+|a||c|} \frac{bca \circ s}{trs^2} + (-1)^{|a||b|} \frac{bac \circ rs}{tr^2s^2} \right). \end{aligned}$$

Отдельно рассмотрим каждую скобку. Первая будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \lambda \left((-1)^{|b||c|} \frac{acb}{srt} - \frac{abc}{str} - (-1)^{|a||b|+|a||c|} \frac{bca}{trs} + (-1)^{|a||c|} \frac{bac}{tsr} \right) = \\ & \lambda \left(\frac{abc}{str} - \frac{abc}{str} - \frac{abc}{str} + \frac{abc}{str} \right) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично, из второй получим

$$\begin{aligned} & (-1)^{|b||c|} \frac{ac \circ b}{srt} - \frac{a \circ bc}{srt} - (-1)^{|a||b|+|a||c|} \frac{bc \circ a}{trs} + (-1)^{|a||c|} \frac{b \circ ac}{trs} = \\ & \frac{(-1)^{|b||c|} ac \circ b - a \circ bc - (-1)^{|a||b|+|a||c|} bc \circ a + (-1)^{|a||c|} b \circ ac}{trs} = 0. \end{aligned}$$

И, наконец, для третьей скобки

$$\begin{aligned} & (-1)^{|b||c|} \frac{acb \circ t}{srt^2} - \frac{abc \circ rt}{sr^2t^2} - (-1)^{|a||b|+|a||c|} \frac{bca \circ s}{trs^2} + (-1)^{|a||b|} \frac{bac \circ rs}{tr^2s^2} = \\ & \frac{(-1)^{|b||c|} sracb \circ t - sabc \circ rt - (-1)^{|a||b|+|a||c|} trbca \circ s + (-1)^{|a||b|} tbac \circ rs}{t^2r^2s^2} = \\ & \frac{abc(sr \circ t - s \circ rt - tr \circ s + t \circ rs)}{t^2r^2s^2} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\langle S^{-1}A, \cdot, \circ \rangle$ — $g\mathcal{GD}\mathcal{NP}$ -супералгебра. Так как элемент 1 будет единицей $\langle S^{-1}A, \cdot, \circ \rangle$, то $\langle S^{-1}A, \cdot, \circ \rangle$ — $\mathcal{GD}\mathcal{NP}$ -супералгебра векторного типа и предложение доказано. $\square$

Предложение 5. Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — $g\mathcal{GD}\mathcal{NP}$ -супералгебра и S — мультипликативно замкнутое множество. Тогда отображение $\varphi : A \rightarrow S^{-1}A$, определенное правилом $\varphi(a) = \frac{a}{1}$, является гомоморфизмом $g\mathcal{GD}\mathcal{NP}$ -супералгебр.

Доказательство. Очевидно, что φ — гомоморфизм ассоциативных суперкоммутативных супералгебр. Осталось проверить выполнение тождества

$$\frac{a}{1} \circ \frac{b}{1} = \frac{a \circ b}{1}.$$

Тогда положим $\lambda = \lambda_{sss}$, а также $\frac{a}{1} = \frac{sa}{s}$, $\frac{b}{1} = \frac{sb}{s}$ и $\frac{a \circ b}{1} = \frac{s(a \circ b)}{s}$. Получим

$$\frac{(2s^2 \circ s - s \circ s^2)sasb}{s^5} + \frac{sa \circ sb}{s^2} + \frac{sasb \circ s}{s^3} = \frac{sa \circ b}{s}.$$

Приведем к общему знаменателю и получим

$$\frac{s^3a(2sb \circ s - b \circ s^2 + s \circ sb + sb \circ s - s^2 \circ b)}{s^5} =$$

$$\frac{s^3 a(sb \circ s - b \circ s^2 + s \circ sb - s^2 \circ b)}{s^5} = 0.$$

Предложение доказано. $\square$

Теорема 1. Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — $g\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебра и x не делитель нуля в $\langle A, \cdot \rangle$. Тогда $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ вложима в $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебру векторного типа и, в частности, сама является $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгеброй.

