Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. A. Lomov, On convergence of M. Osborne' inverse iteration algorithms for modified Prony method, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1916–1926

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.137>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.237.59.107

April 26, 2023, 16:45:27

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1916–1926 (2019)

УДК 519.6

DOI 10.33048/semi.2019.16.137

MSC 65F15, 41A30

О СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМОВ М. ОСБОРНА
С ОБРАТНЫМИ ИТЕРАЦИЯМИ В МОДИФИЦИРОВАННОМ
МЕТОДЕ ПРОНИ

А.А. ЛОМОВ

ABSTRACT. A convergence of two inverse iteration algorithms of M. Osborne in the nonlinear eigenvalue problem of modified Prony method under small perturbations is investigated.

Keywords: difference equations, parameter identification, modified Prony method, nonlinear eigenvalue problem, inverse iteration, semilocal convergence.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье исследуется сходимость вычислительных алгоритмов модифицированного метода Прони [1, 2] для извлечения синусоид и экспонент из наблюдений экспериментальных зависимостей [3]. Краткая предыстория вопроса изложена в [4]. По существу речь идет о задаче аппроксимации сеточной функции $x \in \mathbb{R}^N$ решениями $z \doteq [z[1]; \dots; z[N]] \in \mathbb{R}^N$ однородного разностного уравнения с вещественными коэффициентами

$$(1) \quad \gamma_0 z[k] + \gamma_1 z[k+1] + \dots + \gamma_n z[k+n] = 0, \quad k \in \overline{1, N-n}.$$

Требуется подобрать начальные условия $z[1], \dots, z[n]$ и коэффициенты $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$ с целью минимизации целевой функции

$$(2) \quad J = \|x - z\|^2 = (x - z)^T (x - z) \rightarrow \min$$

при условии (1). Известно, что данная задача плохо обусловлена [5, 6], и для применения универсальных градиентных или квазиньютоновских алгоритмов

LOMOV, A.A., ON CONVERGENCE OF M. OSBORNE' INVERSE ITERATION ALGORITHMS FOR MODIFIED PRONY METHOD.

© 2019 Ломов А.А.

Работа поддержана РФФИ (грант 19-01-00754).

Поступила 8 июля 2019 г., опубликована 17 декабря 2019 г.

требуется знание хорошего начального приближения по γ_i . Вычислительные решения с большими радиусами и скоростью сходимости [1, 6, 7] впервые были найдены М. Осборном [8, 9] и А. О. Егоршиным [10, 11] с применением обратных итераций для нахождения собственного вектора с минимальным по модулю собственным значением специальной матрицы в выражении для целевой функции J или для градиента J'_γ (раздел 2). Данный подход получил название модифицированного метода Прони [1] или вариационного метода идентификации [11].

В обзоре [6] отмечена недостаточная изученность алгоритмов с обратными итерациями в нелинейной задаче на собственные значения, связанной с модифицированным методом Прони. В [1] была доказана локальная сходимость второго алгоритма М. Осборна [8] через выполнение условия сжатия в точке минимума. В [7] обсуждалась скорость сходимости обратных итераций в нелинейной задаче на собственные значения в окрестности минимума. В [4] в предположении малости возмущений установлены глобальная сходимость первого алгоритма М. Осборна [9] к неподвижной точке и положение неподвижной точки в малой окрестности минимума.

В настоящей статье исследуется полулокальная сходимость второго алгоритма М. Осборна [8]. В отличие от локальной сходимости, полулокальная означает выполнение условий сжатия итерирующего отображения в каждой точке некоторой окрестности минимума.

2. ДВА АЛГОРИТМА М. ОСБОРНА

В матричных обозначениях [4] уравнение (1) имеет вид

$$(3) \quad G^T z = 0,$$

$$G^T \doteq \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & 1 & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \doteq \backslash \gamma^T \backslash \in \mathbb{R}^{(N-n) \times N}.$$

После минимизации (2) по z при условии (1) приходим к выражению

$$(4) \quad J = J(\gamma) = \gamma^T V^T C V \gamma, \quad C \doteq (G^T G)^{-1} \in \mathbb{R}^{(N-n) \times (N-n)},$$

$$\gamma \doteq [\gamma_0; \dots; \gamma_{n-1}; 1] \in \mathbb{R}^{n+1},$$

$$(5) \quad V \doteq \begin{bmatrix} x[1] & x[2] & \dots & x[n+1] \\ x[2] & x[3] & \dots & x[n+2] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x[N-n] & x[N-n+1] & \dots & x[N] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-n) \times N}.$$

