Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. N. Savinkina, A. I. Sakhanenko, On improvement of statistical estimators in a power regression problem, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1901–1912

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.135>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.196.121.252

April 26, 2023, 18:00:26

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1901–1912 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.135

УДК 519.23

MSC 62F12

ОБ УЛУЧШЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК
В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕПЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Е.Н. САВИНКИНА, А.И. САХАНЕНКО

ABSTRACT. We consider a task of estimating an unknown parameter in a special class of nonlinear regression problems. The second step of a two-stage estimation method is presented (with the first step consistent estimators being already obtained). The asymptotic normality of these estimators is proved.

Keywords: non-linear regression, power regression, statistical estimators, asymptotically normal estimators, two-stage estimation, improved estimators

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предположим, что наблюдаются независимые случайные величины $\{Y_i\}$, представимые в виде

$$(1) \quad Y_i = (1 + \alpha x_i)^r + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad r \neq 0,$$

где $\{x_i > 0\}$ — некоторая известная числовая последовательность, а $\{\varepsilon_i\}$ — ненаблюдаемые случайные погрешности. Нам требуется оценить неизвестный положительный параметр $\alpha > 0$, используя первые n наблюдений.

Традиционный путь решения такой задачи состоит в использовании метода наименьших квадратов, когда в качестве оценки для α берётся точка $\hat{\alpha}_n$, в

SAVINKINA, E.N., SAKHANENKO, A.I., ON IMPROVEMENT OF STATISTICAL ESTIMATORS IN A POWER REGRESSION PROBLEM.

© 2019 Савинкина Е.Н., Саханенко А.И.

Работа первого автора выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.3., проект № 0314-2019-0008. Исследование второго автора выполнено также при частичной поддержке РФФИ (грант 17-01-00683).

Поступила 29 октября 2019 г., опубликована 11 декабря 2019 г.

которой достигает минимума сумма квадратов отклонений, т.е.

$$(2) \quad \hat{\alpha}_n = \arg \min_{\alpha} H_n(\alpha) \quad \text{при} \quad H_n(\alpha) = \sum_{i \leq n} (Y_i - (1 + \alpha x_i)^r)^2.$$

При $r = 1$, когда уравнение (1) превращается в классическое уравнение линейной регрессии, этот традиционный метод прекрасно себя зарекомендовал. Однако при $r \neq 1$, как отмечено в монографии Е.З. Демиденко [1], задача поиска точки минимума $\hat{\alpha}_n$ в формуле (2) представляет серьёзные вычислительные трудности (связанные с тем, что количество локальных минимумов в правой части формулы (2) может стремиться к бесконечности при нецелых r).

В работе [2] мы рассматривали частный случай уравнения (1), когда $r = 1/2$, и ввели целый класс явных простых оценок для параметра α . В частности, в качестве такой оценки можно взять статистику

$$\alpha_n^* = \sum_{i \leq n} (x_i - \bar{x}_n) Y_i^2 / \sum_{i \leq n} (x_i - \bar{x}_n)^2, \quad \text{где} \quad \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i \leq n} x_i.$$

Подчеркнём, что уравнение (1) — это третье уравнение нелинейной регрессии, в котором А.И. Саханенко и его ученикам удалось найти явную асимптотически нормальную оценку для неизвестного параметра (см. [2]-[5]).

Однако все оценки из [2] обладают другим недостатком: они менее точные, чем труднонаходимая оценка (2) по методу наименьших квадратов. С целью обойти и эту трудность, естественно воспользоваться идеей Р. Фишера [6] и улучшить оценки из [2]. Действительно, пусть на первом шаге нами уже получена некоторая предварительная состоятельная оценка α_n^* . Следуя Фишеру, на втором шаге мы можем попытаться улучшить эту оценку, используя один шаг в известном методе Ньютона для нахождения точки минимума функции $H_n(\cdot)$. В этом случае на втором шаге обычно используется следующая оценка

$$(3) \quad \hat{\alpha}_n^* = \alpha_n^* - \frac{H'_n(\alpha_n^*)}{H''_n(\alpha_n^*)},$$

где

$$(4) \quad H'_n(t) = 2r \sum_{i \leq n} (x_i(1 + tx_i)^{2r-1} - Y_i x_i(1 + tx_i)^{r-1}),$$

$$(5) \quad H''_n(t) = 2r \sum_{i \leq n} ((2r-1)x_i^2(1 + tx_i)^{2r-2} - (r-1)Y_i x_i^2(1 + tx_i)^{r-2}).$$

При $p > 0$ положим

$$(6) \quad A_{p,n}(t) = \sum_{i \leq n} \frac{x_i^p}{(1 + tx_i)^{p-2r}} \quad \text{и} \quad E_n^2(t) = A_{2,n}(t).$$

Поскольку

$$\mathbb{E} H''_n(\alpha) = 2r^2 E_n^2(\alpha),$$

то наряду с (3) на втором шаге, начиная с работы [6], также часто используют оценку вида

$$\hat{\alpha}_n^* = \alpha_n^* - \frac{H'_n(\alpha_n^*)}{2r^2 E_n^2(\alpha_n^*)}.$$

