Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

B. M. Veretennikov, The strict upper bound of ranks of commutator subgroups of finite p -groups, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1885–1900

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.134>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.209.52.79

April 26, 2023, 08:39:39

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1885–1900 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.134

УДК 512.54

MSC 20B05

ТОЧНАЯ ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА РАНГОВ КОММУТАНТОВ
КОНЕЧНЫХ p -ГРУПП

Б.М. ВЕРЕТЕННИКОВ

ABSTRACT. All groups in the abstract are finite. We define rank $d(G)$ of a p -group G as the minimal number of generators of G . Let p be any prime number, $k_1, \dots, k_n$ – positive integers, $n \geq 2$. By $D(k_1, \dots, k_n)$ we denote the number of sequences $i_1, \dots, i_k$ in which $k \geq 2$, $i_1, \dots, i_k$ are positive integers from $[1, n]$, $i_1 > i_2, i_2 \leq \dots \leq i_k$ and for any $j \in [1, n]$ number j may not occur in such sequences more than $(p^{k_j} - 1)$ times. We prove that for any p -group G generated by elements $a_1, \dots, a_n$ of orders $p_1^{k_1}, \dots, p_n^{k_n}$ ($n \geq 2$) the inequality $d(G') \leq D(k_1, \dots, k_n, p)$ is true and the equality in this inequality is attainable. Also, we prove that for any p -group G generated by elements $a_1, \dots, a_n$ of orders $p_1^{k_1}, \dots, p_n^{k_n}$ ($n \geq 2$), with elementary abelian commutator subgroup G' the class of nilpotency of G' does not exceed $p_1^{k_1} + \dots + p_n^{k_n} - n$ and this upper bound is also attainable.

Keywords: finite p -group generated by elements of orders $p_1^{k_1}, \dots, p_n^{k_n}$, number of generators of commutator subgroup of a finite p -group, the class of nilpotency of of a finite p -group with elementary abelian commutator subgroup, definition of a group by means of generators and defining relations.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье рассматривается вопрос о максимальном ранге коммутанта в классе конечных p -групп в зависимости от порядков порождающих элементов этих групп.

VERETENNIKOV, B.M., THE STRICT UPPER BOUND OF RANKS OF COMMUTATOR SUBGROUPS OF FINITE p -GROUPS.

© 2019 ВЕРЕТЕННИКОВ Б.М.

Поступила 20 сентября 2019 г., опубликована 9 декабря 2019 г.

Ранее автором в статье [1] была получена точная верхняя граница рангов коммутантов конечных 2-групп, порожденных n инволюциями, где n – любое натуральное число, а в статье [2] получена точная верхняя граница рангов коммутантов конечных p -групп, порожденных n элементами порядка p при $p > 2$.

В предлагаемой статье рассматривается общий случай, то есть находится точная верхняя граница рангов коммутантов конечных p -групп, порожденных n элементами порядков $p^{k_1}, \dots, p^{k_n}$, соответственно. При этом строится пример конечной p -группы из данного класса групп с максимально возможным рангом коммутанта.

Кроме того, в статье находится точная верхняя граница ступеней нильпотентности групп из рассматриваемого класса p -групп с элементарным абелевым коммутантом.

Заметим, что в статье Н. Блэкберна [3] доказано, что если в 2-порожденной конечной p -группе G фактор-группа G/G' – прямое произведение циклических групп $Z_{p^{k_1}}$ и $Z_{p^{k_2}}$, то

$$d(G') \leq (p^{k_1} - 1)(p^{k_2} - 1)$$

и это неравенство не улучшаемо.

Во втором разделе статьи приведены некоторые обозначения и предварительные результаты.

В третьем разделе статьи доказывается

Теорема 1. Пусть p – простое число, $n \geq 2$, G – конечная p -группа, порожденная элементами $a_1, \dots, a_n$ порядков $p^{k_1}, \dots, p^{k_n}$, соответственно, где все k_i – положительные числа. Тогда если G' – элементарная абелева группа, то

- а) любой коммутатор $[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}]$, в последовательности индексов которого $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ какое-либо число j из $[1, n]$ встречается больше $p^{k_j} - 1$ раз, равен 1;
- б) G' порождается коммутаторами вида $[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}]$, где $k \geq 2$, $i_1 > i_2, i_2 \leq i_3 \leq \dots \leq i_k$, причем для любого j из $[1, n]$ число j может встречаться в последовательности $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ не более $p^{k_j} - 1$ раз.

Пусть снова $k_1, \dots, k_n$ – целые положительные числа, $n \geq 2$. Обозначим через $D(k_1, \dots, k_n, p)$ число последовательностей целых положительных чисел $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, где

$$k \geq 2, i_1, i_2, \dots, i_k \in [1, n],$$

$$i_1 > i_2, i_2 \leq i_3 \leq \dots \leq i_k,$$

причем для любого j из $[1, n]$ число j может встречаться в таких последовательностях не более $p^{k_j} - 1$ раз

В четвертом разделе статьи доказывается теорема 2.

Теорема 2. Пусть p – простое число, $n \geq 2$, $k_1, \dots, k_n$ – положительные целые числа. Тогда существует конечная p -группа G с элементарным абелевым коммутантом, порожденная элементами порядков $p^{k_1}, \dots, p^{k_n}$, ступени нильпотентности $p^{k_1} + \dots + p^{k_n} - n$ и с условием

$$d(G') = D(k_1, \dots, k_n, p).$$

В пятом разделе статьи доказываются теоремы 3 и 4.

Теорема 3. В классе всех конечных p -групп G , порожденных элементами $a_1, \dots, a_n$ порядков $p^{k_1}, \dots, p^{k_n}$, соответственно, $\max d(G') = D(k_1, \dots, k_n, p)$.

Теорема 4. В классе всех конечных p -групп G с элементарным абелевым коммутантом, порожденных элементами $a_1, \dots, a_n$ порядков $p^{k_1}, \dots, p^{k_n}$, соответственно, наибольшая степень nilпотентности равна

$$p^{k_1} + \dots + p^{k_n} - n.$$

В шестом разделе статьи приводится формула для $D(k_1, \dots, k_n, p)$, рассматриваются примеры и устанавливается связь с теоремой Блэкберна 2.1 из [3].

Заметим, что точная оценка рангов конечных p -групп при $k_1 = \dots = k_n = 1$ получена в предыдущих работах автора: для $p = 2$ в [1] и для нечетного p – в [2]. Важно также отметить, что точная оценка рангов коммутантов 2-порожденных конечных p -групп G в зависимости от строения G/G' получена Н. Блэкберном в [3].

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Автор в основном следует обозначениям и понятиям книги [4].

