Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. I. Ivanov, I. A. Kremer, Yu. M. Laevsky, On wells modeling in filtration problems,
Sib. Èlektron. Mat. Izv., 2019, Volume 16, 1868–1884

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.133>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.239.49.27

April 26, 2023, 15:00:18

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1868–1884 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.133

УДК 519.63

MSC 65M06

О МОДЕЛИРОВАНИИ СКВАЖИН В ЗАДАЧАХ
ФИЛЬТРАЦИИ

М.И. ИВАНОВ, И.А. КРЕМЕР, Ю.М. ЛАЕВСКИЙ

ABSTRACT. The work is devoted to one of the approaches of wells modeling within numerical oil reservoir simulation. The approach can be consider as fictitious domain method at mixed finite element approximation, which is used for non-stationary filtration processes of two phase fluid in Buckley – Leverett problem. The numerical results are compared with the results for the problem with usual Neumann conditions at the wells boundaries.

Keywords: injection well, production well, filtration problem, single phase liquid, two phase liquid, flow velocity, pressure, saturation, mixed finite element method.

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена одному из подходов учета скважин при численном моделировании процессов фильтрации несжимаемой жидкости в нефтяных коллекторах [2, 7, 17, 21]. Данная проблематика имеет обширную библиографию, в которой можно выделить два основных направления. Первое направление – это публикации, в которых осуществляется непосредственный учет скважины в сеточных моделях с детальным описанием ее геометрии, когда, например, в плановой 2D задаче граница скважины задается достаточно большим количеством сеточных узлов. При этом основным инструментом являются численные схемы, использующие неструктурированные сетки в рамках метода конечных элементов или метода конечных объемов. К этому направлению можно отнести работы, посвященные технике локального уточнения на сгущающихся

IVANOV, M.I., KREMER, I.A., LAEVSKY, YU.M., ON WELLS MODELING IN FILTRATION PROBLEMS.

© 2019 ИВАНОВ М.И., КРЕМЕР И.А., ЛАЕВСКИЙ Ю.М.

Работа выполнена в рамках проекта РФФ (грант No 19-11-00048).

Поступила 13 сентября 2019 г., опубликована 6 декабря 2019 г.

сетках (см., например, [12, 13]). К этому же направлению следует отнести работы по многомасштабным методам [10] и методам суперэлементов [14]. В этих методах на поверхности скважин ставятся те или иные краевые условия и на детальной сетке вычисляются соответствующие потоки флюида. Такого сорта методы достаточно универсальны, но в силу огромной разномасштабности характерных размеров расчетной области и скважин являются весьма трудозатратными. Альтернативное направление исследований связано с моделями, в которых диаметр скважины предполагается малым по сравнению с размерами сеточной ячейки и, более того, стягивается в точку. По-видимому, первой работой в этом направлении является статья [1], в которой было предложено приближение потока из скважины с использованием известного аналитического решения в окрестности точечного источника. Чуть позже аналогичный подход был предложен Д. Писмэном [22, 23] и затем развит многими авторами (см., например, [8, 9, 28, 16]). Из недавних работ данного направления отметим [4, 18]. Отсутствие необходимости сгущать сетку делает соответствующие вычислительные алгоритмы значительно более экономичными.

В данной работе развивается подход, являющийся в некотором смысле промежуточным между подходами, описанными выше. Предполагается, что размеры скважины для 2D модели сопоставимы с размерами ячейки - скважина целиком находится внутри ячейки, но не стягивается в точку, т.е. по экономичности данный метод не уступает методам, использующим модельные аналитические решения. С другой стороны, развиваемый здесь подход не требует никаких априорных знаний о характере решения в окрестности скважин. Отметим, что ниже рассматривается задача с весьма специфическими краевыми условиями. В применении к стационарной задаче диффузии, которой описывается процесс фильтрации однофазной несжимаемой жидкости, речь идет о заданных интегральных диффузионных потоках на скважинах при постоянных, вообще говоря, неизвестных давлениях. Соответствующая математическая постановка для одной задачи электрофизики приведена в [26] (с. 370). В качестве математической модели фильтрации однофазной жидкости данная задача рассмотрена в работе [6] (с.21). В такой постановке неизвестные постоянные давления определяются заданием интегральных дебитов скважин. При этом давления определяются из системы уравнений, формируемой суперпозицией решений, аналогичных функциям Грина (см. [26]), т.е. для нахождения поля давления требуется решить набор вспомогательных задач по числу скважин. В работе [19] был предложен подход, не требующий этой весьма затратной процедуры. Математической идеей работы [19] состоит в использовании смешанной слабой формулировки задачи, в которой легко осуществляется продолжение постоянного давления внутрь скважин – своеобразный метод фиктивных областей. Также в [19] был предложен и детально изучен вычислительный алгоритм решения данной задачи, с его последующей экспериментальной проверкой [27].

Отметим, что большинство процитированных выше работ имеют дело с задачей о фильтрации однофазной жидкости. В том числе и метод из работ [19, 27] предложен и изучен, как численный метод решения стационарной задачи диффузии. В данной работе мы осуществили распространение части полученных ранее результатов на нестационарную задачу фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости. Речь идет построении и экспериментальной проверке

вычислительного алгоритма. В отличие от [19, 27] в данной работе рассматривается задача с условиями непротекания на внешней границе области, что приводит к вырожденной задаче Неймана для суммарной скорости и давления, когда на давление не ставится никаких дополнительных ограничений. В связи с этим сначала будет рассмотрена стационарная задача с некоторой регуляризацией, решение которой использует комбинацию подходов из статей [15] и [19]. Фактически, эта задача является составной частью нестационарной задачи фильтрации двухфазной жидкости, когда подвижность фаз зависит от водонасыщенности коллектора.

Основу пространственной дискретизации как стационарной задачи, так и "стационарной части" нестационарной задачи составляет смешанный метод конечных элементов [3] с аппроксимацией потоков элементами Равьяра–Томы наименьшей степени на прямоугольной сетке [24]. Интегрирование по времени осуществляется в рамках *IMPES* (Implicit for Pressure and Explicit for Saturation) метода, впервые рассмотренного в статье [25]. Нами используется подход, основанный на противопотоковом вычислении коэффициента мобильности в методе конечных объемов при аппроксимации водонасыщенности [5, 11, 20]. Метод описан в виде, приведенном в статье [15], где в частности дан довольно подробный обзор публикаций на эту тему. Отличительной особенностью предлагаемой методики кроме специфики исходной постановки является тот факт, что конечномерные операторы, входящие в формулировку сеточной задачи, ничего "не знают" о скважинах - ни об их количестве, ни о геометрических и физических параметрах. Все, что связано с наличием скважин определяется правой частью уравнений.