В настоящей работе изучаются оценки второго шага, которые имеют следующий более общий вид:

$$(7) \quad \alpha_n^{**}(c) = \alpha_n^* - \frac{H'_n(\alpha_n^*)}{cH''_n(\alpha_n^*) + (1-c)2r^2E_n^2(\alpha_n^*)},$$

где c — некоторая константа, выбираемая статистиком. Мы всюду считаем выполненным следующее достаточно естественное

Предположение А. Случайные величины $\{\varepsilon_i\}$ — независимы и одинаково распределены, причем

$$(8) \quad \mathbb{E}\varepsilon_1 = 0, \quad 0 < \sigma^2 := \mathbb{D}\varepsilon_1 < \infty.$$

Кроме того, $\alpha > 0$ и $x_i > 0$ при всех i , а также

$$(9) \quad \frac{\max_{i \leq n} x_i^2 / (1 + \alpha x_i)^{2-2r}}{E_n^2(\alpha)} \rightarrow 0.$$

Подчеркнём, что в (9) и всюду далее все пределы берутся при $n \rightarrow \infty$. Приведём теперь основные утверждения статьи.

Теорема 1. Пусть справедливо Предположение А и

$$(10) \quad \rho_{1,n} := (\alpha_n^* - \alpha)^2 A_{3,n}(\alpha) / E_n(\alpha) \xrightarrow{P} 0.$$

Тогда для состоятельной оценки α_n^* при всех c

$$(11) \quad \frac{\alpha_n^{**}(c) - \alpha}{d_n} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{при} \quad d_n = \frac{\sigma}{rE_n(\alpha)}.$$

Теорема 2. Пусть верно Предположение А и

$$(12) \quad \rho_{2,n} := |\alpha_n^* - \alpha|^3 A_{4,n}(\alpha) / E_n(\alpha) \xrightarrow{P} 0.$$

В этом случае для состоятельной оценки α_n^* сходимость (11) имеет место при $c = -1/2$.

Следствие 1. Для сходимости (10) достаточно выполнения условия

$$(13) \quad (\alpha_n^* - \alpha)^4 A_{4,n}(\alpha) \xrightarrow{P} 0.$$

А сходимость (12) вытекает из

$$(14) \quad (\alpha_n^* - \alpha)^6 A_{6,n}(\alpha) \xrightarrow{P} 0.$$

Оба утверждения Следствия 1 будут доказаны в следующем разделе, а в завершение текущего раздела мы приведём замечания о связи двух теорем.

Замечание 1. Если все наблюдения одинаково распределены и $x_i = x_1 > 0$ при всех i , то предположение (13) превратится в

$$(15) \quad n(\alpha_n^* - \alpha)^4 \xrightarrow{P} 0.$$

Но условие (15), в свою очередь, совпадает с классическим предположением из монографии [7, теорема 5.5.4].

Подчеркнём, что в этом случае условие (14) слабее, поскольку оно эквивалентно предположению $n(\alpha_n^* - \alpha)^6 \xrightarrow{P} 0$.

Замечание 2. Если α_n^* — состоятельная оценка параметра α , и верно условие (10), то (см. подробности в приводимой ниже Лемме 4)

$$\alpha \rho_{2,n} \leq |\alpha_n^* - \alpha| \cdot \rho_{1,n} \xrightarrow{P} 0.$$

То есть условия Теоремы 2 слабее условий Теоремы 1.

Замечание 3. В отличие от работ [3] и [8], в наших Теоремах 1 и 2 не делается каких-либо предположений о структуре состоятельной оценки α_n^* .

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

2.1. Срезка оценки α_n^* .

Лемма 1. Пусть для состоятельной оценки α_n^* выполнены все условия Теоремы 2. Тогда найдётся последовательность чисел $\{\gamma_n\}$ такая, что

$$\gamma_n \rightarrow 0, \quad \kappa_n := \frac{\gamma_n^3 A_{4,n}}{E_n(\alpha)} \rightarrow 0, \quad 0 < \gamma_n \leq \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \mathbb{P}(|\alpha_n^* - \alpha| > \gamma_n) \rightarrow 0.$$

Доказательство. Поскольку оценка α_n^* — состоятельная, то

$$p_n(\varepsilon) := \mathbb{P}(|\alpha_n^* - \alpha| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Следовательно, найдутся числа $\varepsilon_n > 0$ такие, что

$$(16) \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad p_n(\varepsilon_n) \rightarrow 0.$$

Далее, условие (12) можно переписать в виде

$$|\alpha_n^* - \alpha|^3 A_n^3 \xrightarrow{p} 0 \quad \text{при} \quad A_n^3 = \frac{A_{3,n}}{E_n(\alpha)} > 0.$$