Группа G метабелева, если ее коммутант G' абелев. Для метабелевых групп G в данной статье используются тождества:

- а) для любых $x, y, z \in G$ справедливо $[x, y, z][y, z, x][z, x, y] = 1$ (тождество Витта) и
- б) для любых $t \in G'$, $x \in G$ и для любого целого n

$$[t^n, x] = [t, x]^n.$$

Кроме того, постоянно используются основные коммутаторные соотношения:

$$[ab, c] = [a, c]^b [b, c],$$

$$[a, bc] = [a, c][a, b]^c,$$

справедливые в любой группе.

Нам понадобятся также следующие утверждения. Из них леммы 1–4 – это леммы 1–4 из [2].

Лемма 1. Если G – метабелева группа, то для любого $x \in G'$ и любых $y_1, \dots, y_m$ из G значение коммутатора $[x, y_1, \dots, y_m]$ не меняется при любой перестановке местами элементов $y_1, \dots, y_m$ в этом коммутаторе.

Лемма 2. Пусть H – конечная группа, заданная образующими $b_1, \dots, b_n$ и определяющими соотношениями $w_i(b_1, \dots, b_n) = 1$, где $1 \leq i \leq s$. Пусть далее k – натуральное число и группа K задана образующими $b_1, \dots, b_n$ и b , определяющими соотношениями группы H и добавленными определяющими соотношениями $b_i^b = v_i(b_1, \dots, b_n)$, где $1 \leq i \leq n$, а также $b^k = 1$. Пусть, кроме того, выполнены 3 условия для группы H :

- 1) $\langle v_1(b_1, \dots, b_n), \dots, v_n(b_1, \dots, b_n) \rangle = H$,
- 2) b сохраняет все определяющие соотношения группы H в том смысле, что для любого $i = \overline{1, s}$

$$w_i(v_1(b_1, \dots, b_n), \dots, v_n(b_1, \dots, b_n)) = 1$$

– верное равенство в группе H ,

3) k -я степень автоморфизма ψ группы H , индуцированного отображением

$$b_i \mapsto v_i(b_1, \dots, b_n),$$

где $1 \leq i \leq n$, равна id_H .

Тогда $K = H \rtimes \langle b \rangle$, причем $|b| = k$.

Лемма 3. Пусть k — целое число, $k \geq 2$. Тогда при $1 \leq i \leq k-1$ справедливо равенство:

$$\binom{i}{i} + \binom{i+1}{i} + \dots + \binom{k-1}{i} = \binom{k}{i+1}.$$

Лемма 4. Пусть G — метабелева группа (конечная или бесконечная). Тогда для любых элементов a, b из G и любого натурального m имеет место следующее равенство:

$$[a, b, b^m] = [a, b, b]^{(m)} [a, b, b, b]^{(m)} \dots [a, \underbrace{b, \dots, b}_j]^{(j^{m-1})} \dots \\ [a, \underbrace{b, \dots, b}_m]^{(m^{m-1})} [a, \underbrace{b, \dots, b}_{m+1}].$$

Лемма 5. В любой группе G для любых a, b из G и любого натурального m справедливо равенство:

$$[a, b^m] = [a, b][a, b]^b [a, b]^{b^2} \dots [a, b]^{b^{m-1}}.$$

Доказательство.

$$[a, b^m] = [a, b][a, b^{m-1}]^b = [a, b] ([a, b][a, b^{m-2}]^b)^b = \\ [a, b][a, b]^b [a, b^{m-2}]^{b^2} = \\ [a, b][a, b]^b ([a, b][a, b^{m-3}]^b)^{b^2} = \\ [a, b][a, b]^b [a, b]^{b^2} [a, b^{m-3}]^{b^3} = \dots = \\ [a, b][a, b]^b [a, b]^{b^2} \dots [a, b]^{b^{m-1}}.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. При любом простом p , $k \geq 1$ и $0 \leq i \leq p^k - 2$ биномиальный коэффициент $\binom{p^k}{i+1}$ делится на p .

Доказательство. Рассмотрим многочлен $f(x) = (1+x)^{p^k}$ степени p^k над F_p . Имеем равенство в $F_p[x]$:

$$1 + x^{p^k} = 1 + \sum_{0 \leq i \leq p^k-2} \binom{p^k}{i+1} x^{i+1} + x^{p^k}.$$

Из сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x в этом равенстве сразу получаем требуемое. Лемма доказана. $\square$

Лемма 7. Пусть группа $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, где все a_i — элементы конечного порядка. Тогда G' порождается всеми коммутаторами вида $[a_{i_1}, \dots, a_{i_k}]$, $k \geq 2$.

Доказательство. Рассмотрим в G подгруппу

$$H = \langle [a_{i_1}, \dots, a_{i_k}], k \geq 2 \rangle.$$

H нормальна в G , так как для любого j имеем

$$[a_{i_1}, \dots, a_{i_k}]^{a_j} = [a_{i_1}, \dots, a_{i_k}][a_{i_1}, \dots, a_{i_k}, a_j].$$

С другой стороны, G/H – абелева, значит, $G' \leq H$. То, что $H \leq G'$, очевидно. Значит, $H = G'$ и лемма доказана. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Лемма 8. Пусть G – группа (конечная или бесконечная), G' – элементарная абелева группа экспоненты p . Тогда, если $a, b \in G$ и $b^{p^k} = 1$, то

$$[a, \underbrace{b, \dots, b}_{p^k}] = 1.$$

Доказательство. При $p^k = 2$ лемма очевидна, поэтому считаем, что $p^k > 2$.

С учетом лемм 3, 4, 5 имеем:

$$\begin{aligned} 1 &= [a, b^{p^k}] = [a, b][a, b]^b \dots [a, b]^{b^{p^k-1}} = \\ &= [a, b]^{p^k} [a, b, b] \dots [a, b, b^{p^k-1}] = \\ &= [a, b, b][a, b, b]^{(2)} [a, b, b, b]^{(2)} \times \\ &= [a, b, b]^{(3)} [a, b, b, b]^{(3)} [a, b, b, b, b]^{(3)} \times \dots \times \\ &= [a, b, b]^{(m)} [a, b, b, b]^{(m)} \dots [a, \underbrace{b, \dots, b}_{m+1}]^{(m)} \times \dots \times \\ &= [a, b, b]^{(p^k-1)} [a, b, b, b]^{(p^k-1)} \dots [a, \underbrace{b, \dots, b}_{p^k}]^{(p^k-1)} = \\ &= [a, b, b]^{(1)+(2)+\dots+(p^k-1)} \times \\ &= [a, b, b, b]^{(2)+(3)+\dots+(p^k-1)} \times \dots \times \\ &= [a, \underbrace{b, \dots, b}_{i+1}]^{(i)+(i+1)+\dots+(p^k-1)} \times \dots \times \\ &= [a, \underbrace{b, \dots, b}_{p^k-1}]^{(p^k-2)+(p^k-1)} [a, \underbrace{b, \dots, b}_{p^k}] = \\ &= \prod_{1 \leq i \leq p^k-2} [a, \underbrace{b, \dots, b}_{i+1}]^{(p^k-i)} [a, \underbrace{b, \dots, b}_{p^k}] = \\ &= [a, \underbrace{b, \dots, b}_{p^k}], \end{aligned}$$

поскольку биномиальный коэффициент $\binom{p^k-i}{i+1}$ при любом i от 0 до p^k-2 делится на p . Лемма 8 доказана. $\square$

Докажем теперь теорему 1.