В [9] М. Осборн предложил алгоритм приближенной минимизации $J(\gamma)$ (4). После попадания в малую окрестность минимума в результате итераций этого алгоритма появляется возможность нахождения минимума универсальными итерациями типа Ньютона. Матрица $Q \doteq V^T C V$ неотрицательно определена. Пусть $\lambda_1(Q) \geq 0$ и $p_1(Q)$ — наименьшее собственное значение и соответствующий собственный вектор Q , и наблюдения x таковы, что число $\lambda_1(Q)$ некрatное. Алгоритм М. Осборна [9] имеет вид

$$(6) \quad \gamma_{[k+1]} = p_1(Q(\gamma_{[k]})), \quad k \geq 0.$$

Вычислительные эксперименты показывают [2], что итерации (6) малочувствительны к выбору $\gamma_{[0]}$ и имеют предельную точку в малой окрестности минимума J (4). В [4] в предположении малости нормы возмущений $\min_{z:(1)} \|x-z\|$ предложены доказательства этих экспериментально обнаруженных свойств.

Для исследования второго алгоритма М. Осборна [8] далее понадобятся формулировки трех теорем из [4]. Принято, что нормы матриц $\|A\| \doteq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ согласованы с евклидовой нормой $\|x\| \doteq \sqrt{x^T x}$. Пусть наблюдения $x = z_* + \eta$ порождены добавлением возмущения η к «истинному» процессу z_* , $G^T(\gamma_*)z_* = 0$.

Теорема 1. Пусть в области Γ , содержащей истинную точку γ_* и точки $\gamma_{[k]}$, $k \geq k_*$ при некотором $k_* \geq 0$, выполнено условие на малость $\lambda_1(Q)$ и тем самым на малость нормы возмущения $\|x - z_*\|$:

$$(7) \quad \frac{2n \cdot \sqrt{\lambda_1} \cdot \|C\| \cdot \|V\|}{\lambda_2 - \lambda_1} < 1.$$

Тогда отображение $\gamma_{[k]} \rightarrow \gamma_{[k+1]}$, при $k \geq k_*$ в итерации (6) является сжимающим, следовательно, имеет единственную неподвижную точку в Γ .

Следствие 1. Пусть в области Γ выполнено $\|C\| \leq a$, $\|V\| \leq b$. Тогда для сжатия в отображении $\gamma_{[k]} \rightarrow \gamma_{[k+1]}$ (6) достаточно условия

$$\sqrt{\lambda_1} < \sqrt{\varrho^2 + \lambda_2} - \varrho, \quad \varrho \doteq nab.$$

Теорема 2. Все элементы $\gamma_{[k]}$ в итерациях (6) при $k \geq k_* = 1$ остаются в следующей окрестности истинной точки γ_* :

$$(8) \quad \frac{\|\gamma_{[k]} - \gamma_*\|}{\|\gamma_*\|} \leq \frac{\alpha' \cdot \|C_*\| \cdot \|V_*\|^2}{\lambda_{2*}} \tilde{\varepsilon} + O(\tilde{\varepsilon}^2) \leq \\ \leq \frac{\alpha \cdot \|C_*\| \cdot \|V_*\|^2}{\lambda_{2*}} \tilde{\varepsilon}, \quad \tilde{\varepsilon} \doteq \frac{\varepsilon}{\|V_*\|} \doteq \frac{\|V - V_*\|}{\|V_*\|} = \frac{\|V(x - z_*)\|}{\|V(z_*)\|}.$$

Константа α' определена условием $\|C_{[k]}\| \leq \alpha' \|C_*\|$, $k \geq 0$, которое можно рассматривать как ограничение на начальное значение $\gamma_{[0]}$, а константа $\alpha > \alpha'$ определяется условием мажорирования слагаемых $O(\tilde{\varepsilon}^2)$ в (8).

Теорема 3. Пусть выполнены условия

$$\varepsilon < \frac{1}{5n\|C_*\|^{1/2}} \cdot \frac{\lambda_2}{\alpha \|C_*\| \cdot \|V_*\| \cdot \|\gamma_*\|} \quad \text{и} \quad \varepsilon < \|V_*\|.$$

Тогда следующее неравенство является достаточным для выполнения условия теоремы 1 в области (8):

$$\varepsilon < \frac{\varepsilon_*}{f_1^{1/2}}, \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_* &\doteq \frac{\sqrt{\omega^2 + \lambda_2} - \omega}{\sqrt{2}\|C_*\|}, \quad \omega \doteq 4n\|C_*\| \cdot \|V_*\|, \\
f_1 &\doteq \alpha_0 + \alpha_1\|V_*\| + \alpha_2\|V_*\|^2, \\
\alpha_0 &\doteq 1 + \frac{2n(\sqrt{\lambda_2}\|C_*\|^{1/2} + \|C_*\| \cdot \|V_*\|)}{\lambda_2} \cdot \|V_*\|, \\
\alpha_1 &\doteq \frac{2n(\sqrt{\lambda_2}\|C_*\|^{1/2} + 3\|C_*\| \cdot \|V_*\|)}{\lambda_2}, \quad \alpha_2 \doteq \frac{4n\|C_*\|}{\lambda_2}.
\end{aligned}$$

Доказательства теорем 1–3 и следствия 1 даны в [4].