Доказательство. Пусть $s = s_0 + s_1$, где $s_i \in A_i$. Покажем, что s_0 также не делитель нуля (левый или правый). Пусть это не так и для некоторого $a \in A$ имеет место $as_0 = 0$ или $s_0a = 0$. Пусть $as_0 = 0$, тогда

$$(as_1)(s_0 + s_1) = as_1s_0 + as_1^2 = as_0s_1 = 0.$$

Так как s — не делитель нуля, то $as_1 = 0$, но тогда

$$a(s_0 + s_1) = 0.$$

Получаем противоречие. Аналогично, не может быть выполнено и $s_0a = 0$. Таким образом, s_0 — не делитель нуля и положим $S = \{s_0^i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Тогда S — мультипликативно замкнутое множество четных элементов без делителей нуля. А значит, существует вложение $\varphi : A \rightarrow S^{-1}A$, где $\langle S^{-1}A, \cdot, \circ \rangle$ — $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебра векторного типа. В частности, отсюда следует и что $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебра. $\square$

3. СУПЕРАЛГЕБРЫ ЙОРДАНОВЫХ СКОБОК, ПОСТРОЕННЫЕ ПО $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -СУПЕРАЛГЕБРАМ

В работе [15] указана конструкция, которая позволяла по унитарным $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -алгебрам (которые, как уже было сказано, являются $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -алгебрами векторного типа) строить супералгебры йордановых скобок. В [16] и [17] эта конструкция обобщена и для $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -алгебр. Мы рассмотрим аналогичную конструкцию для супералгебр.

Скажем, что $J = J_0 + J_1$ — йорданова супералгебра, если в $\Gamma(J)$ имеют место тождества

$$xy = yx, \quad (x^2, y, x) = 0.$$

Пример 3. Пусть $\langle A = A_0 + A_1, \cdot \rangle$ — супералгебра. Тогда положим новое умножение

$$a \odot b = \frac{1}{2} \left(ab + (-1)^{|a||b|} ba \right).$$

Тогда $\langle A, \odot \rangle$ — супералгебра, которую будем обозначать $A^{(+)}_s$. Если A — ассоциативная, то $A^{(+)}_s$ — йорданова. Йорданова супералгебра называется специальной, если она вкладывается в некоторую йорданову супералгебру $A^{(+)}_s$, где A — ассоциативная супералгебра. В случае, если вложения не существует ни для какой алгебры A , то J — исключительная.

Пример 4. Пусть $\langle A = A_0 + A_1, \cdot \rangle$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра и $\{, \}$ — суперкососимметрическая билинейная форма, которую мы будем называть скобка. Тогда рассмотрим $J = A + A\xi$, где $A\xi$ — изоморфная копия A . Тогда положим новое умножение следующим образом:

$$(14) \quad a \bullet b = ab, \quad a \bullet b\xi = ab\xi, \quad a\xi \bullet b = (-1)^{|b|} ab\xi, \quad a\xi \bullet b\xi = (-1)^{|b|} \{a, b\}.$$

Градуировку определим так, что $J_0 = A_0 + A_1\xi$, $J_1 = A_1 + A_0\xi$. Обозначим супералгебру $\langle J, \bullet \rangle$ через $J(A, \{, \})$ и будем называть ее Дублем Кантора. Если $J(A, \{, \})$ — йорданова супералгебра, то скобка $\{, \}$ называется йордановой.

Пример 5. Пусть $\langle A = A_0 + A_1, \cdot \rangle$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра с четным дифференцированием D . Определим скобку

$$\{a, b\} = D(a)b - aD(b).$$

Тогда полученная скобка — йорданова, а полученная йорданова супералгебра, которую будем обозначать $J(A, D)$, называется йордановой супералгеброй векторного типа. В [18] доказано, что $J(A, D)$ — специальные.