Доказательство. Утверждение а) сразу вытекает из лемм 1 и 8. В силу лемм 1, 7 и 8 коммутант G' порождается коммутаторами вида

$$x = [a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}],$$

в которых любой индекс $j \in [1, n]$ встречается не более чем $p^{k_j} - 1$ раз, причем $i_3 \leq \dots \leq i_m$. Поскольку в метабелевой группе

$$[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}]^{-1} = [[a_{i_1}, a_{i_2}]^{-1}, a_{i_3}, \dots, a_{i_m}] = [a_{i_2}, a_{i_1}, \dots, a_{i_m}],$$

то можно считать во всех порождающих коммутаторах, что $i_1 > i_2$. Заметим также, что длина любого из рассматриваемых коммутаторов не превосходит $p^{k_1} + \dots + p^{k_n} - n$.

Если $i_2 > i_3$, то из тождества Витта

$$[a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}][a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_1}][a_{i_3}, a_{i_1}, a_{i_2}] = 1$$

следует

$$[a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}] = [a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_1}]^{-1} [a_{i_3}, a_{i_1}, a_{i_2}]^{-1} = [a_{i_1}, a_{i_3}, a_{i_2}][a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_1}]^{-1}.$$

Следовательно, снова применяя лемму 1, имеем:

$$x = [a_{i_1}, a_{i_3}, a_{j_3}, \dots, a_{j_k}][a_{i_2}, a_{i_3}, a_{t_3}, \dots, a_{t_k}]^{-1},$$

где

$$i_3 \leq j_3 \leq \dots \leq j_k, i_3 \leq t_3 \leq \dots \leq t_k.$$

Теорема 1 доказана. □

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Лемма 9. Пусть G – метабелева группа, порожденная элементами $a_1, \dots, a_n$, $n \geq 2$. Индексы $i_1, \dots, i_k$ удовлетворяют условиям:

$$n \geq i_1 > i_2, 1 \leq i_2 \leq i_3 \leq \dots \leq i_k \leq n,$$

где $k > 2$. Тогда при $i_2 \leq j \leq n$ имеем:

$$[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}, a_j] = [a_{i_1}, a_{i_2}, a_{j_3}, \dots, a_{j_{k+1}}],$$

где $j_3 \leq \dots \leq j_{k+1} \leq n$ и последовательность $j_3, \dots, j_{k+1}$ состоит из $j_3, \dots, j_k$ и j , а при $i_2 > j \geq 1$ справедливо равенство

$$[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}, a_j] = [a_{i_1}, a_j, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}][a_{i_2}, a_j, a_{j_3}, \dots, a_{j_{k+1}}]^{-1},$$

где $j \leq j_3 \leq \dots \leq j_{k+1} \leq n$ и последовательность $j_3, \dots, j_{k+1}$ состоит из $i_3, \dots, i_k$ и i_1 .

Эта лемма доказана в [2] (лемма 8).

Теперь, следуя равенствам в лемме 9, построим для любого $n \geq 2$ и любого простого p конечную p -группу, порожденную элементами $a_1, a_2, \dots, a_n$ порядков $p_1^{k_1}, \dots, p_n^{k_n}$, соответственно, с элементарным абелевым коммутантом ранга $D(k_1, \dots, k_n, p)$.

Наряду с символами $a_1, \dots, a_n$, рассмотрим всевозможные символы $a_{i_1 \dots i_k}$, где $n \geq i_1 > i_2, 1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n, k \geq 2$. Определим по всем таким символам элементарную абелеву группу

$$H = \prod \langle a_{i_1 i_2 \dots i_k} \rangle,$$

в которой считаем, что $a_{i_1 i_2 \dots i_k} = 1$, если существует индекс $j \in [1, n]$, который в последовательности $i_1, i_2, \dots, i_k$ встречается более $p^{k_j} - 1$ раз. Тогда ранг H совпадает с $D(k_1, \dots, k_n, p)$.

Ясно, что определяющими соотношениями группы H являются всевозможные тождества вида:

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k}^p = 1,$$

$a_{i_1 i_2 \dots i_k} = 1$, тогда и только тогда, когда существует такой индекс j из $[1, n]$, который повторяется в $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ как минимум p^{k_j} раз, и

$$[a_{i_1 i_2 \dots i_k}, a_{i'_1 i'_2 \dots i'_{k'}}] = 1.$$

Пусть G_1 – группа, порожденная H и элементом a_1 , причем к определяющим соотношениям H добавлены соотношения:

$$a_{i_1, 1, i_3, \dots, i_k}^{a_1} = a_{i_1, 1, i_3, \dots, i_k} a_{i_1, 1, 1, i_3, \dots, i_k} \quad (1)$$

и при $i_2 > 1$ соотношения:

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k}^{a_1} = a_{i_1 i_2 \dots i_k} a_{i_1, 1, i_2, \dots, i_k} a_{i_2, 1, j_3, \dots, j_{k+1}}^{-1}, \quad (2)$$

где $1 \leq j_3 \leq \dots \leq j_{k+1} \leq n$ и последовательность $j_3, \dots, j_{k+1}$ состоит из $i_3, \dots, i_k$ и i_1 . Кроме того,

$$a_1^{p^{k_1}} = 1.$$

Ясно, что a_1 сохраняет все определяющие соотношения группы H и H порождается элементами вида $a_{i_1 \dots i_k}^{a_1}$, где $a_{i_1 \dots i_k}$ – рассмотренные выше порождающие элементы H . Следовательно, равенства (1) и (2) индуцируют автоморфизм φ группы H . Докажем, что $\varphi^{p^{k_1}} = id_H$.

Сначала докажем, что

$$a_{i_1, 1, i_3, \dots, i_k}^{\varphi^{p^{k_1}}} = a_{i_1, 1, i_3, \dots, i_k}.$$

Считаем:

$$\begin{aligned} a_{i_1, 1, i_3, \dots, i_k}^{\varphi^2} &= a_{i_1, 1, i_3, \dots, i_k} a_{i_1, 1, 1, i_3, \dots, i_k}^2 a_{i_1, 1, 1, 1, i_3, \dots, i_k}, \\ a_{i_1, 1, i_3, \dots, i_k}^{\varphi^3} &= a_{i_1, 1, i_3, \dots, i_k} a_{i_1, 1, 1, i_3, \dots, i_k}^3 a_{i_1, 1, 1, 1, i_3, \dots, i_k}^3 a_{i_1, 1, 1, 1, 1, i_3, \dots, i_k}. \end{aligned}$$

Продолжая таким образом, получим:

$$\begin{aligned} a_{i_1, 1, i_3, \dots, i_k}^{\varphi^{p^{k_1}}} &= a_{i_1, 1, i_3, \dots, i_k} a_{i_1, 1, 1, i_3, \dots, i_k}^{\binom{p^{k_1}}{1}} \dots a_{i_1, 1, \dots, 1, i_3, \dots, i_k}^{\binom{p^{k_1}}{p^{k_1}-1}} a_{i_1, 1, \dots, 1, i_3, \dots, i_k}^{\binom{p^{k_1}}{p^{k_1}+1}} = \\ &= a_{i_1, 1, i_3, \dots, i_k}, \end{aligned}$$

так как $\binom{p^{k_1}}{j}$ делится на p при $1 \leq j \leq p^{k_1} - 1$, а $a_{i_1, 1, \dots, 1, i_3, \dots, i_k}^{\binom{p^{k_1}}{p^{k_1}+1}}$ равен 1 по определению.