Второй алгоритм М. Осборна [8] в отличие от (6) находит точный минимум (4). Для описания алгоритма определим постоянные матрицы частных производных $E_i \doteq \frac{\partial G}{\partial \gamma_i}$. Верны равенства

$$G = E_0\gamma_0 + \dots + E_n\gamma_n, \quad E_{i-1}^T x = V_i, \quad i \in \overline{1, n+1},$$

где V_i — i -й столбец матрицы V . Производная целевой функции:

$$\begin{aligned}
J'_i &\doteq \frac{\partial J}{\partial \gamma_i} = 2x^T E_i C G^T x - 2x^T G C G^T E_i C G^T x \doteq 2 \sum_j B_{ij} \gamma_j, \\
B_{ij} &\doteq x^T (E_i C E_j^T - G C E_j^T E_i C G^T) x = \\
(9) \quad &= V_i^T C V_j - x^T G C E_i^T E_j C G^T x.
\end{aligned}$$

В матричной записи

$$(10) \quad J' = 2B(\gamma)\gamma = 2(Q - L^T L)\gamma,$$

где $B(\gamma) \doteq \|B_{ij}\|$ — симметричная матрица,

$$L \doteq [L_1 \quad \dots \quad L_{n+1}], \quad L_i \doteq E_i C G^T x.$$

Матрица L тёплицева:

$$(11) \quad L^T = \begin{bmatrix} l_1 & \dots & l_{N-n} & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & l_1 & \dots & l_{N-n} \end{bmatrix} \doteq \setminus l^T \setminus \in \mathbb{R}^{(n+1) \times N}.$$

Здесь $l \doteq [l_1; \dots; l_{N-n}] = C G^T x = C V \gamma$ — вектор множителей Лагранжа в задаче (2) (см. [8, 12]).

Обозначим $p_0(B)$ собственный вектор матрицы $B(\gamma)$, соответствующий собственному числу с наименьшим модулем. Второй алгоритм М. Осборна [8, (5.4)], [1, (15)] состоит в итерациях

$$(12) \quad \gamma_{[k+1]} = p_0(B(\gamma_{[k]})), \quad k \geq 0.$$

Несложно убедиться, что критические точки $J' = 0$ являются неподвижными точками алгоритма (12).

3. ПОЛУЛОКАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ АЛГОРИТМА (12)

В предельном случае $\eta \rightarrow 0$ матрица $B(\gamma)$ (10) принимает значение

$$\begin{aligned}
B(\gamma) &\rightarrow B_*(\gamma) \doteq V_*^T C V_* - L_*^T L_*, \\
L_* &= \setminus l_*^T \setminus, \quad l_* = C V_* \gamma = l_*(\gamma).
\end{aligned}$$

Исследование глобальной сходимости (12) затруднено сложной структурой матрицы $L_*^T L_*$ и неясным поведением собственного вектора $p_0(B_*)$ как функции γ . Тем не менее, в малой окрестности γ_* вектор множителей Лагранжа l_* близок к нулю, и можно получить условие на сжатие отображения $\gamma_{[k]} \rightarrow \gamma_{[k+1]}$ (12). Применение теории возмущений позволяет описать окрестность гарантированной сходимости алгоритма с точностью до слагаемых $O(\varepsilon^2)$. В [1] через исследование спектрального радиуса матрицы производной Фреше $\dot{F}(\gamma_c) \doteq \frac{d\gamma_{[k+1]}}{d\gamma_{[k]}}(\gamma_c)$ было доказано, что алгоритм (12) устойчив в неподвижных точках γ_c , $J'(\gamma_c) = 0$. Здесь мы найдем окрестность, в которой спектральный радиус $\rho(\dot{F}(\gamma))$ удовлетворяет условию сжатия $\rho < 1$. В этом смысле говорится о полулокальной сходимости.