Для $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебры $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ определим скобку

$$(15) \quad \{a, b\} = a \circ b - (-1)^{|a||b|} b \circ a.$$

Покажем, что скобка йорданова и полученная йорданова супералгебра, которую мы обозначим $J(A)$, специальна. Для этого мы построим $(-1, 1)$ супералгебру $B(A)$ такую, что искомым дублем Кантора будет иметь вид $B(A)^{(+)*}$. Для начала напомним, что $\langle B, * \rangle$ — $(-1, 1)$ -супералгебра, если в $\Gamma(B)$ выполнены следующие тождества

$$(x, y, y)_* = 0; (x, y, z)_* + (y, z, x)_* + (z, x, y)_* = 0,$$

где $(x, y, z) = (x * y) * z - x * (y * z)$. После линеаризации в $\langle B, * \rangle$ для однородных элементов должны быть выполнены тождества

$$(16) \quad (x, y, z)_* + (-1)^{|y||z|} (x, z, y)_* = 0;$$

$$(17) \quad (x, y, z)_* + (-1)^{|x||y|+|x||z|} (y, z, x)_* + (-1)^{|x||z|+|y||z|} (z, x, y)_* = 0.$$

Пример 6. Пусть $\langle A = A_0 + A_1, \cdot \rangle$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра с четным дифференцированием D . Рассмотрим $B = A + A\xi$, где $A\xi$ изоморфная копия A , $\gamma \in A_0$, и определим новое умножение

$$(18) \quad \begin{aligned} a * b &= ab, & a * b\xi &= (-1)^{|b|} a\xi * b = ab\xi, \\ a\xi * b\xi &= (-1)^{|b|} (\gamma ab + 2D(a)b + aD(b)). \end{aligned}$$

Получим $(-1, 1)$ -супералгебру, которую мы будем называть скрученной $(-1, 1)$ -супералгеброй векторного типа и обозначать $B(A, D, \gamma)$.

Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебра. Рассмотрим $B = A + A\xi$ и определим умножение

$$(19) \quad \begin{aligned} a * b &= ab, & a * b\xi &= (-1)^{|b|} a\xi * b = ab\xi, \\ a\xi * b\xi &= (-1)^{|b|} (-2a \circ b - 4(-1)^{|a||b|} b \circ a). \end{aligned}$$

Градуировка определена следующим образом: $B_0 = A_0 + A_1\xi$, $B_1 = A_1 + A_0\xi$. Супералгебру $\langle B, * \rangle$ обозначим $B(A)$.

Предложение 6. Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — $\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебра. Тогда $B(A)$ — $(-1, 1)$ -супералгебра.

Доказательство. Мы должны проверить тождества. Не трудно заметить, что

$$(A, A, A) = (A\xi, A, A) = (A, A\xi, A) = (A, A, A\xi) = 0.$$

Тогда тождества достаточно проверять только для тех наборов однородных элементов, где по крайней мере два элемента из $A\xi$. Сначала рассмотрим тождество (16). Для элементов $a\xi, b\xi, c$ получим

$$\begin{aligned} & (a\xi * b\xi) * c - a\xi * (b\xi * c) + (-1)^{|b\xi||c|}((a\xi * c) * b\xi - a\xi * (c * b\xi)) = \\ & -2(-1)^{|b|+|b||c|}ac \circ b - 4(-1)^{|a||b|+|b|+|c||a|}bc \circ a + \\ & 2(-1)^{|c|+|b|+|c|}a \circ bc + 4(-1)^{|c|+|b|+|c|+|a||b|+|a||c|}bc \circ a - \\ & 2(-1)^{|c|+|b|+|b||c|+|c|}ac \circ b - 4(-1)^{|c|+|b|+|b||c|+|c|+|b||a|+|b||c|}b \circ ac + \\ & 2(-1)^{|b||c|+|c|+|c|+|b|}a \circ cb + 4(-1)^{|b||c|+|c|+|c|+|b|+|a||c|+|a||b|}cb \circ a = \\ & -4(-1)^{|b|}\left((-1)^{|b||c|}ac \circ b - a \circ bc - (-1)^{|a||b|+|a||c|}bc \circ a + (-1)^{|a||b|}b \circ ac\right) = 0. \end{aligned}$$