Следовательно,

$$p_n\left(\frac{\varepsilon}{A_n}\right) = \mathbb{P}\left(|\alpha_n^* - \alpha| > \frac{\varepsilon}{A_n}\right) = \mathbb{P}(A_n^3 |\alpha_n^* - \alpha|^3 > \varepsilon^3) \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Значит, найдутся числа $\tilde{\varepsilon}_n > 0$ такие, что

$$(17) \quad \tilde{\varepsilon}_n \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad p_n(\tilde{\varepsilon}_n/A_n) \rightarrow 0.$$

Теперь выберем

$$(18) \quad \gamma_n = \min\{\varepsilon_n, \tilde{\varepsilon}_n/A_n, \alpha/2\} \leq \alpha/2.$$

Из (16) - (18) немедленно получаем

$$(19) \quad \gamma_n \leq \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \gamma_n^3 A_n^3 \leq (\tilde{\varepsilon}_n/A_n)^3 A_n^3 = \tilde{\varepsilon}_n^3 \rightarrow 0.$$

Кроме того, нетрудно понять, что

$$(20) \quad \mathbb{P}(|\alpha_n^* - \alpha| > \gamma_n) = \max\{p_n(\varepsilon_n), p_n(\tilde{\varepsilon}_n/A_n), p_n(\alpha/2)\} \rightarrow 0.$$

Из (18) – (20) следует, что введённые в (18) числа $\{\gamma_n\}$ удовлетворяют всем требованиям Леммы 1. $\square$

Определим последовательность случайных величин $\tilde{\alpha}$ следующим образом:

$$\tilde{\alpha} = \begin{cases} \alpha_n^*, & \text{если } |\alpha_n^* - \alpha| \leq \gamma_n; \\ \alpha, & \text{если } |\alpha_n^* - \alpha| > \gamma_n. \end{cases}$$

По аналогии с (7) введем теперь случайные величины

$$(21) \quad \tilde{\alpha}_n^{**}(c) = \tilde{\alpha} - \frac{H'_n(\tilde{\alpha})}{cH''_n(\tilde{\alpha}) + (1-c)2r^2E_n^2(\tilde{\alpha})}.$$

В силу Леммы 1 из (7) и (21) вытекает, что

$$\mathbb{P}(\tilde{\alpha}_n^{**}(c) \neq \alpha_n^{**}) \leq \mathbb{P}(\tilde{\alpha} \neq \alpha_n^*) = \mathbb{P}(|\alpha_n^* - \alpha| > \gamma_n) \rightarrow 0.$$

Таким образом, вместо (11) нам достаточно показать, что

$$(22) \quad \frac{\tilde{\alpha}_n^{**}(c) - \alpha}{d_n} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{при} \quad d_n = \frac{\sigma}{rE_n(\alpha)}.$$

2.2. Основное представление. Заметим, что выражение (21) можно переписать следующим образом

$$(23) \quad \tilde{\alpha}_n^{**}(c) - \alpha = \frac{(\tilde{\alpha} - \alpha)[cH_n''(\tilde{\alpha}) + (1 - c)2r^2E_n^2(\tilde{\alpha})] - H_n'(\tilde{\alpha})}{cH_n''(\tilde{\alpha}) + (1 - c)2r^2E_n^2(\tilde{\alpha})}.$$

Введём обозначения

$$(24) \quad \begin{aligned} \tilde{\delta} &:= \tilde{\alpha} - \alpha, \quad \Delta_E := E_n^2(\tilde{\alpha}) - E_n^2(\alpha) - 2(r - 1)\tilde{\delta}A_{3,n}(\alpha), \\ M(r) &:= 2r^2(r - 1), \quad \Delta_c := H_n''(\tilde{\alpha}) - 2r^2E_n^2(\tilde{\alpha}) - M(r)\tilde{\delta}A_{3,n}(\alpha), \\ \Delta &:= H_n'(\tilde{\alpha}) - H_n'(\alpha) - 2r^2\tilde{\delta}E_n^2(\tilde{\alpha}) + M(r)\tilde{\delta}^2A_{3,n}(\alpha)/2. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} cH_n''(\tilde{\alpha}) + (1 - c)2r^2E_n^2(\tilde{\alpha}) &= \\ &= 2r^2E_n^2(\alpha) + 2r^2\Delta_E + c\Delta_c + M(r)(c + 2)\tilde{\delta}A_{3,n}(\alpha), \end{aligned}$$

то с помощью (24) мы легко преобразуем (23) в выражение

$$(25) \quad \frac{\tilde{\alpha}_n^{**}(c) - \alpha}{d_n} = \frac{-\frac{H_n'(\alpha)}{2r\sigma E_n(\alpha)} + \frac{c\tilde{\delta}\Delta_c - \Delta}{2r\sigma E_n(\alpha)} + M(r)(c + 1/2)\frac{\tilde{\delta}^2A_{3,n}(\alpha)}{2r\sigma E_n(\alpha)}}{1 + \frac{2r^2\Delta_E + c\Delta_c + M(r)(c + 2)\tilde{\delta}A_{3,n}(\alpha)}{2r^2E_n^2(\alpha)}}.$$

Представление (25) является основой для доказательства обеих теорем.

2.3. Основная лемма.