Будем считать, что вектор $\gamma_{[k]}$ получен после итерации (6), и согласно теореме 2 находится в окрестности Δ_* истинного значения γ_* :

$$(13) \quad \gamma_{[k]} \in \Delta_* \doteq \{\gamma : \|\gamma - \gamma_*\| \leq c_* \varepsilon\}, \quad c_* = \frac{\alpha \cdot \|C_*\| \cdot \|V_*\| \cdot \|\gamma_*\|}{\lambda_{2*}}.$$

Теорема 4. Пусть в произвольной точке $\gamma \in \Delta_*$ выполнено следующее условие на малость λ_1 и тем самым на малость нормы возмущения $\varepsilon = \|V - V_*\|$:

$$(14) \quad \frac{2\|C\| \cdot \|V\|}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left[n \sqrt{\lambda_1} + c_2 \varepsilon \right] < 1, \\ c_2 \doteq (N - n) \left(\frac{\alpha \|C\| \cdot \|V\|^2}{\lambda_2} + 1 \right) \cdot \|C\| \cdot \|\gamma\|,$$

где λ_i , $i \in \overline{1, n+1}$, — собственные числа матрицы Q (9), (10), упорядоченные по возрастанию. Тогда для любого $\gamma_{[k]} \in \Delta_*$ отображение $\gamma_{[k]} \rightarrow \gamma_{[k+1]}$ в итерации (12) является сжимающим.

Следствие 2. В условиях теоремы 4 в области Δ_* (13) верны следующие утверждения:

- (а) целевая функция J (2) имеет критическую точку $J'(\gamma_c) = 0$;
- (б) критическая точка γ_c единственная;
- (в) γ_c есть точка минимума;
- (г) итерации (12) сходятся к γ_c .

Доказательство следствия. Пункты (б) и (г) следуют из принципа сжимающих отображений и того факта, что γ_c есть неподвижная точка итераций (12). Пункт (в) следует из оценки строгой положительной определенности матрицы вторых производных $J'' > 0$ в окрестности точки γ_* при малых возмущениях $\varepsilon \rightarrow 0$ [1, 13]. Остается доказать пункт (а), который по сути означает, что итерации (12) не выходят из области Δ_* .

Пусть для итераций (12) $\gamma_{[k]} \in \Delta_*$. Тогда в (10) $L(\gamma_{[k]}) \sim O(\varepsilon)$ и $\|L^T L\| \sim O(\varepsilon^2)$, и можно рассматривать матрицу $B(\gamma)$ как $Q(\gamma)$ с малым возмущением $L^T L$. По теории возмущений [4, (16)] норма отклонения $d\gamma_{[k+1]}$ результата итерации (12) от итерации (6) имеет второй порядок малости по ε :

$$(15) \quad \|d\gamma_{[k+1]}\| \leq \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \|L^T L \cdot p_1\| + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2).$$

Поскольку итерации (6) с точностью до слагаемых $O(\varepsilon^2)$ остаются в области Δ_* (теорема 2), то же имеет место и для итераций (12). Следствие доказано.

Следствие 3. Пусть в окрестности Δ_* (13) выполнено (14). Тогда для любого начального значения $\gamma_{[0]}$ с условием $\|C_{[0]}\| \leq \alpha \|C_*\|$ последовательное применение одного шага алгоритма (6) и затем итераций (12) приводит к точке $\gamma_c \in \Delta_*$ локального минимума целевой функции J (1), и эта точка единственная в окрестности Δ_* (13) истинного значения γ_* .

Доказательство. По теореме 2 после одного шага алгоритма (6) попадаем в окрестность $\gamma_{[1]} \in \Delta_*$. Далее теорема 4 и следствие 2. $\square$

В заключение сформулируем утверждение об условиях сжатия итераций (12) в области Δ_* (13), аналогичное теореме 3 для итераций (6).

Теорема 5. Пусть выполнены условия и обозначения теоремы 3 и дополнительно $\varepsilon < \frac{\lambda_2}{c_3}$, $c_3 \doteq \frac{2\omega}{n} c_2$, где константа c_2 определена в (14). Тогда следующее неравенство является достаточным для выполнения условия теоремы 4 в области Δ_* (13):

$$\varepsilon < \frac{\varepsilon_*}{f_1^{1/2} + \left(\frac{2\omega c_2}{n\lambda_2}\right) \varepsilon_*}.$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 4, 5

Доказательство теоремы 4. Применим теорию возмущений [4, (16)] к собственному вектору $p_0(B_{[k]})$:

$$(16) \quad \|d\gamma_{[k+1]}\| = \|dp_0(B_{[k]})\| \leq \frac{\|dB_{[k]} \cdot p_0\|}{\min_{i \in \overline{1, n}} |\lambda_i(B) - \lambda_0(B)|} + O(\varepsilon^2).$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1 в [4], построим оценку для нормы в правой части (16) в виде

$$(17) \quad \|dB_{[k]} \cdot p_0\| \leq c(\varepsilon) \cdot \|d\gamma_{[k]}\| + O(\varepsilon^2), \quad c(\varepsilon) = O(\varepsilon).$$

Отсюда будет следовать искомое условие на ε для выполнения условия сжатия $\|d\gamma_{[k+1]}\| < \|d\gamma_{[k]}\|$. Нужно найти $c(\varepsilon)$.