Для $a\xi, b, c\xi$ аналогично. Для этого достаточно заметить, что b и c входят симметрично. Для элементов $a, b\xi, c\xi$ получим

$$\begin{aligned} & (a * b\xi) * c\xi - a * (b\xi * c\xi) + (-1)^{|b\xi||c\xi|}((a * c\xi) * b\xi - a * (c\xi * b\xi)) = \\ & -2(-1)^{|c|}ab \circ c - 4(-1)^{|c|+|a||c|+|b||c|}c \circ ab + 2(-1)^{|c|}ab \circ c + 4(-1)^{|c|+|b||c|}ac \circ b - \\ & 2(-1)^{|b||c|+|b|+|c|+1+|b|}ac \circ b - 4(-1)^{|b||c|+|b|+|c|+1+|b|+|a||b|+|b||c|}b \circ ac + \\ & 2(-1)^{|b||c|+|b|+|c|+1+|b|}ac \circ b + 4(-1)^{|b||c|+|b|+|c|+1+|b|+|b||c|}ab \circ c = \\ & -4(-1)^{|c|}\left((-1)^{|a||c|+|b||c|}c \circ ab - (-1)^{|b||c|}ac \circ b - (-1)^{|a||b|}b \circ ac + ab \circ c\right) = 0. \end{aligned}$$

Для элементов $a\xi, b\xi, c\xi$ получим

$$\begin{aligned} & (a\xi * b\xi) * c\xi - a\xi * (b\xi * c\xi) + (-1)^{|b\xi||c\xi|}((a\xi * c\xi) * b\xi - a\xi * (c\xi * b\xi)) = \\ & -2(-1)^{|b|}(a \circ b) * c\xi - 4(-1)^{|b|+|a||b|}(b \circ a) * c\xi + 2(-1)^{|c|}a\xi * (b \circ c) + 4(-1)^{|c|+|b||c|}a\xi * (c \circ b) - \\ & 2(-1)^{|b||c|+|b|+|c|+1+|c|}(a \circ c) * b\xi - 4(-1)^{|b||c|+|b|+|c|+1+|c|+|a||c|}(c \circ a) * b\xi + \\ & 2(-1)^{|b||c|+|b|+|c|+1+|b|}a\xi * (c \circ b) + 4(-1)^{|b||c|+|b|+|c|+1+|b|+|b||c|}a\xi * (b \circ c) = \\ & -2\left((-1)^{|b|+|b||c|}ac \circ b + 2(-1)^{|b|+|a||b|+|a||c|}bc \circ a - \right. \\ & \left. (-1)^{|c|+|b|+|c|}ab \circ c - 2(-1)^{|c|+|b||c|+|c|+|b|}ac \circ b + \right. \\ & \left. (-1)^{|b||c|+|b|+1+|b||c|}ab \circ c + 2(-1)^{|b|+|b||c|+1+|a||c|+|a||b|+|b||c|}bc \circ a - \right. \\ & \left. (-1)^{|b||c|+|b|+|c|+1+|b|+|c|+|b|}ac \circ b - 2(-1)^{|c|+1+|b|+|c|}ab \circ c\right)\xi = 0. \end{aligned}$$

Теперь докажем (17). Это тождество симметрично относительно циклической перестановки. Поэтому достаточно рассмотреть следующие варианты. Для элементов $a\xi, b\xi, c$ получим