Лемма 2. Если выполнены условия Теоремы 2 и оценка α_n^* состоятельная, то при всех c справедливы сходимости

$$(26) \quad \rho := \frac{c\Delta_c + 2r^2\Delta_E + M(r)(c + 2)\tilde{\delta}A_{3,n}(\alpha)}{E_n^2(\alpha)} \xrightarrow{p} 0,$$

$$(27) \quad \rho^* := \frac{c\tilde{\delta}\Delta_c - \Delta}{E_n(\alpha)} \xrightarrow{p} 0.$$

Это утверждение будет в несколько этапов доказано в третьем разделе.

2.4. Вспомогательные леммы.

Лемма 3. При выполнении Предположения A

$$(28) \quad W_n := -\frac{H_n'(\alpha)}{2r\sigma E_n(\alpha)} \Rightarrow \eta,$$

где случайная величина η имеет стандартное нормальное распределение.

Доказательство. Очевидно представление

$$(29) \quad W_n = \sum_{i \leq n} a_{i,n}\varepsilon_i, \quad \text{при} \quad a_{i,n} := \frac{1}{\sigma E_n(\alpha)} \cdot \frac{x_i}{(1 + \alpha x_i)^{1-r}}.$$

В этих обозначениях условие (9) можно переписать в следующем виде

$$(30) \quad \max_{i \leq n} |a_{i,n}| \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \sigma^2 \sum_{i \leq n} a_{i,n}^2 = 1.$$

Тот факт, что условие (30) достаточно для того, чтобы взвешенные суммы вида (29) удовлетворяли центральной предельной теореме можно найти, например, в [8, предложение 2.9]. $\square$

Лемма 4. *При выполнении Предположения А справедливы неравенства*

$$(31) \quad A_{3,n}^2(\alpha) \leq A_{4,n}(\alpha)E_n^2(\alpha), \quad A_{4,n}^2(\alpha) \leq A_{6,n}(\alpha)E_n^2(\alpha).$$

Кроме того, в этом случае

$$(32) \quad \alpha^2 A_{4,n}(\alpha) \leq \alpha A_{3,n}(\alpha) \leq E_n^2(\alpha) \rightarrow \infty.$$

Доказательство. При $w_i := (1 + \alpha x_i)^{-2r}$ заметим, что

$$(33) \quad 0 < q_i := \frac{\alpha x_i}{1 + \alpha x_i} < 1 \quad \text{и} \quad Z_k := \sum_{i \leq n} q_i^k w_i \leq Z_{k-1} \quad \forall k > 0.$$

Далее, в силу неравенства Шварца:

$$(34) \quad Z_{k+1}^2 = \left(\sum_{i \leq n} q_i^k \cdot q_i w_i \right)^2 \leq Z_{2k} Z_2 \quad \forall k > 0.$$

Чтобы теперь из (33) получить (32), а из (34) извлечь (31) нам нужно воспользоваться следующими тождествами:

$$\forall k > 0 \quad Z_k = \alpha^k A_{k,n}(\alpha) \quad \text{и} \quad Z_2 = \alpha^2 A_{2,n}(\alpha) = \alpha^2 E_n^2(\alpha).$$

Наконец, сходимость $E_n^2(\alpha) \rightarrow \infty$ вытекает из условия (9). $\square$

2.5. Доказательства теорем и их следствий. Используя обозначения, введенные в (26), (27) и (28), нетрудно заметить, что выражение (25) обращается в

$$(35) \quad \frac{\tilde{\alpha}_n^{**}(c) - \alpha}{d_n} = \frac{W_n + \rho^*/(2r\sigma) + \rho_0}{1 + \rho/(2r^2)}, \quad \rho_0 := M(r)(c + 1/2) \frac{\tilde{\delta}^2 A_{3,n}(\alpha)}{2r\sigma E_n(\alpha)}.$$

Таким образом, когда константа c равна $-1/2$, то $\rho_0 = 0$ и искомая сходимость (22) сразу следует из утверждения Леммы 2 и Леммы 3.

Пусть теперь справедливы только предположения Теоремы 1. Значит, ρ_0 сходится к нулю по вероятности в силу основного предположения этой теоремы. Ещё в этом случае мы можем воспользоваться утверждением из Замечания 2, которое вытекает из уже доказанной Леммы 4. Значит, выполнены и условия Теоремы 2. Поэтому искомая сходимость (22) опять следует из представления (35) и утверждения Леммы 2.

Наконец, оба утверждения Следствия 1 вытекают из неравенств (31).