Из (15) имеем $p_0(B_{[k]}) = p_1(Q_{[k]}) + O(\varepsilon^2)$. Тогда с учетом оценок

$$\|dp_1\| \leq \frac{\|dQ \cdot p_1\|}{\lambda_2 - \lambda_1} + O(\varepsilon^2),$$

$$\|dQ \cdot p_1\| \leq 2\sqrt{\lambda_1} \|C\| \cdot \|V\| \cdot \|dG\|, \quad \|dG\| \leq n \cdot \|d\gamma\|$$

(см. [4, (16), (19)] и (24) в приложении) имеем

$$(18) \quad \begin{aligned} \|dB_{[k]} \cdot p_0\| &\leq \|V^T C (dG^T \cdot G + G^T \cdot dG) CV p_1\| + 2\|L\| \cdot \|dL\| \leq \\ &\leq 2\sqrt{\lambda_1} \|C\| \cdot \|V\| \cdot n \cdot \|d\gamma_{[k]}\| + 2\|L\| \cdot \|dL\|. \end{aligned}$$

Из определения $L = \setminus CV \gamma \setminus$ (11) по аналогии с (24) получаем

$$\|L\| \leq (N - n) \cdot \|CV \gamma\|,$$

откуда следует

$$\|L\| \leq (N - n) \cdot (\|C(V - V_*) \gamma\| + \|CV\| \cdot \|\gamma - \gamma_*\|) + O(\varepsilon^2)$$

и с учетом (13)

$$(19) \quad \|L\| \leq (N - n) \cdot (\|C\| \cdot \|\gamma_*\| \cdot \varepsilon + \|C\| \cdot \|V\| \cdot c_* \varepsilon) + O(\varepsilon^2).$$

Наконец,

$$(20) \quad dL = dC \cdot V\gamma + CVd\gamma = CVd\gamma + O(\varepsilon).$$

Собирая оценки (16), (18), (19), (20), приходим к условию сжатия для отображения (12):

$$\begin{aligned} & \frac{2 \|C\| \cdot \|V\|}{\min_{i \in \overline{1, n}} |\lambda_i(B) - \lambda_0(B)|} \cdot \left[n \sqrt{\lambda_1(Q)} + c_2 \varepsilon \right] < 1, \\ c_2 &= (N - n) \cdot \|C\| \cdot (\|\gamma_*\| + \|V\| \cdot c_*), \\ c_* &= \frac{\alpha \|C_*\| \cdot \|V_*\| \cdot \|\gamma_*\|}{\lambda_2(Q_*)}. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что вместо норм $\|C\|$, $\|C_*\|$, $\|V\|$, $\|V_*\|$, $\|\gamma_*\|$ и собственных чисел $\lambda_1(Q)$, $\lambda_2(Q_*)$, $\lambda_i(B)$ можно использовать нормы и собственные числа, вычисленные в любой точке $\gamma \in \Delta_*$, поскольку из соображений непрерывности указанные замены приведут к изменениям второго порядка малости $O(\varepsilon^2)$. Так же вместо $\lambda_i(B)$ можно использовать $\lambda_{i+1}(Q)$. В результате условие сжатия принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{2 \|C\| \cdot \|V\|}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left[n \sqrt{\lambda_1} + c_2 \varepsilon \right] < 1, \\ c_2 &\doteq (N - n) \left(\frac{\alpha \|C\| \cdot \|V\|^2}{\lambda_2} + 1 \right) \cdot \|C\| \cdot \|\gamma\|. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5. Нам понадобятся формулировки двух лемм из [4].

Лемма 1. При условии $\|\Delta\gamma\| \leq \frac{1}{5n \|C_*\|^{1/2}}$ верно $\|\Delta C\| \leq 5n \|C_*\|^{3/2} \|\Delta\gamma\| \leq \|C_*\|$.