Статья организована следующим образом. В п.1 рассматривается стационарная задача фильтрации однофазной жидкости с условиями непротекания на внешней границе и с интегральными расходами жидкости на скважинах. Приводится смешанная формулировка для вычисления суммарной скорости потока жидкости и давления, реализация которой осуществляется смешанным методом конечных элементов с использованием рассмотренного в [15] решения регуляризованной задачи Неймана в смешанной постановке. В п.2 рассмотрена нестационарная задача фильтрации двухфазной жидкости в рамках модели Баклея–Левретта с интегральными расходами на скважинах, на которую распространяется методика, описанная в п.1, в сочетании с методом конечных объемов противопотокового вычисления водонасыщенности. В п.3 приводятся результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующие точность предложенного подхода. Кроме того, численные решения сравниваются с решениями, полученными в соответствии с методикой из работы [15], когда на "боковых" границах сеточных ячеек, содержащих скважины, задаются расходы жидкости с учетом отношения сечения скважины к сечению ячейки. Также численно изучается погрешность вычисления суммарной скорости в подобласти, не содержащей скважины. И, наконец, рассмотрено влияние параметра регуляризации вырожденной седловой задачи на число обусловленности регуляризованной матрицы, и, как следствие, на количество итераций метода сопряженных градиентов решения системы с матрицей, являющейся дополнением Шура регуляризованной матрицы.

1. ЗАДАЧА О СКВАЖИНАХ ДЛЯ ОДНОФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ

В соответствии с [19] сформулируем задачу о фильтрации однофазной несжимаемой жидкости с интегральными расходами на скважинах, но в отличие от [19] с условиями непротекания на внешней границе. Пусть G ограниченная односвязная область в R^2 с кусочно-гладкой границей Γ , $\Omega_{\alpha,m}$, $m = 1, \dots, M_\alpha$ – открытые строго внутренние подобласти области G с кусочно-гладкими границами, которые будем трактовать как нагнетательные и добывающие скважины при $\alpha = in$ (*injection*) и $\alpha = pr$ (*production*) соответственно. В дальнейшем будем предполагать, что $M_{in} > 0$ и $M_{pr} > 0$. Обозначим

$$\Omega_\alpha = \bigcup_{m=1}^{M_\alpha} \Omega_{\alpha,m}, \quad \alpha = in, pr.$$

Потребуем, чтобы

$$\bar{\Omega}_\alpha \subset G, \quad \bar{\Omega}_{\alpha,m} \cap \bar{\Omega}_{\alpha,l} = \emptyset, \quad m \neq l, \quad \alpha = in, pr, \quad \bar{\Omega}_{in} \cap \bar{\Omega}_{pr} = \emptyset.$$

Далее, пусть

$$\Omega = G \setminus (\bar{\Omega}_{in} \cup \bar{\Omega}_{pr}).$$

При этом Ω является открытым множеством с границей

$$\partial\Omega = \Gamma \cup \partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_{pr},$$

где

$$\partial\Omega_\alpha = \bigcup_{m=1}^{M_\alpha} \Gamma_{\alpha,m}, \quad \alpha = in, pr,$$

$\Gamma_{\alpha,m}$ – граница скважины $\Omega_{\alpha,m}$.

В области Ω уравнения фильтрации однофазной несжимаемой жидкости задаются законом сохранения массы:

$$(1) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

и законом Дарси:

$$(2) \quad \mathbf{v} = -k \nabla p,$$

где $\mathbf{v}$ – вектор скорости потока жидкости, p – давление, $k = k_0/\mu$, k_0 – абсолютная проницаемость пласта, μ – коэффициент динамической вязкости жидкости. Здесь для простоты предполагается, что пласт изотропный, т.е. k_0 – скалярная величина, вообще говоря, зависящая от пространственных переменных.

Для уравнений (1), (2) сформулируем краевую задачу, задав условие непротекания на внешней границе:

$$(3) \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_\Gamma = 0,$$

где $\mathbf{n}$ – заданный почти всюду на Γ (исключая точки нарушения гладкости) единичный вектор внешней нормали, и интегральные условия на скважинах, о которых говорилось во введении:

$$(4) \quad p|_{\Gamma_{\alpha,m}} = \text{const},$$

$$(5) \quad \int_{\Gamma_{\alpha,m}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\alpha,m} d\gamma = -Q_{\alpha,m}, \quad m = 1, \dots, M_\alpha, \quad \alpha = in, pr,$$

где $\mathbf{n}_{\alpha,m}$ – направленной внутрь скважин единичный вектор нормали, $Q_{in,m}$ и $Q_{pr,m}$ – объемные дебиты нагнетательных и добывающих скважин соответственно. Отметим, что $Q_{in,m} > 0$ и $Q_{pr,m} < 0$ – на нагнетательных скважинах вектор скорости направлен внутрь области, а на добывающих скважинах – внутрь скважин. Интегрирование уравнения (1) по области Ω приводит к равенству

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\gamma + \sum_{m=1}^{M_{in}} \int_{\Gamma_{in,m}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{in,m} d\gamma + \sum_{m=1}^{M_{pr}} \int_{\Gamma_{pr,m}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{pr,m} d\gamma = 0,$$

и согласно (3), (5) необходимое условие разрешимости задачи (1)–(5) принимает вид:

$$(6) \quad \sum_{m=1}^{M_{in}} Q_{in,m} + \sum_{m=1}^{M_{pr}} Q_{pr,m} = 0.$$

Наличие условия (6) и отличает рассматриваемую задачу от задачи из работы [19]. При этом давление p определяется с точностью до константы – условия (5) не позволяют однозначно определить значения давления на границах скважин.