$$\begin{aligned} & (a, b\xi, c\xi) + (-1)^{|a||b\xi|+|a||c\xi|}(b\xi, c\xi, a) + (-1)^{|c\xi||a|+|b\xi||c\xi|}(c\xi, a, b\xi) = \\ & (a * b\xi) * c\xi - a * (b\xi * c\xi) + \\ & (-1)^{|a||b|+|a||c|}(b\xi * c\xi) * a - (-1)^{|a||b|+|a||c|}b\xi * (c\xi * a) + \\ & (-1)^{|c||a|+|a|+|b||c|+|b|+|c|+1}(c\xi * a) * b\xi - (-1)^{|c||a|+|a|+|b||c|+|b|+|c|+1}c\xi * (a * b\xi) = \\ & -2\left((-1)^{|c|}ab \circ c + 2(-1)^{|c|+|b||c|+|a||c|}c \circ ab - (-1)^{|c|}ab \circ c - 2(-1)^{|c|+|b||c|}ac \circ b + \right. \\ & \left. (-1)^{|a||b|+|a||c|+|c|+|a||b|+|a||c|}ab \circ c + 2(-1)^{|a||b|+|a||c|+|c|+|a||b|+|a||c|+|b||c|}ac \circ b - \right. \\ & \left. (-1)^{|a||b|+|a||c|+|a|+|a||c|+|a|+|c|}b \circ ac + 2(-1)^{|a||b|+|a||c|+|a|+|a||c|+|a|+|c|+|a||b|+|b||c|}ac \circ b + \right. \\ & \left. (-1)^{|c||a|+|a|+|b||c|+|b|+|c|+1+|a|+|a||c|+|b|}ac \circ b + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2(-1)^{|c||a|+|a|+|b||c|+|b|+|c|+1+|a|+|a||c|+|b|+|a||b|+|b||c|} b \circ ac - \\
& (-1)^{|c||a|+|a|+|b||c|+|b|+|c|+1+|a|+|b|} c \circ ab + \\
& 2(-1)^{|c||a|+|a|+|b||c|+|b|+|c|+1+|a|+|b|+|a||c|+|b||c|} ab \circ c = \\
& -2(-1)^{|c|} \left(ab \circ c + 2(-1)^{|b||c|+|a||c|} c \circ ab - ab \circ c - 2(-1)^{|b||c|} ac \circ b + \right. \\
& ab \circ c + 2(-1)^{|b||c|} ac \circ b - (-1)^{|a||b|} b \circ ac - 2(-1)^{|b||c|} ac \circ b - \\
& \left. (-1)^{|b||c|} ac \circ b - 2(-1)^{|a||b|} b \circ ac + (-1)^{|c||a|+|b||c|} c \circ ab + 2ab \circ c \right) = \\
& -6(-1)^{|c|} \left(ab \circ c - (-1)^{|a||b|} b \circ ac - (-1)^{|b||c|} ac \circ b + (-1)^{|b||c|+|a||c|} c \circ ab \right) = 0.
\end{aligned}$$

Для элементов $a\xi, b\xi, c\xi$ получим

$$\begin{aligned}
& (a\xi, b\xi, c\xi) + (-1)^{|a\xi||b\xi|+|a\xi||c\xi|} (b\xi, c\xi, a\xi) + (-1)^{|a\xi||c\xi|+|b\xi||c\xi|} (c\xi, a\xi, b\xi) = \\
& (a\xi * b\xi) * c\xi - a\xi * (b\xi * c\xi) + \\
& (-1)^{|a||b|+|a||c|+|b|+|c|} (b\xi * c\xi) * a\xi - (-1)^{|a||b|+|a||c|+|b|+|c|} b\xi * (c\xi * a\xi) + \\
& (-1)^{|a||c|+|b||c|+|a|+|b|} (c\xi * a\xi) * b\xi - (-1)^{|a||c|+|b||c|+|a|+|b|} c\xi * (a\xi * b\xi) = \\
& ((-1)^{|b|} a \circ b + 2(-1)^{|b|+|a||b|} b \circ a) * c\xi - a\xi * ((-1)^{|c|} b \circ c + 2(-1)^{|c|+|b||c|} c \circ b) + \\
& (-1)^{|a||b|+|a||c|+|b|+|c|+|c|} (b \circ c) * a\xi + 2(-1)^{|a||b|+|a||c|+|b|+|c|+|c|+|b||c|} (c \circ b) * a\xi - \\
& (-1)^{|a||b|+|a||c|+|b|+|c|+|a|} b\xi * (c \circ a) - 2(-1)^{|a||b|+|a||c|+|b|+|c|+|a|+|a||c|} b\xi * (a \circ c) + \\
& (-1)^{|a||c|+|b||c|+|a|+|b|+|a|} (c \circ a) * b\xi + 2(-1)^{|a||c|+|b||c|+|a|+|b|+|a|+|a||c|} (a \circ c) * b\xi - \\
& (-1)^{|a||c|+|b||c|+|a|+|b|+|b|} c\xi * (a \circ b) + 2(-1)^{|a||c|+|b||c|+|a|+|b|+|b|+|a||b|} c\xi * (b \circ a) = \\
& \left((-1)^{|b|+|b||c|} ac \circ b + 2(-1)^{|b|+|a||b|+|a||c|} bc \circ a - \right. \\
& (-1)^{|c|+|b|+|c|} ab \circ c - 2(-1)^{|c|+|b||c|+|b|+|c|} ac \circ b + \\
& (-1)^{|a||b|+|a||c|+|b|+|a||b|+|a||c|} ab \circ c + 2(-1)^{|a||b|+|a||c|+|b|+|b||c|+|a||c|+|a||b|} ac \circ b - \\
& (-1)^{|a||b|+|a||c|+|b|+|c|+|a|+|c|+|a|} bc \circ a - 2(-1)^{|a||b|+|b|+|c|+|a|+|a|+|c|+|a||b|} ab \circ c + \\
& (-1)^{|a||c|+|b||c|+|b|+|b||c|+|a||b|} bc \circ a + 2(-1)^{|b||c|+|b|+|b||c|} ab \circ c - \\
& \left. (-1)^{|a||c|+|b||c|+|a|+|a|+|b|+|a||c|} ac \circ b - 2(-1)^{|a||c|+|b||c|+|a|+|a||b|+|a|+|b|+|b||c|} bc \circ a \right) \xi = \\
& (-1)^{|b|} \left((-1)^{|b||c|} ac \circ b + 2(-1)^{|a||b|+|a||c|} bc \circ a - \right. \\
& ab \circ c - 2(-1)^{|b||c|} ac \circ b + ab \circ c + 2(-1)^{|b||c|} ac \circ b - (-1)^{|a||b|+|a||c|} bc \circ a - 2ab \circ c + \\
& \left. (-1)^{|a||c|+|a||b|} bc \circ a + 2ab \circ c - (-1)^{|b||c|} ac \circ b - 2(-1)^{|a||c|+|a||b|} bc \circ a \right) \xi = 0.
\end{aligned}$$