Теперь индукцией по s докажем при $i_2 > 1$ равенство:

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k}^{\varphi^s} = a_{i_1 i_2 \dots i_k} \prod_{j=1}^s a_{i_1, 1, \dots, 1, i_2, \dots, i_k}^{\binom{s}{j}} \prod_{j=1}^s a_{i_2, 1, \dots, 1, j_3, \dots, j_{k+1}}^{-\binom{s}{j}}.$$

При $s = 1$ оно верно – это равенство (2).

В предположении справедливости данного равенства при s рассмотрим $a_{i_1 i_2 \dots i_k}^{\varphi^{s+1}}$:

$$\begin{aligned}
 a_{i_1 i_2 \dots i_k}^{\varphi^{s+1}} &= a_{i_1 i_2 \dots i_k} a_{i_1, 1, i_2, \dots, i_k}^{-1} a_{i_2, 1, j_3 \dots j_{k+1}}^{-1} \times \\
 &\quad \prod_{j=1}^s \left(a_{i_1, \underbrace{1, \dots, 1}_j, i_2, \dots, i_k} a_{i_1, \underbrace{1, \dots, 1}_{j+1}, i_2, \dots, i_k} \right)^{\binom{s}{j}} \times \\
 &\quad \prod_{j=1}^s \left(a_{i_2, \underbrace{1, \dots, 1}_j, j_3, \dots, j_{k+1}} a_{i_2, \underbrace{1, \dots, 1}_{j+1}, j_3, \dots, j_{k+1}} \right)^{-\binom{s}{j}} = \\
 &\quad a_{i_1 i_2 \dots i_k} a_{i_1, 1, i_2, \dots, i_k} \prod_{j=1}^s \left(a_{i_1, \underbrace{1, \dots, 1}_j, i_2, \dots, i_k} \right)^{\binom{s}{j}} \prod_{j=2}^{s+1} \left(a_{i_1, \underbrace{1, \dots, 1}_j, i_2, \dots, i_k} \right)^{\binom{s}{j-1}} \times \\
 &\quad a_{i_2, 1, j_3 \dots j_{k+1}}^{-1} \prod_{j=1}^s \left(a_{i_2, \underbrace{1, \dots, 1}_j, j_3, \dots, j_{k+1}} \right)^{-\binom{s}{j}} \prod_{j=2}^{s+1} \left(a_{i_2, \underbrace{1, \dots, 1}_j, j_3, \dots, j_{k+1}} \right)^{-\binom{s}{j-1}} = \\
 &\quad a_{i_1 i_2 \dots i_k} a_{i_1, 1, i_2, \dots, i_k} a_{i_1, 1, i_2, \dots, i_k}^{\binom{s}{1}} \prod_{j=2}^s \left(a_{i_2, \underbrace{1, \dots, 1}_j, i_2, \dots, i_k} \right)^{\binom{s}{j} + \binom{s}{j-1}} \times \\
 &\quad a_{i_1, \underbrace{1, \dots, 1}_{s+1}, i_2, \dots, i_k}^{\binom{s+1}{s+1}} a_{i_2, 1, j_3 \dots j_{k+1}}^{-1} a_{i_2, 1, j_3 \dots j_{k+1}}^{-\binom{s}{1}} \times \\
 &\quad \prod_{j=2}^s \left(a_{i_2, \underbrace{1, \dots, 1}_j, j_3, \dots, j_{k+1}} \right)^{\binom{s}{j} - \binom{s}{j-1}} a_{i_2, \underbrace{1, \dots, 1}_{s+1}, j_3, \dots, j_{k+1}}^{-\binom{s+1}{s+1}} = \\
 &\quad a_{i_1 i_2 \dots i_k} \prod_{j=1}^s \left(a_{i_1, \underbrace{1, \dots, 1}_j, i_2, \dots, i_k} \right)^{\binom{s+1}{j}} a_{i_1, \underbrace{1, \dots, 1}_{s+1}, i_2, \dots, i_k}^{\binom{s+1}{s+1}} \times \\
 &\quad \prod_{j=1}^s \left(a_{i_2, \underbrace{1, \dots, 1}_j, j_3, \dots, j_{k+1}} \right)^{-\binom{s+1}{j}} a_{i_2, \underbrace{1, \dots, 1}_{s+1}, j_3, \dots, j_{k+1}}^{-\binom{s+1}{s+1}} = \\
 &\quad a_{i_1 i_2 \dots i_k} \prod_{j=1}^{s+1} \left(a_{i_1, \underbrace{1, \dots, 1}_j, i_2, \dots, i_k} \right)^{\binom{s+1}{j}} \prod_{j=1}^{s+1} \left(a_{i_2, \underbrace{1, \dots, 1}_j, j_3, \dots, j_{k+1}} \right)^{-\binom{s+1}{j}},
 \end{aligned}$$

что и требовалось.

Следовательно, при $i_2 > 1$ имеем

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k}^{\varphi^{p^{k_1}}} = a_{i_1 i_2 \dots i_k},$$

так как $\binom{p^{k_1}}{j}$ делится на p при $1 \leq j \leq p^{k_1} - 1$ и

$$a_{i_1, \underbrace{1, \dots, 1}_{p^{k_1}+1}, i_2, \dots, i_k} = a_{i_2, \underbrace{1, \dots, 1}_{p^{k_1}+1}, j_3, \dots, j_{k+1}} = 1$$

в силу $(p^{k_1} + 1)$ -кратного повторения (достаточно p^{k_1} -кратного) единицы в мультииндексах указанных двух символов.