Лемма 2. Пусть $V = V_* + E$, $\varepsilon \doteq \|E\|$, и в (8) $\|C\| \leq \|C_*\| + \|\Delta C\|$. Тогда в области (8) верна оценка

$$\begin{aligned} \lambda_1 \leq & \left[1 + \frac{2n [\sqrt{\lambda_2} \|C_*\|^{1/2} + \|\Delta C\| \cdot \|V_*\| + (\|C_*\| + \|\Delta C\|) \varepsilon] (\|V_*\| + \varepsilon)}{\lambda_2} \right] \times \\ & \times (\|C_*\| + \|\Delta C\|) \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Далее повторим рассуждения из доказательства теоремы 3 в [4], заменив (7) на более сильное условие (14). Неравенство (14) отличается от (7) слагаемым $c_2\varepsilon$. По следствию 1 с учетом леммы 1 для сжатия достаточно неравенства

$$\lambda_1 < \left(\sqrt{\omega^2 + (\lambda_2 - c_3\varepsilon)} - \omega \right)^2, \quad c_3 \doteq \frac{2\omega c_2}{n}, \quad \omega \doteq 4n \|C\| \cdot \|V\|.$$

Применив лемму 2, получим достаточное условие в виде

$$(21) \quad (\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2) \varepsilon^2 < \frac{\omega^2}{2\|C_*\|} \left(\sqrt{1 + \frac{(\lambda_2 - c_3\varepsilon)}{\omega^2}} - 1 \right)^2,$$

$$\alpha_0 \doteq 1 + \frac{2n(\sqrt{\lambda_2} \|C_*\|^{1/2} + \|C_*\| \cdot \|V_*\|) \|V_*\|}{\lambda_2},$$

$$\alpha_1 \doteq \frac{2n(\sqrt{\lambda_2} \|C_*\|^{1/2} + 3\|C_*\| \cdot \|V_*\|)}{\lambda_2}, \quad \alpha_2 \doteq \frac{4n\|C_*\|}{\lambda_2}.$$

Последнее является видоизменением неравенства (36) в [4].

Для переменной x в интервале $x \in [0, \alpha]$ верна оценка

$$\left(\frac{\sqrt{1+\alpha}-1}{\alpha} \right)^2 x^2 \leq (\sqrt{1+x}-1)^2.$$

Тогда с обозначениями $x \doteq \frac{(\lambda_2 - c_3 \varepsilon)}{\omega^2}$, $\alpha \doteq \frac{\lambda_2}{\omega^2}$ от (21) приходим к условию

$$(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2) \varepsilon^2 < \frac{\omega^2}{2\|C\|} \left(\frac{\sqrt{1+\alpha}-1}{\alpha} \right)^2 \frac{(\lambda_2 - c_3 \varepsilon)^2}{\omega^4} \doteq$$

$$\doteq A(\lambda_2 - c_3 \varepsilon)^2.$$

Последнее на интервале $\varepsilon \in [0, \|V_*\|]$ следует из неравенства

$$\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \|V_*\| + \alpha_2 \|V_*\|^2} \varepsilon \doteq f_1^{1/2} \varepsilon < A^{1/2} (\lambda_2 - c_3 \varepsilon),$$

$$f_1 \doteq \alpha_0 + \alpha_1 \|V_*\| + \alpha_2 \|V_*\|^2,$$

которое есть

$$\varepsilon < \frac{A^{1/2} \lambda_2}{f_1^{1/2} + A^{1/2} c_3} = \frac{\varepsilon_*}{f_1^{1/2} + \left(\frac{2\omega c_2}{n\lambda_2} \right) \varepsilon_*}.$$

Теорема доказана.

5. ПРИЛОЖЕНИЕ. ОЦЕНКИ ДЛЯ НОРМЫ $\|C\|$

Лемма 3. Для $C = (G^T G)^{-1}$, где матрица $G^T \in \mathbb{R}^{(N-n) \times N}$ определена в (3), верны оценки

$$(22) \quad \frac{1}{(n+1)^2 \|\gamma\|^2} \leq \|C\| \leq \frac{2}{(d_\gamma)^{2n}}.$$

Здесь $d_\gamma \doteq \min_{s: \gamma(s)=0} \min_{|\omega|=1} |\omega - s|$ — расстояние между множеством корней многочлена $\gamma(s) = \gamma_0 + \gamma_1 s + \dots + \gamma_n s^n$ и единичной окружностью на комплексной плоскости.

Для доказательства леммы установим вспомогательные утверждения.