Предложение доказано. $\square$

Таким образом, мы получили $(-1, 1)$ -супералгебру. Любая $(-1, 1)$ -супералгебра, в частности, является правоальтернативной. В [18] доказано, что для любой правоальтернативной супералгебры B супералгебра $B^{(+)*}$ является специальной йордановой супералгеброй. В конце концов, мы можем доказать теорему.

Теорема 2. Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — $g\mathcal{GDN}\mathcal{P}$ -супералгебра. Тогда $J(A)$ — специальная йорданова супералгебра.

Доказательство. Напомним, что в наших обозначениях $\langle B(A), * \rangle = (-1, 1)$ -супералгебра, $B(A)^{(+)}_s = \langle B(A), \odot \rangle$ — йорданова супералгебра, полученная из $\langle B(A), * \rangle$ с помощью симметризации, а $J(A) = \langle J(A), \bullet \rangle$ — Дубль Кантора. Достаточно проверить, что $B(A)^{(+)}_s = J(A)$. Очевидно, что они совпадают как векторные пространства. Покажем совпадение операций

$$a \odot b = \frac{1}{2} \left(a * b + (-1)^{|a||b|} b * a \right) = a * b = ab = a \bullet b;$$

$$a \odot b\xi = \frac{1}{2} \left(a * b\xi + (-1)^{|a||b\xi|} b\xi * a \right) = \frac{1}{2} \left(ab\xi + (-1)^{|a||b|+|a||a|} ba\xi \right) = ab\xi = a \bullet b\xi;$$

$$a\xi \odot b = \frac{1}{2} \left(a\xi * b + (-1)^{|a\xi||b|} b * a\xi \right) = \frac{1}{2} \left((-1)^{|b|} ab\xi + (-1)^{|a||b|+|b|} ba\xi \right) = (-1)^{|b|} ab\xi = a\xi \bullet b;$$

$$\begin{aligned} a\xi \odot b\xi &= \frac{1}{2} \left(a\xi * b\xi + (-1)^{|a\xi||b\xi|} b\xi * a\xi \right) = \frac{1}{2} \left(-2(-1)^{|b|} a \circ b - 4(-1)^{|a||b|+|b|} b \circ a + \right. \\ &\quad \left. (-1)^{|a||b|+|a|+|b|+1} (-2(-1)^{|a|} b \circ a - 4(-1)^{|a|+|a||b|} a \circ b) \right) = \\ &\quad (-1)^{|b|} \left(a \circ b - (-1)^{|a||b|} b \circ a \right) = (-1)^{|b|} \{a, b\} = a\xi \bullet b\xi. \end{aligned}$$

Так как $B(A)^{(+)}_s$ — специальная йорданова супералгебра, то и $J(A)$ также специальная йорданова супералгебра и теорема доказана. $\square$

Автор благодарит К. А. Байкалову, В. Н. Желябина, П. С. Колесникова за внимание к работе и полезные обсуждения.