Основу подхода в работе [19] составляет рассмотрение задачи в области G с продолжением давления внутрь скважин константой, как функции из пространства $L_2(G)$, что является тривиальной процедурой по сравнению с продолжением более гладких функций. Осложняющим моментом данного рассмотрения является требование принадлежности давления пространству $L_{2,\perp}(G)$ – обозначение, использованное в [15]:

$$L_{2,\perp}(G) = \{q \in L_2(G), \int_G q d\mathbf{x} = 0\}.$$

Здесь и далее $\mathbf{x} = (x, y)$. Положим

$$H = \{q \in L_2(G), q|_{\Omega_{\alpha,m}} = \text{const}, m = 1, \dots, M_{\alpha}, \alpha = in, pr\},$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\text{div}} = \{\mathbf{u} \in (L_2(G))^2, \nabla \cdot \mathbf{u} \in H, (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma} = 0\},$$

и пусть $H_{\perp} = H \cap L_{2,\perp}(G)$. По аналогии с задачей Дирихле из [19], сформулируем следующую задачу: найти функции $\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}_{\text{div}}$ и $p \in H_{\perp}$, удовлетворяющие интегральным тождествам

$$(7) \quad \forall \mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{H}}_{\text{div}} \quad \int_{\Omega} \frac{1}{k} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} - \int_G p \nabla \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} = 0,$$

$$(8) \quad \forall q \in H_{\perp} \quad \int_G q \nabla \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \Phi(q),$$

где функционал $\Phi : H \rightarrow R$ задан равенством

$$(9) \quad \Phi(q) = \sum_{m=1}^{M_{in}} Q_{in,m} q_{in,m} + \sum_{m=1}^{M_{pr}} Q_{pr,m} q_{pr,m},$$

$q_{\alpha,m} = q|_{\Omega_{\alpha,m}}$, $\alpha = im, pr$. Отметим, в соответствии с (6) $\Phi(\text{const}) = 0$. Уравнение (8) является следствием следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \int_G q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \sum_{m=1}^{M_{in}} \int_{\Omega_{in,m}} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \sum_{m=1}^{M_{pr}} \int_{\Omega_{pr,m}} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \\ &= \sum_{m=1}^{M_{in}} q_{in,m} \int_{\Gamma_{in,m}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{in,m}^- \, d\gamma + \sum_{m=1}^{M_{pr}} q_{pr,m} \int_{\Gamma_{pr,m}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{pr,m}^- \, d\gamma = \Phi(q), \end{aligned}$$

где $\mathbf{n}_{\alpha,m}^-$ – единичный вектор внешней по отношению к скважине $\Omega_{\alpha,m}$ нормали, т.е. $\mathbf{n}_{\alpha,m}^- = -\mathbf{n}_{\alpha,m}$. Здесь использовались уравнение (1), условия (5) и тот факт, что $q = \text{const}$ в $\Omega_{\alpha,m}$. Из последнего равенства следует, что

$$(10) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} \in H_{\perp}.$$

В статье [19] установлена эквивалентность обобщенной смешанной постановки и исходной задачи для гладких решений. Эти результаты без труда могут быть перенесены на рассматриваемый случай – задачи (1)–(5) и (7), (8) для гладких решений эквивалентны.

Для численного решения задачи (7), (8) применяется смешанный метод конечных элементов [3] с элементами Равьяра-Томы наименьшей степени [24]. В качестве области G рассмотрим прямоугольник $G = (0, L_x) \times (0, L_y)$. Множество $\bar{G}$ представляет собой объединение замкнутых ячеек

$$\tau = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \dots, N_x, \quad j = 1, \dots, N_y.$$

Сеточная функция $\mathbf{v}_h$ ищется как элемент пространства векторов $\mathbf{V}$, в котором компоненты произвольного вектора $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ имеют вид:

$$(11) \quad u_x(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y} u_{i,j-1/2} \varphi_i(x) \chi_{j-1/2}(y),$$

$$(12) \quad u_y(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y-1} u_{i-1/2,j} \chi_{i-1/2}(x) \varphi_j(y),$$

где $\varphi_l(\xi)$ – кусочно-линейные функции-крышки с носителями (ξ_{l-1}, ξ_{l+1}) , $\chi_{l-1/2}(\xi)$ – характеристические функции множеств $[\xi_{l-1}, \xi_l]$. Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{V} \subset \tilde{\mathbf{H}}_{\text{div}}.$$

Далее, для аппроксимации давления p используется пространство кусочно-постоянных функций с нулевым средним значением:

$$(13) \quad W = \{q \mid q = \sum_{\tau \in \bar{G}} q_{\tau} \chi_{\tau}\}, \quad W_{\perp} = \{q \in W; \sum_{\tau \in \bar{G}} |\tau| q_{\tau} = 0\}.$$

Здесь и далее $|\tau|$ – площадь ячейки τ . При этом $p_h \in W_{\perp}$. Отметим, что

$$W \subset H, \quad W_{\perp} \subset H_{\perp},$$

и сеточным аналогом (10) является включение

$$(14) \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_h \in W_{\perp}.$$

В результате может быть сформулирован следующий сеточный аналог задачи (7), (8): найти вектор-функцию $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}$ и скалярную функцию $p_h \in W_\perp$ такие, что имеют место интегральные тождества

$$(15) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} \quad \int_{\Omega} \frac{1}{k} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \int_G p_h \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0,$$

$$(16) \quad \forall q \in W_\perp \quad \int_G q \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \Phi(q).$$

Далее, согласно (6) система (15), (16) однозначно разрешима в $\mathbf{V} \times W_\perp$. При этом основные трудности формирования и решения сеточной системы связаны с требованиями $p_h, q \in W_\perp$. Следуя [15], мы переформулируем задачу (15), (16), не накладывая никаких ограничений на решение p_h . Будем искать вектор-функцию $\mathbf{v}_{h,\varepsilon} \in \mathbf{V}$ и скалярную функцию $p_{h,\varepsilon} \in W$ такие, что

$$(17) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} \quad \int_{\Omega} \frac{1}{k} \mathbf{v}_{h,\varepsilon} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \int_G p_{h,\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0,$$

$$(18) \quad \forall q \in W \quad \int_G q \nabla \cdot \mathbf{v}_{h,\varepsilon} \, d\mathbf{x} + \varepsilon \int_G q \, d\mathbf{x} \cdot \int_G p_{h,\varepsilon} \, d\mathbf{x} = \Phi(q),$$

где $\varepsilon > 0$. Полагая $q = \text{const}$, из (3) и (6) получим, что $p_{h,\varepsilon} \in W_\perp$, и, следовательно, $\mathbf{v}_{h,\varepsilon} = \mathbf{v}_h, p_{h,\varepsilon} = p_h$ при любом ε . В связи с этим в дальнейшем индекс ε будем опускать. Вопрос об однозначной разрешимости задачи такого типа обсуждался в статье [15].