Таким образом, $\varphi^{p^{k_1}} = id_H$ и, значит, по лемме 2

$$G_1 = H \rtimes \langle a_1 \rangle, |G| = |H|p^{k_1}.$$

Предположим теперь, что при фиксированном $m \in [1, n-1]$ построена группа

$$G_m = H \rtimes \langle a_1 \rangle \rtimes \dots \rtimes \langle a_m \rangle,$$

где $|a_i| = p^{k_i}$ при $1 \leq i \leq m$, с определяющими соотношениями группы H и дополнительными соотношениями:

a) при $i_2 \leq j \leq m, k \geq 2$

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k}^{a_j} = a_{i_1 i_2 \dots i_k} a_{i_1 i_2 j_3 \dots j_{k+1}},$$

где $i_2 \leq j_3 \leq \dots \leq j_{k+1} \leq n$ и последовательность $j_3 \dots j_{k+1}$ состоит из $i_3, \dots, i_k$ и j ;

b) при $i_2 > j, j \leq m, k \geq 2$

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k}^{a_j} = a_{i_1 i_2 \dots i_k} a_{i_1 j i_2 \dots i_k} a_{i_2 j j_3 \dots j_{k+1}}^{-1},$$

где $j \leq j_3 \leq \dots \leq j_{k+1} \leq n$ и последовательность $j_3 \dots j_{k+1}$ состоит из $i_3, \dots, i_k$ и i_1 ;

c) $a_i^{a_j} = a_i a_{ji}^{-1}$ при $i < j \leq m$;

d) $a_i^{p^{k_i}} = 1$ при $1 \leq i \leq m$.

Пусть теперь $G_{m+1} = \langle G_m, a_{m+1} \rangle$, где к определяющим соотношениям группы G_m добавлены соотношения:

A) при $i_2 \leq m+1, k \geq 2$

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k}^{a_{m+1}} = a_{i_1 i_2 \dots i_k} a_{i_1 i_2 j_3 \dots j_{k+1}},$$

где $i_2 \leq j_3 \leq \dots \leq j_{k+1} \leq n$ и последовательность $j_3 \dots j_{k+1}$ состоит из $i_3, \dots, i_k$ и $m+1$;

B) при $i_2 > m+1, k \geq 2$

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k}^{a_{m+1}} = a_{i_1 i_2 \dots i_k} a_{i_1, m+1, i_2, \dots, i_k} a_{i_2, m+1, j_3, \dots, j_{k+1}}^{-1},$$

где возрастающая последовательность $j_3, \dots, j_{k+1}$ состоит из $i_3, \dots, i_k$ и i_1 ;

C) $a_i^{a_{m+1}} = a_i a_{m+1, i}^{-1}$ при $i \leq m$;

D) $a_{m+1}^{p^{k_{m+1}}} = 1$.

То, что a_{m+1} сохраняет равенства в пунктах a) и b) в смысле леммы 2, доказывается точно также, как в [2] (с. 154, 155).

Докажем, что a_{m+1} сохраняет равенство c).

Это значит, что в группе G_m надо проверить равенство:

$$(a_i^{a_{m+1}})^{a_j^{a_{m+1}}} = a_i^{a_{m+1}} (a_{ji}^{a_{m+1}})^{-1}. \quad (3)$$

Так как $i \leq m+1$, то правая часть (3) равна:

$$a_i a_{m+1,i}^{-1} (a_{ji} a_{j,i,m+1})^{-1}.$$

Левая часть (3) равна:

$$\begin{aligned} (a_i a_{m+1,i}^{-1})^{a_j a_{m+1,j}^{-1}} &= (a_i^{a_j})^{a_{m+1,j}^{-1}} (a_{m+1,i}^{-1})^{a_j} = \\ &= (a_i a_{ji}^{-1})^{a_{m+1,j}^{-1}} (a_{m+1,i}^{a_j})^{-1} = \\ &= a_{m+1,j} a_i a_{m+1,j}^{-1} a_{ji}^{-1} (a_{m+1,i} a_{m+1,i,j})^{-1} = \\ &= a_i (a_{m+1,j})^{a_i} a_{m+1,j}^{-1} a_{ji}^{-1} a_{m+1,i,j}^{-1} (a_{m+1,i})^{-1} = \\ &= a_i a_{m+1,j} a_{m+1,i,j} a_{j,i,m+1}^{-1} a_{m+1,j}^{-1} a_{ji}^{-1} a_{m+1,i,j}^{-1} a_{m+1,i}^{-1} = \\ &= a_i a_{j,i,m+1}^{-1} a_{ji}^{-1} a_{m+1,i}^{-1} \end{aligned}$$

(после двух сокращений). Таким образом, левая часть (3) совпадает с правой частью (3), то есть, (3) доказано.

И, наконец, докажем, что a_{m+1} сохраняет равенство d)

$$a_i^{p^{k_i}} = 1$$

при $1 \leq i \leq m$. Это означает, что

$$(a_i^{a_{m+1}})^{p^{k_i}} = 1,$$

то есть

$$(a_i a_{m+1,i}^{-1})^{p^{k_i}} = 1, \quad (4).$$

Имеем:

$$(a_i a_{m+1,i}^{-1})^2 = a_i a_{m+1,i}^{-1} a_i a_{m+1,i}^{-1} = a_i^2 (a_{m+1,i}^{-1})^{a_i} a_{m+1,i}^{-1}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} (a_i a_{m+1,i}^{-1})^3 &= a_i^3 (a_{m+1,i}^{-1})^{a_i} a_{m+1,i}^{-1} a_i a_{m+1,i}^{-1} = \\ &= a_i^3 (a_{m+1,i}^{-1})^{a_i^2} (a_{m+1,i}^{-1})^{a_i} a_{m+1,i}^{-1}, \end{aligned}$$

и т.д. Ясно, что при любом $s \geq 2$

$$(a_i a_{m+1,i}^{-1})^s = a_i^s (a_{m+1,i}^{-1})^{a_i^{s-1}} \dots (a_{m+1,i}^{-1})^{a_i} a_{m+1,i}^{-1}.$$

Тогда при $s = p^{k_i}$ имеем:

$$\begin{aligned} (a_i a_{m+1,i}^{-1})^{p^{k_i}} &= a_i^{p^{k_i}} (a_{m+1,i}^{-1})^{a_i^{p^{k_i}-1}} \dots (a_{m+1,i}^{-1})^{a_i} a_{m+1,i}^{-1} = \\ &= a_i^{p^{k_i}} \left(a_{m+1,i}^{a_i} a_{m+1,i} \dots a_{m+1,i}^{a_i^{p^{k_i}-1}} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что из равенств $a_i^{a_j} = a_i a_{ji}^{-1}$ и $a_i^{a_{m+1}} = a_i a_{m+1,i}^{-1}$ пунктов с) и C) выше, выполняющихся в группе G_{m+1} , следует:

$$a_{ji} = [a_j, a_i], m \geq j > i \geq 1$$

и

$$a_{m+1,i} = [a_{m+1}, a_i], m+1 > i.$$

Следовательно, по лемме 5

$$a_{m+1,i} a_{m+1,i}^{a_i} \dots a_{m+1,i}^{a_i^{p^{k_i}-1}} =$$

$$[a_{m+1}, a_i][a_{m+1}, a_i]^{a_i} \dots [a_{m+1}, a_i]^{a_i^{p^{k_i}-1}} = [a_{m+1}, a_i^{p^{k_i}}] = 1,$$