REFERENCES

- [1] I. M. Gel'fand, I. Ya. Dorfman, *Hamiltonian operators and algebraic structures related to them*, Functional Analysis and Its Applications, **13**:4 (1979), 248–262. MR554407
- [2] A. A. Balinskii, S. P. Novikov, *Poisson brackets of hydrodynamic type, Frobenius algebras and Lie algebras*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **283**:5 (1985), 1036–1039. MR802121
- [3] E. I. Zelmanov, *A class of local translation-invariant Lie algebras*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **292**:6: (1987), 1294–1297. Zbl 0629.17002
- [4] V. T. Filippov, *A class of simple nonassociative algebras*, Mat. Zametki, **45**:1 (1989), 101–105. Zbl 0683.17002
- [5] J. M. Osborn, *Modules for Novikov algebras*, Contemp. Math., **184** (1991), 327–338.
- [6] J. M. Osborn, *Novikov algebras*, Nova J. Algebra Geom., **1**:1 (1992), 1–13. Zbl 0876.17005
- [7] J. M. Osborn, *Simple Novikov algebra with an idempotent*, Commun. Algebra, **20**:9, (1992), 2729–2753. Zbl 0772.17001
- [8] X. Xu, *On Simple Novikov Algebras and Their Irreducible Modules*, J. Algebra, **185** (1996), 905–934. MR1419729
- [9] Xu, X, *Novikov-Poisson algebra*, J. Algebra, **190**:2 (1997), 253–279.
- [10] Xu, X, *Classification of simple Novikov Algebra and their irreducible modules of characteristic 0*, J. Algebra, **246**:2 (2001), 673–707. MR1872120
- [11] A. S. Dzhumadil'daev and C. Lofwall, *Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities*, Homology, Homotopy and Applications, **4**:2 (2002), 165–190. MR1918188

- [12] Z. Zhang, Y. Chen, L.A. Bokut, *On Free Gelfand-Dorfman-Novikov Superalgebras and a PBW Type Theorem*, International Journal of Algebra and Computation, **29**:3, (2019), 481–505. MR3955819
- [13] A. S. Zakharov, *Embedding Novikov–Poisson algebras in Novikov–Poisson algebras of vector type*, Algebra Logika, **52**:3 (2013), 236–249. MR3137129
- [14] A. S. Zakharov, *Novikov–Poisson algebras in low dimension*, Sib. Elektron. Mat. Izv, **12** (2015), 381–393. MR3493736
- [15] V. N. Zhelyabin, A. S. Tikhov, *Novikov–Poisson algebras and associative commutative derivation algebras*, Algebra Logika, **47**:2 (2008), 107–117. MR2438009
- [16] A. S. Zakharov, *Novikov–Poisson algebras and superalgebras of Jordan brackets*, Commun. Algebra, **42**:5 (2014), 2285–2298. MR3169704
- [17] V. N. Zhelyabin, A. S. Zakharov, *Speciality of Jordan superalgebras related to Novikov–Poisson flgebras*, Mat. Zametki, **97**:3 (2015), 359–367; Math. Notes, **97**:3 (2015), 341–348. MR3370524
- [18] I. P. Shestakov, *Superalgebras and counterexamples*, Sibirsk. Mat. Zh. **32**:6 (1991), 187–196; Siberian Math. J., **32**:6 (1991), 1052–1060. MR1156760

ANTON STANISLAVOVICH ZAKHAROV
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
1, PIROGOVA STR.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
NOVOSIBIRSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
20, K. MARKSA AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630073, RUSSIA
E-mail address: antzakh@gmail.com