2. ФИЛЬТРАЦИЯ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ

Математическая модель фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости (нефть-вода) задается законами сохранения массы:

$$(19) \quad \phi \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_\alpha = 0, \quad \alpha = w, o,$$

где $S_\alpha, \mathbf{v}_\alpha$ – насыщенности и скорости каждой фазы, ϕ – пористость, которая полагается постоянной, и законом фильтрации Дарси:

$$(20) \quad \mathbf{v}_\alpha = -k_0 \lambda_\alpha(S_\alpha) \nabla p_\alpha, \quad \alpha = w, o,$$

где p_α, λ_α – давления и подвижности фаз, k_0 – абсолютная проницаемость пористой среды. Предполагается, что все поровое пространство заполнено двухфазной жидкостью:

$$(21) \quad S_w + S_o = 1.$$

При этом $\lambda_\alpha(S_\alpha) = 0$ при $0 \leq S_\alpha \leq \underline{S}$. Далее, в (20) пренебрегается силой тяжести – рассматривается двумерная задача в предположении отсутствия вертикальных фильтрационных потоков. Из равенств (19) и (21) следует соленоидальность вектора суммарной скорости потока $\mathbf{v} = \mathbf{v}_w + \mathbf{v}_o$:

$$(22) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Далее, пренебрежение капиллярными силами (модель Баклея–Левретта) приводит к равенству давлений фаз: $p_w = p_o = p$, и суммирование (20) по α приводит к уравнению

$$(23) \quad \mathbf{v} = -k(S) \nabla p,$$

где $S = S_w$ и $k(S) = k_0(\lambda_w(S) + \lambda_o(1 - S))$. При этом $k(S) \geq \text{const} > 0$, что обеспечивает строгую эллиптичность системы (22), (23) для определения суммарной скорости и давления, которая замыкается гиперболическим уравнением (19) при $\alpha = w$ для насыщенности воды, где

$$(24) \quad \mathbf{v}_w = \sigma(S) \mathbf{v}, \quad \sigma(S) = \frac{\lambda_w(S)}{\lambda_w(S) + \lambda_o(1 - S)}.$$

Отметим, что $\sigma(S) = 0$ при $0 \leq S \leq \underline{S}$. Равенства (24) фактически означают, что направления суммарного потока и потоков фаз совпадают. Таким образом, водонасыщенность ищется из закона сохранения массы воды:

$$(25) \quad \phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \sigma(S) \mathbf{v} = 0.$$

Система уравнений (21)–(23) дополняется краевыми условиями (3)–(5) и начальными данными для водонасыщенности:

$$(26) \quad S(0, \mathbf{x}) = S_0(\mathbf{x}).$$

В модели Баклея–Левретта скорости и насыщенности фаз являются разрывными функциями. Уравнение (25) имеет место только в подобласти $\Omega_w(t)$, где $\underline{S} < S \leq 1$, и пусть $\Omega_o(t)$ – подобласть, в которой $0 \leq S \leq \underline{S}$. При этом

$$\Omega_w(t) \cap \Omega_o(t) = \emptyset, \quad \overline{\Omega}_w(t) \cup \overline{\Omega}_o(t) = \overline{\Omega}.$$

Далее, пусть $\Gamma_{wo}(t) = \overline{\Omega}_w(t) \cap \overline{\Omega}_o(t)$ – интерфейс между этими подобластями. Сформулируем условие на интерфейсе, играющее ту же роль, что и условие Гюгонио на ударной волне в задачах газовой динамики. Положим

$$(27) \quad [\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]_{wo}(t) = 0,$$

где $\mathbf{n}(t)$ – заданный на интерфейсе $\Gamma_{wo}(t)$ вектор нормали, направленный в подобласть $\Omega_o(t)$, $[\cdot]_{wo}$ – скачок скалярной функции на $\Gamma_{wo}(t)$. И, наконец, будем полагать, что источник воды (нагнетательные скважины) находится в подобласти $\Omega_w(t)$:

$$\Gamma_{in,m} \subset \overline{\Omega}_w(t), \quad m = 1, \dots, M_{in}.$$

Сформулируем задачу о поиске обобщенного решения в следующих классах функций: при $t \geq 0$

$$(28) \quad \mathbf{v}(t) \in \tilde{\mathbf{H}}_{\text{div}}, \quad p(t) \in H_{\perp}, \quad S(t) \in H^1(\Omega_w(t) \cup \Omega_o(t)) \cap L_{\infty}(\Omega).$$

Здесь используются пространства функций $\tilde{\mathbf{H}}_{\text{div}}$ и $H_{\perp}$, введенные при формулировке задачи (7), (8). При этом насыщенность $S(t)$ определена только в области Ω (вне скважин). Для суммарной скорости и давления обобщенная формулировка в точности повторяет задачу (7), (8) с той лишь разницей, что

здесь $k = k(S)$:

$$(29) \quad \forall \mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{H}}_{\text{div}} \quad \int_{\Omega} \frac{1}{k(S)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \int_G p \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0,$$

$$(30) \quad \forall q \in H_{\perp} \quad \int_G q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \Phi(q).$$

Отметим, что при интегрировании по частям существенно используется условие на разрыве (27).

Далее, запишем уравнение (25) в проекционном виде в пространстве H . Для произвольной функции $q \in H$ имеет место равенство:

$$(31) \quad \phi \int_{\Omega} q \frac{\partial S}{\partial t} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_w(t)} q \nabla \cdot \sigma(S) \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0.$$

Здесь использован тот факт, что $\sigma(S) = 0$ в подобласти $\Omega_o(t)$. Рассмотрим подобласти без скважин:

$$\overline{G}_w(t) \cup \overline{G}_o(t) = \overline{G}, \quad \overline{G}_w(t) \cap \overline{G}_o(t) = \Gamma_{wo}(t).$$

Отметим, что множество $G_w(t)$ содержит все нагнетательные скважины (множество Ω_{in}), а также может содержать и часть добывающих скважин $\Omega_{pr,m}$, в которых наступает заводнение. Пусть $\hat{S}$ – продолжение функции S в область G , как функции из $H^1(G_w(t) \cup G_o(t))$. При этом $\hat{S} > \underline{S}$ в $G_w(t)$. Имеем

$$\int_{G_w(t)} q \nabla \cdot \sigma(\hat{S}) \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_w(t)} q \nabla \cdot \sigma(S) \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \Psi(q, t),$$

где

$$\Psi(q, t) = \sum_{m=1}^{M_{in}} q_{in,m} \int_{\Gamma_{in,m}} \sigma(\hat{S}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{in,m}^- \, d\gamma + \sum_{m=1}^{M_{pr}} q_{pr,m} \int_{\Gamma_{pr,m}} \sigma(\hat{S}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{pr,m}^- \, d\gamma.$$

Напомним, что в (5) вектор единичной нормали $\mathbf{n}_{\alpha,m} = -\mathbf{n}_{pr,m}^-$ направлен внутрь скважины. Далее, пусть $\hat{\phi}$ – продолжение пористости в G , и $\hat{\phi} = 1$ в $\Omega_{\alpha,m}$. Вместо уравнения (31) рассмотрим уравнение для функции $\hat{S}$:

$$(32) \quad \hat{\phi} \int_G q \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} \, d\mathbf{x} + \int_{G_w(t)} q \nabla \cdot \sigma(\hat{S}) \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \Psi(q, t).$$