откуда следует требуемое:

$$(a_i a_{m+1,i}^{-1})^{p^{k_i}} = 1.$$

Таким образом, мы доказали, что a_{m+1} сохраняет все определяющие соотношения группы G_m . Также ясно, что элементы вида $a_{i_1 \dots i_k}^{a_{m+1}}$ и $a_i^{a_{m+1}}$, $i \leq m$, порождают G_m . Для применения леммы 2 осталось доказать, что автоморфизм φ группы G_m , индуцированный равенствами A) и B), удовлетворяет условию:

$$\varphi^{p^{k_{m+1}}} = id_{G_m}.$$

Сначала докажем, что

$$a_i^{\varphi^{p^{k_{m+1}}}} = a_i$$

для любого $i \leq m$. Считаем:

$$\begin{aligned} a_i^{\varphi^2} &= a_i^{a_{m+1}^2} = a_i a_{m+1,i}^{-1} (a_{m+1,i} a_{m+1,i,m+1})^{-1} = a_i a_{m+1,i}^{-2} a_{m+1,i,m+1}^{-1}, \\ a_i^{\varphi^3} &= a_i a_{m+1,i}^{-1} (a_{m+1,i} a_{m+1,i,m+1})^{-2} (a_{m+1,i,m+1} a_{m+1,i,m+1,m+1})^{-1} = \\ &= a_i a_{m+1,i}^{-3} a_{m+1,i,m+1}^{-3} a_{m+1,i,m+1,m+1}^{-1}. \end{aligned}$$

Ясно теперь, что для любого s

$$a_i^{\varphi^s} = a_i a_{m+1,i}^{-\binom{s}{1}} a_{m+1,i,m+1}^{-\binom{s}{2}} \dots a_{m+1,i,m+1,\dots,m+1}^{-\binom{s}{s-2}} a_{m+1,i,m+1,\dots,m+1}^{-1}.$$

Тогда $a_i^{\varphi^{p^{k_{m+1}}}} = a_i$, так как $\binom{p^{k_{m+1}}}{j}$ делится на p при $1 \leq j \leq p^{k_{m+1}} - 1$, а

$$a_{m+1,i,m+1,\dots,m+1} = 1$$

по определению группы H . Итак, мы доказали, что $p^{k_{m+1}}$ -я степень φ оставляет любой a_i при $1 \leq i \leq m$ на месте.

Теперь докажем, что при $i_2 \leq m+1$

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k}^{\varphi^{p^{k_{m+1}}}} = a_{i_1 i_2 \dots i_k}.$$

В силу A) имеем

$$\begin{aligned} a_{i_1 i_2 \dots i_k}^{\varphi^2} &= a_{i_1 i_2 \dots i_k} a_{i_1 i_2 j_3 \dots j_{k+1}} a_{i_1 i_2 j_3 \dots j_{k+1}} a_{i_1 i_2 j_3^{(2)} \dots j_{k+2}^{(2)}} = \\ &= a_{i_1 i_2 \dots i_k} a_{i_1 i_2 j_3 \dots j_{k+1}}^2 a_{i_1 i_2 j_3^{(2)} \dots j_{k+2}^{(2)}} a_{i_1 i_2 j_3^{(2)} \dots j_{k+2}^{(2)}} a_{i_1 i_2 j_3^{(3)} \dots j_{k+3}^{(3)}} = \end{aligned}$$

где

$$i_2 \leq j_3 \leq \dots \leq j_{k+1}, i_2 \leq j_3^{(2)} \leq \dots \leq j_{k+2}^{(2)},$$

причем первая последовательность состоит из $i_2, i_3, \dots, i_k$ и $(m+1)$, а вторая из $i_2, i_3, \dots, i_k$ и двух добавленных индексов $(m+1)$. Далее,

$$\begin{aligned} a_{i_1 i_2 \dots i_k}^{\varphi^3} &= a_{i_1 i_2 \dots i_k} a_{i_1 i_2 j_3 \dots j_{k+1}} a_{i_1 i_2 j_3 \dots j_{k+1}}^2 a_{i_1 i_2 j_3^{(2)} \dots j_{k+2}^{(2)}}^2 a_{i_1 i_2 j_3^{(2)} \dots j_{k+2}^{(2)}} a_{i_1 i_2 j_3^{(3)} \dots j_{k+3}^{(3)}} = \\ &= a_{i_1 i_2 \dots i_k} a_{i_1 i_2 j_3 \dots j_{k+1}}^3 a_{i_1 i_2 j_3^{(2)} \dots j_{k+2}^{(2)}}^3 a_{i_1 i_2 j_3^{(3)} \dots j_{k+3}^{(3)}}^3, \end{aligned}$$

где $i_2 \leq j_3^{(3)} \leq \dots \leq j_{k+3}^{(3)}$ и последовательность $i_2, j_3^{(3)}, \dots, j_{k+3}^{(3)}$ состоит из $i_2, i_3, \dots, i_k$ и добавленных трех индексов $(m+1)$.

Ясно, что для любого натурального $s \geq 2$

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k}^{\varphi^s} = a_{i_1 i_2 \dots i_k} a_{i_1 i_2 j_3 \dots j_{k+1}}^{\binom{s}{1}} a_{i_1 i_2 j_3^{(2)} \dots j_{k+2}}^{\binom{s}{2}} \times \dots \times a_{i_1 i_2 j_3^{(t)} \dots j_{k+t}}^{\binom{s}{t}} \dots a_{i_1 i_2 j_3^{(s-1)} \dots j_{k+s-1}}^{\binom{s}{s-1}} a_{i_1 i_2 j_3^{(s)} \dots j_{k+s}}^{\binom{s}{s}},$$

где для любого t от 2 до s возрастающая последовательность $j_3^{(t)}, \dots, j_{k+t}^{(t)}$ состоит из $i_3, \dots, i_k$ и t индексов $(m+1)$.

Тогда при $s = p^{k_{m+1}}$ имеем:

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k}^{\varphi^{p^{k_{m+1}}}} = a_{i_1 i_2 \dots i_k},$$

так как $\binom{p^{k_{m+1}}}{t}$ делится на p при $1 \leq t \leq p^{k_{m+1}} - 1$, а в последовательности $j_3^{(s)}, \dots, j_{k+s}^{(s)}$ содержится $p^{k_{m+1}}$ индексов $m+1$, откуда по определению $a_{i_1 i_2 j_3^{(s)} \dots j_{k+s}^{(s)}} = 1$.