Таким образом, все основные утверждения работы доказаны, и нам осталось лишь проверить справедливость Леммы 2.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2

3.1. **Детализация основного представления.** Введем обозначения

$$(36) \quad U(t) := \sum_{i \leq n} \frac{x_i(1 + \alpha x_i)^r}{(1 + tx_i)^{1-r}}, \quad V(t) := \sum_{i \leq n} \frac{x_i \varepsilon_i}{(1 + tx_i)^{1-r}},$$

$$(37) \quad A(t) := A_{1,n}(t), \quad B(t) := A_{2,n}(t) = E_n^2(t) \quad \text{так что} \quad A'(t) = (2r - 1)B(t).$$

Во введенных в (36) и (37) обозначениях, с учетом (4), (5) и (6), немедленно получаются следующие представления для наших производных:

$$(38) \quad H'_n(\tilde{\alpha}) = 2rA(\tilde{\alpha}) - 2rU(\tilde{\alpha}) - 2rV(\tilde{\alpha}),$$

$$(39) \quad H''_n(\tilde{\alpha}) = 2r(2r - 1)B(\tilde{\alpha}) - 2rU'(\tilde{\alpha}) - 2rV'(\tilde{\alpha}).$$

Для исследования функций из (38) и (39) нам удобно ввести следующие величины:

$$(40) \quad \Delta_A := A(\tilde{\alpha}) - A(\alpha) - \tilde{\delta}A'(\alpha) - \tilde{\delta}^2A''(\alpha)/2, \quad \Delta_V := V(\tilde{\alpha}) - V(\alpha), \\ \Delta_U := U(\tilde{\alpha}) - U(\alpha) - \tilde{\delta}U'(\alpha) - \tilde{\delta}^2U''(\alpha)/2, \quad \Delta_u := U'(\tilde{\alpha}) - U'(\alpha) - \tilde{\delta}U''(\alpha).$$

Лемма 5. *Справедливы представления*

$$(41) \quad \Delta = 2r[\Delta_A - \Delta_U - r\Delta_E - \Delta_V] \quad \text{и} \quad \Delta_c = 2r[(2r - 1)\Delta_E - \Delta_u - V'(\tilde{\alpha})].$$

Кроме того

$$(42) \quad \Delta_E = B(\tilde{\alpha}) - B(\alpha) - \tilde{\delta}B'(\alpha) \quad \text{и} \quad H'_n(\alpha) = V(\alpha).$$

Доказательство. В определениях из (24) постоянные перед слагаемыми, содержащими множитель $A_{3,n}(\alpha)$, были специально подобраны так, чтобы выполнялись все равенства в (41) и (42). Чтобы убедиться, что эти постоянные вычислены правильно, надо использовать следующие равенства:

$$A(\alpha) = U(\alpha), \quad A'(\alpha) = (2r - 1)E_n^2(\alpha), \quad U'(\alpha) = (r - 1)E_n^2(\alpha), \\ B'(\alpha) = 2(r - 1)A_{3,n}, \quad A''(\alpha) = (2r - 1)B'(\alpha), \quad U''(\alpha) = (r - 1)(r - 2)A_{3,n}(\alpha), \\ \text{и } B(\alpha) = E_n^2(\alpha). \quad \square$$

3.2. **Использование разложения в ряд Тейлора.** Прежде всего напомним, что при всех действительных p

$$(43) \quad (1 + x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(p)x^k \quad \text{при} \quad |x| < 1,$$

где

$$C_0(p) = 1 \quad \text{и} \quad C_k(p) = \frac{p \cdot \dots \cdot (p - k + 1)}{k!} = \frac{d}{dx^k}(1 + x)^p|_{x=0}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Причём ряд в (43) абсолютно сходится при $|x| < 1$. В частности, для всех p

$$(44) \quad K_m(p) := \sum_{k=m}^{\infty} |C_k(p)|/2^{k-m} < \infty \quad \forall m \geq 0.$$

С другой стороны,

$$(45) \quad \frac{1}{1 + \tilde{\alpha}x_i} = \frac{1}{1 + \alpha x_i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\tilde{\alpha}x_i - \alpha x_i}{1 + \alpha x_i}} = \frac{(1 + \delta q_i)^{-1}}{1 + \alpha x_i} \quad \text{при} \quad \delta = \frac{\tilde{\alpha} - \alpha}{\alpha},$$

где, при $x_i > 0$ и $\alpha > 0$ ввиду Леммы 1

$$(46) \quad 0 < q_i = \frac{\alpha x_i}{1 + \alpha x_i} < 1, \quad |\delta q_i| < |\delta| \leq \frac{\gamma_n}{\alpha} \leq \frac{1}{2}.$$

Из (43), (45) и (46) вытекает следующее полезное представление:

$$(47) \quad \sum_{i \leq n} \frac{\rho_i}{(1 + \tilde{\alpha} x_i)^p} = \sum_{i \leq n} \frac{\rho_i (1 + \delta q_i)^{-p}}{(1 + \alpha x_i)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(-p) \delta^k \sum_{i \leq n} \frac{\rho_i q_i^k}{(1 + \alpha x_i)^p},$$

которое верно для всех $\{\rho_i\}$.