Аппроксимацию уравнения (32) при $q_{\alpha,m} = 0$ (вне скважин) осуществим в соответствии с работой [15]. В этом случае $\Psi(q, t) = 0$. Пусть χ_{τ} – характеристическая функция ячейки τ . В качестве приближенного решения в фиксированные моменты времени t_n рассматривается кусочно-постоянная функция $\tilde{S}$ с постоянными в ячейках τ значениями $\tilde{S}_{\tau}$:

$$(33) \quad \tilde{S} = \sum_{\tau \subset \overline{G}} \tilde{S}_{\tau} \chi_{\tau}.$$

В частности это означает, что любая ячейка τ целиком лежит либо в множестве $\overline{G}_w(t_n)$, либо в $\overline{G}_o(t_n)$, и аппроксимация $\tilde{\Gamma}_{wo}(t_n)$ интерфейса $\Gamma_{wo}(t_n)$ проходит

через границы ячеек τ . Следуя [15], приближенные значения насыщенности в ячейках $\tau \subset \bar{\Omega}$ (вне скважин) ищем по формуле

$$(34) \quad \tilde{S}_\tau^{n+1} = \tilde{S}_\tau^n + \frac{\Delta t}{\phi} \left(\tilde{I}^+(t_n) - \tilde{I}^-(t_n) \right), \quad n = 1, \dots, N_t.$$

Здесь использованы обозначения из [15]: e_k – стороны ячейки τ ; $\mathbf{n}_{e_k}$ – соответствующие единичные векторы внешней к τ нормали; e_k^- , $k = 1, \dots, K^-$ и e_k^+ , $k = 1, \dots, K^+$, $K^- + K^+ = 4$ – стороны ячейки такие, что $\mathbf{v}_{e_k^-} \cdot \mathbf{n}_{e_k^-} \geq 0$ (жидкость вытекает из ячейки) и $\mathbf{v}_{e_k^+} \cdot \mathbf{n}_{e_k^+} < 0$ (жидкость втекает в ячейку) соответственно; $\tilde{\sigma}_{e_k^-} = \sigma(\tilde{S}_\tau)$, $\tilde{\sigma}_{e_k^+} = \sigma(\tilde{S}_{\tau_k})$, где τ_k соседняя с τ ячейка с общей стороной e_k (в случае $e_k \subset \Gamma$ полагаем $\sigma(\tilde{S}_{\tau_k}) = 0$). В приведенных обозначениях

$$\tilde{I}^-(t_n) = \frac{1}{|\tau|} \sum_{k=1}^{K^-} |e_k^-| \tilde{\sigma}_{e_k^-} \mathbf{v}_{e_k^-} \cdot \mathbf{n}_{e_k^-}, \quad \tilde{I}^+(t_n) = -\frac{1}{|\tau|} \sum_{k=1}^{K^+} |e_k^+| \tilde{\sigma}_{e_k^+} \mathbf{v}_{e_k^+} \cdot \mathbf{n}_{e_k^+},$$

где $|e_k|$ – длина стороны e_k .

Далее, в ячейке $\tau_{in,l}$, содержащей нагнетательную скважину ($\Omega_{in,l} \subset \tau_{in,l}$), для всех ее сторон имеет место: $\mathbf{v}_{e_k} \cdot \mathbf{n}_{e_k} > 0$, $\tilde{\sigma}_{e_k} = 1$. Тогда в соответствии с краевыми условиями (5)

$$\tilde{I}^-(t_n) = \frac{1}{|\tau_{in,l}|} \sum_{k=1}^4 |e_k| \mathbf{v}_{e_k} \cdot \mathbf{n}_{e_k} = \frac{1}{|\tau_{in,l}|} Q_{in,l}, \quad \tilde{I}^+(t_n) = 0.$$

С другой стороны при $q = 0$ в $\bar{G} \setminus \tau_{in,l}$ и $q_{in,l} = 1$ справедливо равенство

$$\Psi(q, t_n) = \int_{\Gamma_{in,l}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{in,l}^- d\gamma = Q_{in,l},$$

и, следовательно,

$$(35) \quad \tilde{S}_{\tau_{in,l}}^{n+1} = \tilde{S}_{\tau_{in,l}}^n, \quad n = 1, \dots, N_t.$$

Рассмотрим ячейку $\tau_{pr,l}$, содержащую добывающую скважину ($\Omega_{in,l} \subset \tau_{in,l}$). Предполагается, что в этом случае либо $\sigma(\hat{S}) = 0$ ($\hat{S} \leq \underline{S}$), либо вода втекает в ячейку со всех сторон: $\mathbf{v}_{e_k} \cdot \mathbf{n}_{e_k} < 0$, $k = 1, \dots, 4$. В первом случае

$$(36) \quad \tilde{S}_{\tau_{pr,l}}^{n+1} = \tilde{S}_{\tau_{pr,l}}^n, \quad n = 1, \dots, N_t.$$

Во втором случае, в соответствии с выше приведенным способом задания величин $\tilde{\sigma}_{e_k^+} = \sigma(\tilde{S}_{\tau_k})$, где τ_k – соседние с $\tau_{pr,l}$ ячейки, получим

$$\tilde{I}^-(t_n) = 0, \quad \tilde{I}^+(t_n) = -\frac{1}{|\tau_{pr,l}|} \sum_{k=1}^4 |e_k| \sigma(\tilde{S}_{\tau_k}^n) \mathbf{v}_{e_k} \cdot \mathbf{n}_{e_k}.$$

При $q = 0$ в $\bar{G} \setminus \tau_{pr,l}$ и $q_{pr,l} = 1$ имеет место:

$$\Psi(q, t_n) = \int_{\Gamma_{pr,l}} \sigma(\tilde{S}_{\tau_{pr,l}}^n) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{pr,l}^- d\gamma = \sum_{k=1}^4 |e_k| \sigma(\tilde{S}_{\tau_{pr,l}}^n) \mathbf{v}_{e_k} \cdot \mathbf{n}_{e_k}.$$

Тогда

$$(37) \quad \tilde{S}_{\tau_{pr,l}}^{n+1} = \tilde{S}_{\tau_{pr,l}}^n + \frac{\Delta t}{|\tau_{pr,l}|} \sum_{k=1}^4 |e_k| \left(\sigma(\tilde{S}_{\tau_{pr,l}}^n) - \sigma(\tilde{S}_{\tau_k}^n) \right) \mathbf{v}_{e_k} \cdot \mathbf{n}_{e_k}.$$

Отметим, что $\mathbf{v}_{e_k} \cdot \mathbf{n}_{e_k} < 0$, а $\sigma(\tilde{S}_{pr,l}^n) \leq \sigma(\tilde{S}_{\tau_k}^n)$, и, следовательно, равенство (37) означает рост водонасыщенности в ячейке $\tau_{pr,l}$, т.е. реализуется процесс заводнения добывающей скважины.