Предложение 1. Верна оценка $\|C\| \leq \frac{2}{\lambda_{\min}(G_c^T G_c)}$, где G_c — квадратная циркулянтная матрица

$$G_c^T \doteq \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & \gamma_0 & \dots & \gamma_{n-1} \\ & \ddots & & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & & & \ddots & \gamma_0 \\ \gamma_1 & & & & & & 0 \\ \gamma_0 & \ddots & & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \vdots & 1 & & \\ & & \ddots & \gamma_1 & \vdots & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & 1 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{M \times M}, \quad M \doteq N - n.$$

Доказательство. Верно равенство $\|C\| = \lambda_{\max}(C) = \frac{1}{\lambda_{\min}(G^T G)}$, и для G^T (3) выполнено

$$G^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_{M-n} & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}}_E \doteq G^T E = G_c^T.$$

Заметим, что $\|E\| = \sqrt{\lambda_{\max}(E^T E)} = \sqrt{2}$. Далее, $\|E^T x\| \leq \|E\| \cdot \|x\| = \sqrt{2} \|x\|$ и верны соотношения

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(G_c^T G_c) &= \min_{\|p\|=1} \|G_c p\|^2 = \min_{\|p\|=1} \|E^T \underbrace{Gp}_x\|^2 \leq \\ &\leq 2 \min_{\|p\|=1} \|Gp\|^2 = 2 \lambda_{\min}(G^T G). \end{aligned}$$

Отсюда получаем доказываемое утверждение. $\square$

Предложение 2. Пусть $\zeta_k \doteq e^{2\pi i(k/M)}$ — корень из единицы. Спектр матрицы $G_c^T G_c$ есть множество $\{|\gamma(\zeta_0)|^2, \dots, |\gamma(\zeta_{M-1})|^2\}$.

Доказательство. Матрица G_c^T правоциркулянтная, обозначим ее первую строку $[c_0, \dots, c_{M-1}]$. Верно разложение [14, п. 3.7.3]

$$G_c^T = \Phi [\text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{M-1})] \Phi^{-1} \doteq \Phi \Lambda \Phi^{-1},$$

где $\Phi \doteq \frac{1}{\sqrt{M}} F$, $F \in \mathbb{C}^{M \times M}$ — симметричная матрица дискретного преобразования Фурье с элементами $F_{kl} \doteq e^{-2\pi i(kl/M)}$, $k, l \in \overline{0, M-1}$, $\Phi^{-1} = \Phi^* \doteq \bar{\Phi}^T = \bar{\Phi}$, черта над матрицей означает комплексное сопряжение. При этом собственные числа λ_k есть значения многочлена $c(\zeta) \doteq c_{M-1}\zeta^{M-1} + \dots + c_0$ в точках единичной окружности $\zeta_0, \dots, \zeta_{M-1}$, $\lambda_k = c(\zeta_k)$, то есть вектор-строка из собственных чисел есть образ Фурье от первой строки G_c^T : $[\lambda_0, \dots, \lambda_{M-1}] = [c_0, \dots, c_{M-1}] F$. С учетом вещественности матрицы G_c и симметричности Φ верно представление $G_c^T = G_c^T = \bar{\Phi} \Lambda \Phi^* = \bar{\Phi} \Lambda \bar{\Phi}$, поэтому верны равенства

$$\begin{aligned} G_c^T G_c &= G_c^T \bar{G}_c = \Phi \Lambda \Phi^{-1} (\bar{\Phi} \bar{\Lambda} \bar{\Phi})^T = \Phi \Lambda \bar{\Lambda} \bar{\Phi} = \\ &= \Phi [\text{diag}(|\lambda_0|^2, \dots, |\lambda_{M-1}|^2)] \Phi^{-1} = \\ &= \Phi [\text{diag}(|c(\zeta_0)|^2, \dots, |c(\zeta_{M-1})|^2)] \Phi^{-1}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается заметить, что $|c(\zeta_k)| = |\gamma(\zeta_k)|$ ввиду равенства $c(\zeta_k) = \zeta_k^{M-n} \gamma(\zeta_k)$ для всех $k \in \overline{0, M-1}$. $\square$

Предложение 3. Верна оценка

$$(23) \quad \|C\| \leq \frac{2}{\min_{k \in \overline{0, M-1}} |\gamma(\zeta_k)|^2} \leq \frac{2}{(d_\gamma)^{2n}}.$$

Доказательство. С учетом предложений 1 и 2 для доказательства достаточно учесть неравенства

$$\begin{aligned} |\gamma(\zeta_k)| &= |(\zeta_k - s_1) \dots (\zeta_k - s_n)| = |\zeta_k - s_1| \dots |\zeta_k - s_n| \geq \\ &\geq \min_{|\omega_1|=1} |\omega_1 - s_1| \dots \min_{|\omega_n|=1} |\omega_n - s_n| \geq \left(\min_{s_i} \min_{|\omega|=1} |\omega - s_i| \right)^n = (d_\gamma)^n. \end{aligned}$$

Предложение доказано. $\square$

Замечание 1. Для чисел ζ_k с ненулевой мнимой частью собственное число $|\lambda_k|^2 = |\gamma(\zeta_k)|^2$ матрицы $G_c^T G_c$ имеет кратность два. Это следует из симметрии $|\gamma(\zeta_k)|^2 = \gamma(\zeta_k)\overline{\gamma(\zeta_k)} = \gamma(\zeta_k)\gamma(\overline{\zeta_k})$ относительно перестановки ζ_k и $\overline{\zeta_k}$ и симметрии множества $\{\zeta_0, \dots, \zeta_{M-1}\}$ относительно вещественной оси комплексной плоскости. Поэтому в оценке (23) минимум достаточно брать по $k \in \overline{0, [\frac{M}{2}] + 1}$, где $[\cdot]$ — целая часть числа.