3.3. Оценивание рядов Тейлора. При $k \geq 0$ нам потребуются следующие обозначения:

$$(48) \quad Z_k = \sum_{i \leq n} \frac{q_i^k}{(1 + \alpha x_i)^{-2r}}, \quad Z_k^* = \sum_{i \leq n} \frac{x_i^2 \varepsilon_i q_i^k}{(1 + \alpha x_i)^{2-r}}.$$

Лемма 6. В условиях Леммы 1

$$(49) \quad |\Delta_A| \leq K_3(2r-1)\gamma_n^3 A_{4,n}(\alpha), \quad |\Delta_U| \leq K_3(r-1)\gamma_n^3 A_{4,n}(\alpha),$$

$$(50) \quad |\Delta_E| \leq K_2(2r-2)\gamma_n^2 A_{4,n}(\alpha), \quad |\Delta_u| \leq |r-1|K_2(r-2)\gamma_n^2 A_{4,n}(\alpha).$$

Доказательство. Прежде всего мы четыре раза воспользуемся представлением (47) и определениями (40) и (48). Учитывая еще (6) мы при $\rho_i = x_i$ и $p = 1 - 2r$ получаем

$$(51) \quad \Delta_A = \sum_{k \geq 3} C_k(2r-1)\delta^k \sum_{i \leq n} \frac{x_i q_i^k}{(1 + \alpha x_i)^{1-2r}} = \sum_{k \geq 3} C_k(2r-1)\delta^k Z_{k+1}/\alpha.$$

А при $\rho_i = x_i(1 + \alpha x_i)^r$ и $p = 1 - r$ ввиду (36) имеем

$$(52) \quad \Delta_U = \sum_{k \geq 3} C_k(r-1)\delta^k \sum_{i \leq n} \frac{x_i(1 + \alpha x_i)^r q_i^k}{(1 + \alpha x_i)^{1-r}} = \sum_{k \geq 3} C_k(r-1)\delta^k Z_{k+1}/\alpha.$$

Далее, в силу (6) и (37) при $\rho_i = x_i^2$ и $p = 2 - 2r$ находим:

$$(53) \quad \Delta_E = \sum_{k \geq 2} C_k(2r-2)\delta^k \sum_{i \leq n} \frac{x_i^2 q_i^k}{(1 + \alpha x_i)^{2-2r}} = \sum_{k \geq 3} C_k(2r-2)\delta^k Z_{k+2}/\alpha^2.$$

Наконец, при $\rho_i = x_i^2(1 + \alpha x_i)^r$ и $p = 2 - r$ из (36) и (40) получается:

$$(54) \quad \Delta_u = (r-1) \sum_{k \geq 2} C_k(r-2)\delta^k \sum_{i \leq n} \frac{x_i^2(1 + \alpha x_i)^r q_i^k}{(1 + \alpha x_i)^{2-r}} = \sum_{k \geq 3} C_k(r-2)\delta^k Z_{k+2}/\alpha^2.$$

Поскольку $q_i < 1$, то

$$(55) \quad Z_m = \sum_{i \leq n} \frac{q_i^m}{(1 + \alpha x_i)^{-2r}} \leq Z_4 = \alpha^4 A_{4,n}(\alpha) \quad \forall m \geq 4.$$

Следовательно, из (46), (55) и (44) мы находим, что при любом p

$$\left| \sum_{k \geq 3} C_k(p)\delta^k Z_{k+1}/\alpha \right| \leq \sum_{k \geq 3} |C_k(p)| \frac{\gamma_n^3}{\alpha^3 2^{k-3}} \alpha^4 A_{4,n}/\alpha = \gamma_n^3 K_3(p) A_{4,n}.$$

Подставляя это неравенство в (51) и (52) при $p = 2r - 1$ и $p = r - 1$ мы получаем обе оценки в (49).

Используя опять (46), (55) и (44), мы при любом p имеем:

$$\left| \sum_{k \geq 2} C_k(p) \delta^k Z_{k+1} / \alpha^2 \right| \leq \sum_{k \geq 2} |C_k(p)| \frac{\gamma_n^2}{\alpha^2 2^{k-2}} \alpha^4 A_{4,n} / \alpha^2 = \gamma_n^2 K_2(p) A_{4,n}.$$

Подставляя эту оценку в (53) и (54) при $p = 2r - 2$ и $p = r - 2$ мы находим обе оценки в (50). $\square$

Лемма 7. В условиях Леммы 1

$$(56) \quad |V'(\tilde{\alpha})| \leq |r - 1| \sum_{k \geq 0} |C_k(r - 2) Z_k^*| / 2^k.$$

$$(57) \quad |\Delta_V| \leq \gamma_n \sum_{k \geq 1} |C_k(r - 1) Z_{k-1}^*| / 2^{k-1}.$$

Доказательство. Воспользуемся ещё два раза представлением (47) и определениями (40), (48) и (36). В итоге при $\rho_i = x_i^2 \varepsilon_i$ и $p = 2 - r$ находим:

$$(58) \quad V'(\tilde{\alpha}) = (r - 1) \sum_{k \geq 0} C_k(r - 2) \delta^k \sum_{i \leq n} \frac{x_i^2 \varepsilon_i q_i^k}{(1 + \alpha x_i)^{2-r}} = (r - 1) \sum_{k \geq 0} C_k(r - 2) \delta^k Z_k^*.$$