Таким образом, равенства (34)–(37) полностью задают схему вычисления кусочно-постоянной функции $\tilde{S}^{n+1}$ по известной функции $\tilde{S}^n$ и вектор-функции $\mathbf{v} = \mathbf{v}^n$. Отметим, что в рассмотренном алгоритме $\tilde{S}^n \in W$. В свою очередь, в соответствии с (17), (18), (29) и (30) вектор-функция $\mathbf{v}^n \in \mathbf{V}$ находится из системы интегральных тождеств

$$(38) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} \quad \int_{\Omega} \frac{1}{k(\tilde{S}^n)} \mathbf{v}^n \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \int_G p^n \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0,$$

$$(39) \quad \forall q \in W \quad \int_G q \nabla \cdot \mathbf{v}^n \, d\mathbf{x} + \varepsilon \int_G q \, d\mathbf{x} - \int_G p^n \, d\mathbf{x} = \Phi(q),$$

Фактически, равенства (34)–(39) реализуют *IMPES* метод.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном пункте приводятся результаты сравнения рассмотренной выше методики с результатами работы [15]. Все эксперименты проводились при следующих значениях физических параметров, использованных в статье [15]:

$$\phi = 0.375 \text{ б/р}, \quad k_0 = 3.06 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2,$$

$$\mu_w = 1.15 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \mu_o = 9.28 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

Здесь формально рассматривается трехмерная задача в области

$$G = (0, L_x) \times (0, L_y) \times (0, L_z)$$

со значениями $L = L_x = L_y = 50 \text{ м}$, $L_z = 1 \text{ м}$. Поскольку в направлении оси z все данные постоянные, а при $z = 0$ и $z = L_z$ заданы условия непротекания, фактически задача является двумерной. Далее, рассматривается пример с одной нагнетательной и одной добывающей скважиной с центрами в точках $\{x_{in}, y_{in}\}$ и $\{x_{pr}, y_{pr}\}$ соответственно, со значениями:

$$x_{in,1} = 75/7 \text{ м}, \quad y_{in,1} = 25 \text{ м}, \quad x_{pr,1} = 275/7 \text{ м}, \quad y_{pr,1} = 25 \text{ м}.$$

В расчетах задавались следующие значения объемных дебитов скважин:

$$Q_{in,1} = -5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}, \quad Q_{pr,1} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}.$$

При этом выполняется балансное соотношение (6): $Q_{in,1} + Q_{pr,1} = 0$.

Эксперименты проводились на последовательности квадратных сеток:

$$N = N_x = N_y = 3^k \cdot 7, \quad k = 0, \dots, 4,$$

и $h = h_x = h_y = L/N$. В направлении оси z брался один шаг $h_z = 1 \text{ м}$. Данные разбиения обеспечивают попадание центров скважин в центры ячеек всей последовательности сеток. Интегрирование по времени уравнения для водонасыщенности осуществлялось с шагами, обеспечивающими устойчивость вычислений по явной схеме для каждой пространственной сетки: $\tau = 3^{-k} \cdot 14580 \text{ с}$, $k = 0, \dots, 4$. При оценке погрешности в качестве "точного" использовалось численное решение, полученное для сеточных параметров при $k = 4$ ($h \approx 0.0882 \text{ м}$, $\tau = 180 \text{ с}$). Отметим, что шаг самой детальной сетки ($k = 4$) соответствует характерному диаметру скважины в забойной зоне (от 75 мм), т.е. скважина (в

смысле 2D постановки) целиком содержится внутри ячейки такой сетки. В дальнейшем "точное" решение будем снабжать индексом "ex". Точность оценивалась по следующим величинам:

$$\delta_p = \frac{\|p - p_{ex}\|_{L_2(\Omega)}}{\|p_{ex}\|_{L_2(\Omega)}}, \quad \delta_S = \frac{\|S - S_{ex}\|_{L_2(\Omega)}}{\|S_{ex}\|_{L_2(\Omega)}},$$

где p и S – сеточные давление и водонасыщенность, вычисленные при различных значениях сеточных параметров в моменты времени $t_1 = 247860$ с (≈ 2.87 суток) и $t_2 = 1749600$ с (20.25 суток), причем время $t_1 + t_2$ соответствует началу заводнения добывающей скважины.

В работе [15] приведены результаты расчетов, иллюстрирующие отсутствие осцилляций в решении, но не обсуждается вопрос о точности вычислений. В связи с этим сначала приведем результаты по точности метода из статьи [15]. Значения относительных погрешностей δ_p и δ_S в моменты времени t_1 и t_2 даны в таблицах 1 и 2 соответственно. В соответствии с таблицами 1 и 2 для

Таблица 1

N	7	21	63	189
τ , с	14580	4860	1620	540
δ_p	$2.229 \cdot 10^{-1}$	$8.074 \cdot 10^{-2}$	$3.026 \cdot 10^{-2}$	$9.546 \cdot 10^{-3}$
δ_S	$2.101 \cdot 10^{-1}$	$1.128 \cdot 10^{-1}$	$6.122 \cdot 10^{-2}$	$2.861 \cdot 10^{-2}$

Метод из [15], $t_1 = 247860$ с

Таблица 2

N	7	21	63	189
τ , с	14580	4860	1620	540
δ_p	$4.293 \cdot 10^{-1}$	$1.570 \cdot 10^{-1}$	$5.655 \cdot 10^{-2}$	$1.537 \cdot 10^{-2}$
δ_S	$2.573 \cdot 10^{-1}$	$1.321 \cdot 10^{-1}$	$7.526 \cdot 10^{-2}$	$3.569 \cdot 10^{-2}$

Метод из [15], $t_2 = 1749600$ с

давления имеет место линейное убывание погрешности: $\delta_p = O(h)$, а для водонасыщенности $\delta_S = O(h^\alpha)$, где $\alpha = \ln 2 / \ln 3 \approx 0.63$.