Осталось доказать, что при $i_2 > m+1$

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k}^{\varphi^{p^{k_{m+1}}}} = a_{i_1 i_2 \dots i_k}.$$

Рассуждая таким же образом, что и выше, получим для любого $s \geq 2$

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k}^{\varphi^s} = a_{i_1 i_2 \dots i_k} \times a_{i_1, m+1, i_2, \dots, i_k}^{\binom{s}{1}} \dots a_{i_1, \underbrace{m+1, \dots, m+1}_{t}, i_2, \dots, i_k}^{\binom{s}{t}} \dots a_{i_1, \underbrace{m+1, \dots, m+1}_s, i_2, \dots, i_k}^{\binom{s}{s}} a_{i_2, m+1, j_3, \dots, j_{k+1}}^{-\binom{s}{1}} \dots a_{i_2, \underbrace{m+1, \dots, m+1}_t, j_3, \dots, j_{k+1}}^{-\binom{s}{t}} \dots a_{i_2, \underbrace{m+1, \dots, m+1}_s, j_3, \dots, j_{k+1}}^{-\binom{s}{s}}.$$

Тогда при $s = p^{k_{m+1}}$ получим

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k}^{\varphi^{p^{k_{m+1}}}} = 1,$$

так как снова $\binom{p^{k_{m+1}}}{t}$ делится на p при $1 \leq t \leq p^{k_{m+1}} - 1$,

$$a_{i_1, \underbrace{m+1, \dots, m+1}_s, i_2, \dots, i_k} = a_{i_2, \underbrace{m+1, \dots, m+1}_s, j_3, \dots, j_{k+1}} = 1$$

в силу $p^{k_{m+1}}$ -кратного повторения индекса $m+1$ в мультииндексах последних двух элементов.

Таким образом, по лемме 2 имеем:

$$G_{m+1} = G_m \rtimes \langle a_{m+1} \rangle, |a_{m+1}| = p^{k_{m+1}}.$$

Продолжая построение групп G_i , на последнем шаге получим

$$G_n = H \rtimes \langle a_1 \rangle \rtimes \langle a_2 \rangle \rtimes \dots \rtimes \langle a_n \rangle$$

где $|a_i| = p^{k_i}$ при $i = \overline{1, n}$ и $H = G'_n$.

По построению любой неединичный порождающий элемент $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ группы H равен коммутатору $[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}]$. Поэтому степень нильпотентности G равна

$$(p^{k_1} - 1) + \dots + (p^{k_n} - 1) = p^{k_1} + \dots + p^{k_n} - n.$$

Теорема 2 доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 3 И 4

Рассмотрим фактор-группу

$$\overline{G} = G/\Phi(G').$$

Эта группа имеет элементарный абелев коммутант, $\overline{G} = \langle \overline{a_1}, \dots, \overline{a_n} \rangle$ и для любого $i = \overline{1, n}$ очевидно, что

$$|\overline{a_i}| \leq p^{k_i}.$$

Стало быть, по теореме 1 имеем:

$$d(G') = d(\overline{G}') \leq D(k_1, \dots, k_n, p).$$

То, что равенство в данном неравенстве достижимо, вытекает из теоремы 2. Теорема 3 доказана.

Теорема 4 вытекает непосредственно из теорем 1 и 2 с учетом леммы 7.

6. ФОРМУЛА ДЛЯ $D(k_1, \dots, k_n, p)$ И ПРИМЕРЫ

Сначала для натуральных $k_1, \dots, k_n$ и натуральных $k \geq 1$, $n \geq 2$ обозначим $M_k(k_1, \dots, k_n)$ число возрастающих последовательностей целых чисел из $[1, n]$ длины k , в которых число появлений любого числа j из $[1, n]$ меньше k_j . Ясно, что при $k > \sum_{j=1}^n k_j - n$

$$M_k(k_1, \dots, k_n) = 0.$$

Следовательно, общее число всех рассматриваемых последовательностей длин $k \geq 1$ равно

$$\sum_{k=1}^K M_k(k_1, \dots, k_n),$$

где $K = \sum_{j=1}^n k_j - n$. Обозначим указанную сумму $M(k_1, \dots, k_n)$. При малых k и n значение $M_k(k_1, \dots, k_n)$ можно посчитать непосредственно. При больших k и n будет полезна следующая лемма.

Лемма 10.

$$M_k(k_1, \dots, k_n) = N - \sum_{i_1=1}^n N(i_1) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} N(i_1, i_2) + \dots + (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} N(i_1, \dots, i_m) + \dots + (-1)^n N(1, 2, \dots, n),$$

где

$$N(i_1, \dots, i_m) = \binom{n+k-k_{i_1}-\dots-k_{i_m}-1}{k-k_{i_1}-\dots-k_{i_m}}, N = \binom{n+k-1}{k}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $M_k(k_1, \dots, k_n)$ равно числу целочисленных решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k,$$

где для любого $i \in [1, n]$

$$0 \leq x_i \leq k_i - 1.$$

Известно, что число таких решений данного уравнения с одним ограничением $x_i \geq 0$ для всех i , равно

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Число $N(i_1)$ решений данного уравнения с условием $x_{i_1} \geq k_{i_1}$ равно числу целочисленных неотрицательных решений уравнения

$$y_1 + \dots + y_n = k - k_{i_1},$$

то есть

$$N(i_1) = \binom{n+k-k_{i_1}-1}{k-k_{i_1}}.$$

Рассуждая аналогично, получим, что число $N(i_1, \dots, i_m)$ решений данного уравнения с ограничениями

$$x_{i_1} \geq k_{i_1}, \dots, x_{i_m} \geq k_{i_m}$$

равно числу целочисленных неотрицательных решений уравнения

$$z_1 + \dots + z_n = k - k_{i_1} - \dots - k_{i_m},$$

т. е.

$$N(i_1, \dots, i_m) = \binom{n+k-k_{i_1}-\dots-k_{i_m}-1}{k-k_{i_1}-\dots-k_{i_m}}.$$

Таким образом, утверждение леммы следует теперь из принципа включения-исключения. □

Теорема 5.

$$D(k_1, \dots, k_n, p) = \binom{n}{2} + \sum_{n \geq j > i \geq 1} M(\underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, t_i, \dots, t_n),$$

где при фиксированных i, j

$$t_i = p^{k_i} - 1, t_j = p^{k_j} - 1$$

и для любого r , отличного от i и j ,

$$t_r = p^{k_r}.$$

Доказательство. Число последовательностей $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, длины ≥ 3 , вида $(j, i, i_3, \dots, i_k)$, где $j > i$, $i \leq i_3 \leq \dots \leq i_k$, в которых любое число r из $[1, n]$ встречается меньше p^{k_r} раз, равно числу $M(\underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, t_i, \dots, t_n)$, описанному выше.

ше.

С учетом того, что число пар (j, i) , где $n \geq j > i \geq 1$, равно $\binom{n}{2}$, получаем требуемую формулу. □

Пример 1.