А при $\rho_i = x_i \varepsilon_i$ и $p = 1 - r$ получаем:

$$\Delta_V = \sum_{k \geq 1} C_k(r - 1) \delta^k \sum_{i \leq n} \frac{x_i \varepsilon_i q_i^k}{(1 + \alpha x_i)^{1-r}} = \sum_{k \geq 1} C_k(r - 1) \delta^k \alpha Z_{k-1}^*.$$

Далее, используя опять (46), имеем:

$$|\Delta_V| \leq \sum_{k \geq 1} |C_k(r - 1)| \frac{\gamma_n}{\alpha 2^{k-1}} \alpha |Z_{k-1}^*|.$$

Таким образом, мы получили (57). Оценка (56) немедленно вытекает из (58), поскольку $|\delta| \leq 1/2$. $\square$

3.4. Оценки для математических ожиданий.

Лемма 8. В условиях Леммы 1

$$(59) \quad \mathbb{E}|V'(\tilde{\alpha})| \leq |r - 1| K_0(r - 2) \sigma \sqrt{A_{4,n}(\alpha)},$$

$$(60) \quad \mathbb{E}|\Delta_V| \leq K_1(r - 1) \gamma_n \sigma \sqrt{A_{4,n}(\alpha)}.$$

Доказательство. Поскольку $\{\varepsilon_i\}$ — независимы и одинаково распределены и $0 < q_i < 1$, то в силу (8)

$$\mathbb{E}(Z_k^*)^2 = \mathbb{D}Z_k^* = \sigma^2 \sum_{i \leq n} \frac{x_i^4 q_i^{2k}}{(1 + \alpha x_i)^{4-2r}} < \sigma^2 \sum_{i \leq n} \frac{x_i^4}{(1 + \alpha x_i)^{4-2r}} = \sigma^2 A_{4,n}(\alpha)$$

при всех $k \geq 0$. Значит,

$$(61) \quad \mathbb{E}|Z_k^*| \leq \sqrt{\mathbb{E}(Z_k^*)^2} \leq \sigma \sqrt{A_{4,n}(\alpha)}.$$

Таким образом, из утверждений (56) и (57) Леммы 7 мы получаем, соответственно, что

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|V'(\tilde{\alpha})| &\leq |r-1| \sum_{k \geq 0} |C_k(r-2)| \mathbb{E}|Z_k^*|/2^k \leq |r-1| \sigma \sqrt{A_{4,n}(\alpha)} \sum_{k \geq 0} |C_k(r-2)|/2^k. \\ \mathbb{E}|\Delta_V| &\leq \gamma_n \sum_{k \geq 1} |C_k(r-1)| \mathbb{E}|Z_{k-1}^*|/2^{k-1} \leq \gamma_n \sigma \sqrt{A_{4,n}(\alpha)} \sum_{k \geq 1} |C_k(r-1)|/2^{k-1}.\end{aligned}$$

Эти оценки и (44) дают нам (59) и (60). $\square$

Напомним, что постоянная $M(r)$ определена в (24), а величины γ_n и κ_n введены в Лемме 1.

Лемма 9. *В условиях Леммы 1*

$$(62) \quad \mathbb{E}|\rho^*| \leq (1+|c|)M_1(r)\kappa_n + (1+|c|)M_2(r)\sigma\gamma_n/\alpha,$$

$$(63) \quad \alpha\mathbb{E}|\rho| \leq (1+|c|)M_1(r)\gamma_n^2/\alpha + |c|M_2(r)\sigma/E_n(\alpha) + |M(r)(c+2)|\gamma_n,$$

где $M_1(r)$ и $M_2(r)$ — зависящие от r константы, явный вид которых будет дан в доказательстве.

Доказательство. Прежде всего заметим, что утверждения Лемм 6 и 8 можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}(64) \quad &|2r\Delta_A| \leq M_A(r)\gamma_n^3 A_{4,n}(\alpha), \quad |2r\Delta_U| \leq M_U(r)\gamma_n^3 A_{4,n}(\alpha), \\ &|2r\Delta_E| \leq M_E(r)\gamma_n^2 A_{4,n}(\alpha), \quad |2r\Delta_u| \leq M_u(r)\gamma_n^2 A_{4,n}(\alpha), \\ &\mathbb{E}|2rV'(\tilde{\alpha})| \leq M_v(r)\sigma\sqrt{A_{4,n}(\alpha)}, \quad \mathbb{E}|2r\Delta_V| \leq M_V(r)\gamma_n\sigma\sqrt{A_{4,n}(\alpha)}.\end{aligned}$$

Введем теперь постоянные

$$(65) \quad \begin{aligned}M_1(r) &:= M_A(r) + M_U(r) + (2|r|+1)M_E(r) + M_u(r), \\ M_2(r) &:= M_V(r) + M_v(r).\end{aligned}$$

Подставляя оценки из (64) в (41) находим

$$(66) \quad \begin{aligned}\mathbb{E}|\Delta| &\leq \mathbb{E}|2r\Delta_A| + \mathbb{E}|2r\Delta_U| + |r|\mathbb{E}|2r\Delta_E| + \mathbb{E}|2r\Delta_V| \\ &\leq M_1(r)\gamma_n^3 A_{4,n}(\alpha) + M_2(r)\gamma_n\sigma\sqrt{A_{4,n}(\alpha)}.\end{aligned}$$