Далее, в таблицах 3 и 4 приведены аналогичные результаты, полученные по изложенному в предыдущих пунктах методу. Как следует из этих таблиц,

Таблица 3

N	7	21	63	189
τ , с	14580	4860	1620	540
δ_p	$1.780 \cdot 10^{-1}$	$7.688 \cdot 10^{-2}$	$2.932 \cdot 10^{-2}$	$9.177 \cdot 10^{-3}$
δ_S	$1.674 \cdot 10^{-1}$	$1.095 \cdot 10^{-1}$	$6.309 \cdot 10^{-2}$	$3.322 \cdot 10^{-2}$

 $t_1 = 247860$ с

Таблица 4

N	7	21	63	189
τ , с	14580	4860	1620	540
δ_p	$3.303 \cdot 10^{-1}$	$1.512 \cdot 10^{-1}$	$5.540 \cdot 10^{-2}$	$1.602 \cdot 10^{-2}$
δ_S	$2.256 \cdot 10^{-1}$	$1.275 \cdot 10^{-1}$	$7.476 \cdot 10^{-2}$	$3.676 \cdot 10^{-2}$

 $t_2 = 1749600$ с

характер убывания погрешностей для давления и водонасыщенности тот же самый, что и для алгоритма из работы [15]. Далее, данные из таблиц 1–4 представлены на рисунках 1 и 2, иллюстрирующих разницу подходов учета скважин из статьи [15] и обсуждаемого в данной работе.

Рис. 1. Относительные погрешности при $t = 247860$ с

Рис. 2. Относительные погрешности при $t = 1749600$ с

В работе [19] установлена сходимость в норме $\mathbf{L}_2(\Omega')$ погрешности вектора скорости в подобласти $\Omega' \subset \Omega$, от которой скважины удалены на конечное (не зависящее от h) расстояние. При этом под сходимостью понимается уменьшение погрешности с уменьшением шага h . Обозначим

$$\delta_v(D) = \frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{ex}\|_{\mathbf{L}_2(D)}}{\|\mathbf{v}_{ex}\|_{L_2(D)}},$$

где $D \subset G$. В таблицах 5, 6 приведены значения величин $\delta_v(\Omega)$ и $\delta_v(\Omega')$ в зависимости от шагов сетки h и τ в моменты времени t_1 и t_2 . В качестве удаленной от скважин подобласти рассматривалось множество

$$\Omega' = (L'_x, L''_x) \times (0, L_y) \times (0, L_z),$$

где $L'_x = 100/7$ м, $L''_x = 250/7$ м. Из таблиц видно, что в подобласти Ω'

Таблица 5

N	7	21	63	189
$\tau, \text{с}$	14580	4860	1620	540
$\delta_v(\Omega)$	$1.978 \cdot 10^{-1}$	$1.614 \cdot 10^{-1}$	$1.366 \cdot 10^{-1}$	$1.239 \cdot 10^{-1}$
$\delta_v(\Omega')$	$1.730 \cdot 10^{-1}$	$7.476 \cdot 10^{-2}$	$3.112 \cdot 10^{-2}$	$1.202 \cdot 10^{-2}$

$t_1 = 247860 \text{ с}$

Таблица 6

N	7	21	63	189
$\tau, \text{с}$	14580	4860	1620	540
$\delta_v(\Omega)$	$2.378 \cdot 10^{-1}$	$1.841 \cdot 10^{-1}$	$1.525 \cdot 10^{-1}$	$1.324 \cdot 10^{-1}$
$\delta_v(\Omega')$	$2.129 \cdot 10^{-1}$	$1.255 \cdot 10^{-1}$	$6.943 \cdot 10^{-2}$	$3.441 \cdot 10^{-2}$

$t_2 = 1749600 \text{ с}$

имеет место убывание погрешности для вектора суммарной скорости порядка $\delta_v(\Omega') \approx O(h^{0.63})$, в то время как норма погрешности по всей области практически не убывает. Данный факт находится в полном соответствии с результатами работы [19] (теорема 5). Отметим, что аналогичные вычисления для метода из работы [15] приводят к практически таким же результатам.

В заключение данного пункта рассмотрим вопрос о решении на каждом шаге по времени системы (17), (18), которая в векторно-матричной форме представлена в виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} & B \\ B^t & -\varepsilon C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{f}} \\ \bar{g} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{D}$ – симметрическая блочнодиагональная матрица с трехдиагональными блоками, $C = \bar{e} \cdot \bar{e}^t$ – симметрическая квадратная плотная матрица. При этом $\text{rank } C = 1$, и умножение матрицы C на вектор осуществляется экономично: $C\bar{q} = [\bar{e}, \bar{q}]\bar{e}$, где $[\cdot, \cdot]$ – скалярное произведение в евклидовом пространстве. В статье [15] показано, что симметрическая матрица $S_\varepsilon = B^t \mathbf{D}^{-1} B + \varepsilon C$ положительно определена, и, следовательно, для ее обращения применим метод сопряженных градиентов. Отметим, что обусловленность матрицы S_ε , а следовательно и количество итераций, необходимое для достижения заданной точности, вообще говоря, зависит от ε . Эмпирическим путем получено, что значение, близкое к оптимальному, при котором достигается наименьшее количество итераций, можно вычислить по следующей формуле

$$\varepsilon = 0.001 \cdot \|B^t \mathbf{D}^{-1} B\|_2 / \|C\|_2,$$

где $\|\cdot\|_2$ – спектральная норма матрицы. В таблице 7 приведено количество итераций *iter* при решении системы с матрицей S_ε при оптимальным ε до достижения относительной нормы невязки значения 10^{-5} . При этом в качестве начального приближения использовался нулевой вектор. Из таблицы следует: количество итераций возрастает обратно пропорционально шагу сетки, т.е.

Таблица 7

N	7	21	63	189	567
ε	$6.72 \cdot 10^{-15}$	$1.91 \cdot 10^{-13}$	$5.24 \cdot 10^{-12}$	$1.42 \cdot 10^{-10}$	$3.84 \cdot 10^{-9}$
$iter$	38	80	230	681	1995

Число итераций в зависимости от шага сетки

пропорционально корню из числа обусловленности матрицы S_ε , что полностью согласуется с теорией метода сопряженных градиентов. Отметим, что увеличение значений ε приводит к росту числа обусловленности, и, как следствие, к увеличению числа итераций. Так, например, для сетки $N = 567$ при $\varepsilon = 10^{-2}$ количество итераций становится равным $iter = 3323$ вместо $iter = 1995$, т.е. число обусловленности увеличивается примерно в 2.8 раза.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрен новый вычислительный алгоритм решения задачи о фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости, описывающей процесс вытеснения нефти водой в нефтяном пласте при наличии нагнетательных и добывающих скважин. При этом на границах скважин заданы постоянные, но, вообще говоря, неизвестные давления и суммарные расходы жидкости. Основу подхода составляет метод фиктивных областей, сформулированный в виде слабой смешанной постановки для системы уравнений первого порядка, и в котором осуществляется продолжение всех искомых функций внутрь скважин. При этом наличие скважин определяется только правой частью сеточных уравнений, и значения искомых функций в ячейках, содержащих скважины, не задаются, а вычисляются как решения соответствующих уравнений - сеточные операторы «не знают» / о наличии скважин. При таком подходе для нагнетательных скважин автоматически сохраняется уровень водонасыщенности (35), а для добывающих скважин соответствующие уравнения приводят к решениям (36), (37).