Рассмотрим конечные 2-группы G , порожденные тремя элементами a_1, a_2, a_3 , порядков 8, 4, 2, соответственно. В силу теоремы 3 максимальный ранг коммутантов этих групп равен $D(3, 2, 1, 2)$. По теореме 5

$$D(3, 2, 1, 2) = M(7, 3, 2) + M(7, 4, 1) + M(1, 3, 1) + \binom{3}{2}.$$

$M(7, 3, 2)$ – число возрастающих последовательностей целых чисел из $[1, 3]$, в которых 1 встречается максимум 6 раз, 2 встречается максимум 2 раза и

3 встречается максимум 1 раз. Ясно, что k_{max} – максимальная длина таких последовательностей – равна 9, т. е.

$$M(7, 3, 2) = \sum_{k=1}^9 M_k(7, 3, 2).$$

Очевидно, что $M_9(7, 3, 2) = 1$.

Вообще, $M_k(7, 3, 2)$ при $1 \leq k \leq 9$ – это число неотрицательных целых решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 = k$, где $0 \leq x_1 \leq 6, 0 \leq x_2 \leq 3, 0 \leq x_3 \leq 1$.

Так как $8 = 6 + 2 + 0 = 6 + 1 + 1 = 5 + 2 + 1$, то $M_8(7, 3, 2) = 3$.

Так как $7 = 6 + 1 + 0 = 6 + 0 + 1 = 5 + 2 + 0 = 5 + 1 + 1 = 4 + 2 + 1$, то $M_7(7, 3, 2) = 5$.

Аналогично, $M_k(7, 3, 2) = 5$ при $2 \leq k \leq 6$.

Ясно также, что $M_1(7, 3, 2) = 3$.

Таким образом,

$$M(7, 3, 2) = 1 + 3 + 5 \times 6 + 3 = 37.$$

Рассуждая вышеописанным образом, получим:

$$M(7, 4, 1) = 1 + 2 + 3 + 4 \times 4 + 3 + 2 = 27.$$

Наконец, очевидно, что $M(1, 3, 1) = 2$.

Таким образом,

$$D(3, 2, 1, 2) = 37 + 27 + 2 + 3 = 69$$

— максимально возможный ранг коммутанта конечной 2-группы, порожденной тремя элементами a_1, a_2, a_3 порядков 8, 4, 2, соответственно.

Пример 2.

Найдем максимальное $d(G')$ в классе конечных p -групп G , порожденных элементами порядков p^{k_1} и p^{k_2} , где $k_1 \leq k_2$. Для этого нужно найти $D(k_1, k_2, p)$. По теореме 5

$$D(k_1, k_2, p) = M(p^{k_1} - 1, p^{k_2} - 1) + 1.$$

Как и выше, считаем:

$$M_1(p^{k_1} - 1, p^{k_2} - 1) = 2 \quad (0 + 1 = 1 + 0 = 1),$$

$$M_2(p^{k_1} - 1, p^{k_2} - 1) = 3 \quad (0 + 2 = 1 + 1 = 2 + 0),$$

$$M_{p^{k_1}-2}(p^{k_1} - 1, p^{k_2} - 1) = p^{k_1} - 1,$$

$$M_k(p^{k_1} - 1, p^{k_2} - 1) = p^{k_1} - 1 \quad \text{при } p^{k_1} - 1 \leq k \leq p^{k_2} - 2$$

$$(0 + k = 1 + (k - 1) = \dots = (p^{k_1} - 2) + (k - (p^{k_1} - 2)) = k),$$

$$M_{p^{k_2}-1}(p^{k_1} - 1, p^{k_2} - 1) = p^{k_1} - 2$$

$$(1 + (p^{k_2} - 2)) = \dots = p^{k_1} - 2 + (p^{k_2} - p^{k_1} + 1) = p^{k_2} - 1),$$

$$M_{p^{k_2}}(p^{k_1} - 1, p^{k_2} - 1) = p^{k_1} - 3$$

$$(2 + (p^{k_2} - 2)) = \dots = (p^{k_1} - 2) + (p^{k_2} - p^{k_1} + 2) = p^{k_2},$$

...

$$M_{p^{k_1}+p^{k_2}-4}(p^{k_1} - 1, p^{k_2} - 1) = 1 \quad ((p^{k_1} - 2) + (p^{k_2} - 2) = p^{k_1} + p^{k_2} - 4).$$

Следовательно,

$$M(p^{k_1} - 1, p^{k_2} - 1) =$$

$$2 + 3 + \dots + (p^{k_1} - 1) + (p^{k_2} - p^{k_1})(p^{k_1} - 1) + (p^{k_1} - 2) + \dots + 1 =$$

$$\frac{(p^{k_1} + 1)(p^{k_1} - 2)}{2} + \frac{(p^{k_1} - 1)(p^{k_1} - 2)}{2} + (p^{k_2} - p^{k_1})(p^{k_1} - 1) =$$

$$(p^{k_1} - 2)p^{k_1} + p^{k_1+k_2} - p^{k_2} - p^{2k_1} + p^{k_1} =$$

$$p^{k_1+k_2} - p^{k_1} - p^{k_2}.$$

Тогда имеем:

$$D(k_1, k_2, p) = p^{k_1+k_2} - p^{k_1} - p^{k_2} + 1 = (p^{k_1} - 1)(p^{k_2} - 1).$$

Таким образом, в рассматриваемом классе групп G

$$\max d(G') = (p^{k_1} - 1)(p^{k_2} - 1),$$

что соответствует теореме Блэкберна 2.1 из [3]:

Для конечных 2-порожденных p -групп G с условием

$$G/G' \simeq Z_{p^{k_1}} \times Z_{p^{k_2}}$$

справедливо неравенство

$$d(G') \leq (p^{k_1} - 1)(p^{k_2} - 1),$$

причем случай

$$d(G') = (p^{k_1} - 1)(p^{k_2} - 1)$$

достигается.

В заключение отметим, что результаты данной статьи были анонсированы на школе-конференции, посвященной 65-летию А.А. Махнева [5].

REFERENCES

- [1] B.M. Veretennikov, *On the commutator subgroups of finite 2-groups generated by involutions*, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **23**:4 (2017), 77–84 (in Russian). MR3758048
- [2] B.M. Veretennikov, *On the rank of the commutator subgroup of the finite p -group generated by elements of order $p > 2$* , Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 1332–1343 (in Russian). MR3873771
- [3] N. Blackburn, *On prime-power groups with two generators*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **54**:3 (1958), 327–337. MR102557
- [4] M.I. Kargaplov, J.I. Merzljakov, *Fundamentals of the Theory of Groups*, New York: Springer-Verlag, 1979. MR551207
- [5] B.M. Veretennikov, *On commutator subgroups of finite p -groups generated by elements of order p* , XII School-Conference on Group Theory, Honor of the 65th Birthday of Professor Alexander A. Makhnev (in Russian).

BORIS MICHAILOVICH VERETENNIKOV
 URAL FEDERAL UNIVERSITY,
 19, MIRA STR.,
 EKATERINBURG, 620002, RUSSIA
E-mail address: boris@veretennikov.ru