Аналогично из (41), (64) и (65) получаем

$$(67) \quad \begin{aligned}\mathbb{E}|\Delta_c| &\leq |2r-1|\mathbb{E}|2r\Delta_E| + \mathbb{E}|2r\Delta_u| + \mathbb{E}|2rV'(\tilde{\alpha})| \\ &\leq M_1(r)\gamma_n^2 A_{4,n}(\alpha) + M_2(r)\sigma\sqrt{A_{4,n}(\alpha)}.\end{aligned}$$

Далее, из (26) нетрудно извлечь оценку

$$(68) \quad E_n^2(\alpha)\mathbb{E}|\rho| \leq 2r^2\mathbb{E}|\Delta_E| + |c|\mathbb{E}|\Delta_c| + |M(r)(c+2)|A_{3,n}(\alpha)\mathbb{E}|\tilde{\delta}|$$

А поскольку $|\tilde{\delta}| = |\tilde{\alpha} - \alpha| \leq \gamma_n$ в силу Леммы 1, то подставляя (64) и (67) в (68), имеем

$$(69) \quad \begin{aligned}E_n^2(\alpha)\mathbb{E}|\rho| &\leq (1+|c|)M_1(r)\gamma_n^2 A_{4,n}(\alpha) + \\ &+ |c|M_2(r)\sigma\sqrt{A_{4,n}(\alpha)} + |M(r)(c+2)|A_{3,n}(\alpha)\gamma_n.\end{aligned}$$

Аналогично, из (27), (66) и (67) находим

$$(70) \quad \begin{aligned} E_n(\alpha) \mathbb{E}|\rho^*| &\leq |c| \mathbb{E}|\tilde{\delta}\Delta_c| + \mathbb{E}|\Delta| \leq |c| \gamma_n \mathbb{E}|\Delta_c| + \mathbb{E}|\Delta| \\ &\leq (1 + |c|) M_1(r) \gamma_n^3 A_{4,n}(\alpha) + (1 + |c|) M_2(r) \sigma \gamma_n \sqrt{A_{4,n}(\alpha)}. \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha A_{3,n}(\alpha) \leq E_n^2(\alpha)$ и $\alpha \sqrt{A_{4,n}(\alpha)} \leq E_n(\alpha)$ в силу Леммы 4, то из (70) вытекает (62), а из (69) следует (63). $\square$

3.5. Доказательство Леммы 2. Поскольку $\gamma_n \rightarrow 0$ и $\kappa_n \rightarrow 0$ в силу Леммы 1, а $E_n(\alpha) \rightarrow \infty$ ввиду Леммы 4, то из Леммы 9 очевидным образом вытекает, что

$$\mathbb{E}|\rho^*| \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \mathbb{E}|\rho| \rightarrow 0.$$

Но из этих фактов, в силу неравенства Чебышёва, немедленно следуют обе сходимости по вероятности в (26) и в (27), что завершает доказательство Леммы 2.

Таким образом, все утверждения работы доказаны полностью.

REFERENCES

- [1] E. Z. Demidenko, *Optimization and Regression*, Moskva: Nauka, 1989. MR1007832
- [2] E. N. Savinkina, A. I. Sakhanenko, *Explicit estimators of an unknown parameter in a power regression problem*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2014), 725–733. MR3488452
- [3] Yu. Yu. Linke, A. I. Sakhanenko, *Asymptotically normal estimation of a parameter in a linear-fractional regression problem*, Siberian Mathematical Journal, **41**:1 (2000), 125–137. MR1756483
- [4] X. V. Yermolenko, A. I. Sakhanenko, *Explicit asymptotically normal estimators of an unknown parameter in a partially linear regression problem*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **10** (2013), 719–726. MR3262344
- [5] A. A. Kalenchuk, A. I. Sakhanenko, *The existence of explicit asymptotically normal estimators of an unknown parameter in a logarithmic regression problem*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 874–883. MR3493805
- [6] R. A. Fisher, *Theory of statistical estimation*, Proc. Camb. Phil. Soc., **22** (1925), 700–725. JFM 51.0385.01
- [7] Sh. Zacks, *The theory of statistical inference*, Moskva: Mir, 1975. MR0420924
- [8] Yu. Yu. Linke, A. I. Sakhanenko, *Asymptotically normal estimation in the linear-fractional regression problem with random errors in coefficients*, Siberian Mathematical Journal, **49**:3 (2008), 474–497. MR2442541

EKATERINA NIKOLAEVNA SAVINKINA
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 4, KOPTYUGA AVE.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA;
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 1, PIROGOVA STR.,
 NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: savinkinae@gmail.com

ALEXANDER IVANOVICH SAKHANENKO
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
4, KOPTYUGA AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA;
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
1, PIROGOVA STR.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: `aisakh@mail.ru`