По предложенному алгоритму проведена серия расчетов, позволившая экспериментально изучить поведение погрешности давления и водонасыщенности. Результаты расчетов практически совпали с результатами, полученными при задании на скважинах потоков жидкости (условия Неймана), когда в сеточные операторы закладывается вся информация о скважинах. Таким образом, разработан метод, трудозатраты по реализации которого не зависят от наличия скважин. Кроме того, было численно исследовано влияние параметра регуляризации расширенной седловой системы линейных алгебраических уравнений на ее обусловленность. Оказалось, что такое влияние имеет место, и тем самым можно говорить о задаче конструирования оптимального итерационного процесса.

REFERENCES

- [1] V.B. Andreev and S.A. Kryakvina, *The source function of the difference Laplace operator*, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, **12**:2 (1972), 101–114.
- [2] K. Aziz and A. Settari, *Petroleum Reservoir Simulation*, Applied Science Publishers, 1979.
- [3] F. Brezzi and M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, New York: Springer-Verlag, 1991. MR1115205

- [4] D. Cerroni, F. Laurino, and P. Zunino, *Mathematical analysis, finite element approximation and numerical solvers for the interaction of 3D reservoirs with 1D wells*, International Journal on Geomathematics, **10**:4 (2019), 1–27. MR3902095
- [5] G. Chavent, J. Jaffre, and J.E. Roberts, *Generalized cell-centered finite volume methods: application to two-phase flow in porous media*, in Computational Science for the 21st Century, Wiley, 1997, 231–241. Zbl 0919.76065
- [6] A.N. Chekalin, *Chislennoe Reshenie Zadach Filtracii v Vodoneftyanyh Plastah*, Kazan: Kazan Univ. Publ., 1982 (in Russian).
- [7] Z. Chen, G. Huan, and Y. Ma, *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2006. MR2217767
- [8] Y. Ding, and L. Jeannin, *New numerical schemes for nearwell modeling using flexible grid*, SPE Journal, **9**:1 (2004), p.109–121.
- [9] M. Dotlic, D. Vidovic, B. Pokorni, M. Pusic, and M. Dimkic, *Second-order accurate finite volume method for well-driven flows*, Journal of Computational Physics, **307**:C (2016), 460–475. MR3448219
- [10] Y. Efendiev, J. Galvis, and T.Y. Hou, *Generalized multiscale finite element methods (GMsFEM)*, Journal of computational physics, **251** (2013), 116–135. MR3109775
- [11] A. Elakkad, N. Guessous, and A. Elkhalfi, *Combined mixed hybrid finite element and finite volume method for flow in porous media*, International Journal of Mathematics and Statistics, **7**:W10 (2010), 24–31. MR2755404
- [12] R.E. Ewing, J.E. Pasciak, R.D. Lazarov, and P.S. Vassilevski, *Domain decomposition type iterative techniques for parabolic problems on locally refined grids*, SIAM J. Numer. Anal., **30**:6 (1993), 1537–1557. MR1249032
- [13] R.E. Ewing and R.D. Lazarov, *Approximation of parabolic problems on grids locally refined in time and space*, Appl. Numerical Mathematics, **14** (1994), 199–211. MR1273825
- [14] M.P. Galanin, S.A. Lazareva, and E.B. Savenkov, *Numerical investigation of the finite superelement method for the solution of the “well” problem for Laplace equation*, Preprint No.10, Keldysh Institute of Applied Mathematic RAS, 2005.
- [15] M.I. Ivanov, I.A. Kremer, and Yu.M. Laevsky, *On the upwind scheme for solving to filtration problem*, Sib. Electronic Math. Reports, **16** (2019), 757–776. Zbl 1422.76126
- [16] W. Kherijia, R. Massona, and A. Moncorge, *Nearwell local space and time refinement in reservoir simulation*, Mathematics and Computers in Simulation, **118** (2015), 273–292. MR3392453
- [17] A.N. Konovalov, *Problems of Multiphase Fluid Filtration*, New Jersey, London, Hong Kong, Singapore: World Scientific, 1994. Zbl 0837.76002
- [18] V. Kramarenko, K. Nikitin, and Yu. Vassilevski, *A finite volume scheme with improved well modeling in subsurface flow simulation*, Computational Geosciences, **21**:5 (2017), 1023–1033. MR3736038
- [19] Yu.M. Laevsky, *A problem with wells for the steady diffusion equation*, Numerical Analysis and Applications, **3**:2 (2010), 101–117.
- [20] K.D. Nikitin, *Nonlinear finite volume method for two-phase flows*, Matem. Model., **22**:11 (2010), 131–147 (in Russian). MR2810129
- [21] D.W. Peaceman, *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*, Amsterdam: Elsevier, 1977.
- [22] D.W. Peaceman, *Interpretation of wellblock pressures in numerical reservoir simulation*, SPE Journal, **18**:3 (1978), 183–194.
- [23] D.W. Peaceman, *Interpretation of wellblock pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability*, SPE Journal, **23**:3 (1983), 531–543.
- [24] P.A. Raviart and J.M. Thomas, *A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems*, Mathematical aspects of finite element methods, Lecture Notes in Mathematics, **606** (1977), 292–315. MR0483555
- [25] J.W. Sheldon, B. Zondek, and W.T. Cardwell, *One-dimensional, incompressible, noncapillary, two-phase fluid flow in a porous medium*, Petroleum Transactions, AIME, **216** (1959), 290–296.
- [26] A.N. Tikhonov and A.A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*, New York: Dover Publications, 1963. MR0165209

- [27] K.V. Voronin, A.V. Grigoriev, and Yu.M. Laevsky, *On an approach to the modeling of oil wells*, Numerical Analysis and Applications, **10**:2 (2017), 120–128. MR3670231
- [28] C. Wolfsteiner, S.H. Lee, and H.A. Tchelepi, *Well modeling in the multiscale finite volume method for subsurface flow simulation*, Multiscale Model. Simul., **5**:3 (2006), 900–917. MR2257239

MAXIM I. IVANOV

INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL GEOPHYSICS SB RAS,
6, AKAD. LAVRENT'eva AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA

IGOR A. KREMER

INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL GEOPHYSICS SB RAS,
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
2, PIROGOVA STR.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA

YURI M. LAEVSKY

INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL GEOPHYSICS SB RAS,
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY
E-mail address: laev@labchem.sccc.ru