Для завершения доказательства леммы 3 используем неравенства

$$\|C\|^{-1} = \|G^T G\| \leq \|G\|^2 \leq (n+1)^2 \|\gamma\|^2,$$

последнее из которых следует из определений (3), (5) и соотношения $Gx \equiv V(x)\gamma$:

$$\begin{aligned} \|G\| &= \sup_{\|x\|=1} \|G^T x\| = \sup_{\|x\|=1} \|V(x)\gamma\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|V(x)\| \cdot \|\gamma\| \leq \\ (24) \quad &\leq \sup_{\|x\|=1} \|V(x)\|_2 \cdot \|\gamma\| \leq (n+1) \|\gamma\|, \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_2$ — фробениусовская норма матрицы. Лемма доказана.

Замечание 2. Оценки (22) уместно сопоставить с цепочкой неравенств

$$(d_\gamma)^n \leq |\gamma(s)|_{|s|=1} \leq |\gamma_0| + \dots + |\gamma_n| \leq (n+1) \max_i |\gamma_i| \leq (n+1) \|\gamma\|,$$

которая, по всей видимости, неумлучшаема.

Автор благодарит рецензента за исправление ошибки в утверждении и доказательстве леммы 3.

REFERENCES

- [1] Osborne M. R., Smyth G. K., *A modified Prony algorithm for fitting functions defined by difference equations*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., **12** (1991), 362–382. MR1087765
- [2] Osborne M. R., Smyth G. K., *A Modified Prony Algorithm for Exponential Function Fitting*, SIAM Journal of Scientific Computing, **16** (1995), 119–138. MR1311681
- [3] Pereyra V., Scherer G., *Exponential data fitting*, in: Exponential Data Fitting and Its Applications, Bentham Science Publishers (2010), 1–26.
- [4] Lomov A. A., *On convergence of the inverse iteration algorithm for modified Prony method*, SEMR, **15** (2018), 1513–1529. MR3885486
- [5] Kostin V. I., *On extremum points of some function* [in Russian], Upravlyaemye sistemy, Novosibirsk: Institute of Mathematics of SB AS USSR, **24** (1984), 35–42.
- [6] Petersson J., Holmström K., *A review of the parameter estimation problem of fitting positive exponential sums to empirical data*, Applied Mathematics and Computation, **126**:1 (2002), 31–61. MR1868146
- [7] Moor De B., *Structured total least squares and L_2 approximation problems*, Linear Algebra Appl., **188–189** (1993), 163–207. Zbl 0781.65028
- [8] Osborne M. R., *Some special nonlinear least squares problems*, SIAM J. Numer. Anal., **12** (1975), 571–592. MR386222
- [9] Osborne M. R., *A class of nonlinear regression problems*, Data Representation, St. Lucia: University of Queensland Press (1970), 94–101. Zbl 0341.62058
- [10] Egorshin A. O., Budyanov V. P., *Smoothing of signals and estimation of dynamic parameters in automatic systems using a digital computer* [in Russian], Avtometriya, **1** (1973), 78–82.
- [11] Egorshin A. O., *Least squares method and the fast algorithms in variational problems of identification and filtration (VI method)* [in Russian], Avtometriya, **1** (1988), 30–42.
- [12] Egorshin A. O., *On tracking extremum parameters in the identification variational problem* [in Russian], Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta: Seriya Matematika, Mekhanika, Informatika, **11**:3 (2011), 95–113; English transl.: Journal of Mathematical Sciences, **195** (2013), 791–804. MR3141842

- [13] Lomov A. A., *Local stability in the problem of identifying coefficients of a linear difference equation* [in Russian], Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta: Seriya Matematika, Mekhanika, Informatika, **10**:4 (2010), 81–103; English transl.: Journal of Mathematical Sciences, **188**:4 (2013), 410–434. MR3049146
- [14] Marple S. L., *Digital spectral analysis with applications*, Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA, 1986.

ANDREI ALEKSANDROVICH LOMOV
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
4, KOPTYUGA AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: lomov@math.nsc.ru