Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. V. Pchelintsev, Relatively free associative Lie nilpotent algebras of rank 3, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1937–1946

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.139>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.166.219.16

April 26, 2023, 02:24:07

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1937–1946 (2019)

УДК 512.552.4, 512.572

DOI 10.33048/semi.2019.16.139

MSC 16R10, 17A50

ОТНОСИТЕЛЬНО СВОБОДНЫЕ АССОЦИАТИВНЫЕ ЛИ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ АЛГЕБРЫ РАНГА 3

С.В. ПЧЕЛИНЦЕВ

ABSTRACT. Let Φ be an arbitrary unital associative and commutative ring. The relatively free Lie nilpotent algebras with three generators over Φ are studied. The product theorem is proved: $T^{(n)}T^{(m)} \subseteq T^{(n+m-1)}$, where $T^{(n)}$ is a verbal ideal generated by the commutators of degree n . The identities of three variables that are satisfied in a free associative Lie nilpotent algebra of degree $n \geq 3$ are described. It is proved that the additive structure of the considered algebra is a free module over the ring Φ .

Keywords: associative Lie nilpotent algebra, identity in three variables, torsion of a free ring.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Φ — произвольное ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Всюду ниже, если не оговорено противное, рассматриваются только *ассоциативные* унитарные Φ -алгебры. Введем следующие обозначения:

$F_\omega = F_\omega(\Phi)$ — свободная Φ -алгебра над счетным множеством

$$X_\omega = \{x_1, x_2, \dots\}$$

свободных порождающих; F_r — подалгебра в F_ω , порожденная множеством $X_r = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, — алгебра ранга $r \in \mathbb{N}$;

$[x_1, \dots, x_n]$ — правонормированный коммутатор степени $n \geq 2$, т.е. $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ и по индукции $[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n]$;

$\text{LN}(n) : [x_1, \dots, x_n] = 0$ — тождество Ли нильпотентности степени n ;

PCHELINTSEV, S.V., RELATIVELY FREE ASSOCIATIVE LIE NILPOTENT ALGEBRAS OF RANK 3.

© 2019 ПЧЕЛИНЦЕВ С.В.

Работа поддержана РФФ (проект №14-21-00065).

Поступила 26 мая 2019 г., опубликована 18 декабря 2019 г.

$T^{(n)}$ и V_n — T -идеал и T -пространство соответственно, порожденные коммутатором $[x_1, \dots, x_n]$ степени n ; $F_\nu^{(n)} = F_\nu / T^{(n)}(F_\nu)$ — относительно свободная алгебра ранга ν с тождеством $\text{LN}(n)$;

$Z(A)$ — центр A ; $Z^*(A)$ — ядро A (наибольший идеал A , содержащийся в центре).

Алгебра называется *Ли нильпотентной индекса n* , если она удовлетворяет тождеству $\text{LN}(n)$, но в ней не выполнено тождество $\text{LN}(n-1)$.

Напомним, что многочлен $f \in F_\omega$ называется *собственным*, если он содержится в подалгебре, порожденной коммутаторами вида $[x_1, x_2, \dots, x_m]$, где $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ и $m \geq 2$.

Впервые Ли нильпотентные алгебры появились в 1947 г. в работе [1]. В работах [2], [3], [4] и [5], [6] были построены аддитивные базисы алгебр $F_\omega^{(n)}(\Phi)$ для $n = 3$ и $n = 4$ соответственно при условии, что Φ — поле характеристики отличной от 2 и 3.

В [7] были описаны собственные центральные многочлены от 2-х переменных алгебр $F_3^{(5)}(\Phi)$ и $F_3^{(6)}(\Phi)$ ($\text{char}(\Phi) \neq 2, 3$); а в [8] — собственные центральные многочлены алгебр $F_\omega^{(5)}(\Phi)$ и $F_\omega^{(6)}(\Phi)$ ($\text{char}(\Phi) = 0$). Оказалось, что центр алгебры $F_\omega^{(5)}(\Phi)$ содержится в T -идеале, порожденном коммутатором степени 4. Задача описания центров алгебр $F_\omega^{(5)}(\Phi)$ и $F_\omega^{(6)}(\Phi)$ в полном объеме пока остается открытой.

Определим в алгебре A убывающий ряд идеалов, считая, что $A_{(2)} = A^{(2)}$ и по индукции $A_{(n+1)} = [A_{(n)}, A]A$. Напомним, что алгебра A называется *сильно Ли нильпотентной индекса n* , если $A_{(n)} = 0$, $A_{(n-1)} \neq 0$. Сильно (strong) Ли нильпотентные алгебры изучались, например, в работах [9] и [10]. Легко понять, что для конечно порожденных алгебр понятия Ли нильпотентности и сильной Ли нильпотентности эквивалентны. Несомненный интерес представляет вопрос о вычислении значения индекса $\chi(n, r)$ строгой Ли нильпотентности алгебры $F_r^{(n)}$. Очевидно, что $\chi(n, r) \geq n$.

В данной заметке изучается алгебра $F_3^{(n)}(\Phi)$ ранга 3 с тождеством $\text{LN}(n)$ Ли нильпотентности произвольной степени $n \geq 3$. При этом никаких ограничений на характеристику кольца Φ не налагается.

Работа состоит из пяти разделов. В разделе 2 доказывается ряд предварительных лемм, на основании которых получаются основные результаты.

В 1965 г. В.Н. Латышев [3] доказал справедливость включения

$$T^{(m)} \cdot T^{(n)} \subseteq T^{(m+n-2)}.$$

Независимо от работы [3] этот факт передоказали Гупта и Левин в 1983 г. (см. [11]). В 1978 г. И.Б. Воличенко [5] доказал включение

$$T^{(m)} \cdot T^{(n)} \subseteq T^{(m+n-1)}$$

при условии, что одно из чисел m или n равно 3. Начиная с 1990 г. указанное включение при условии, что одно из чисел m, n нечетно, передоказывалось при некоторых ограничениях на характеристику (см. [12], [13], [7]). Наиболее общий результат в этом направлении получен недавно в [14]. В работе [7] это утверждение называлось *теоремой о произведении $T^{(m)}T^{(n)}$* .

В разделе 3 доказана теорема 1 о произведении $T^{(m)}T^{(n)}$ для ассоциативной алгебры $F = F_3$ от трех порождающих:

$$T^{(m)}(F) \cdot T^{(n)}(F) \subseteq T^{(m+n-1)}(F).$$

Ограничение на ранг является существенным, поскольку

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \notin T^{(3)}.$$

В частности, доказано, что $\chi(n, 3) = n$.

В разделе 4 получено описание тождеств от трех переменных алгебры $F_3^{(n)}$ (см. теорему 2). Кроме того, в ходе доказательства этой теоремы указан аддитивный базис алгебры $F_3^{(n)}$, который получается факторизацией базиса Пуанкаре-Бирхгофа-Витта свободной алгебры F по идеалу $T^{(n)}$.

Отметим, что в работах [15] и [16] изучались аддитивные группы колец $F_\omega^{(3)}(\mathbb{Z})$ и $F_\omega^{(4)}(\mathbb{Z})$ соответственно; было доказано, что аддитивная группа кольца $F_\omega^{(3)}(\mathbb{Z})$ свободна, а в аддитивной группе кольца $F_\omega^{(4)}(\mathbb{Z})$ была указана подгруппа, состоящая из элементов порядка 3, фактор по которой является свободной. В разделе 5 приведена теорема 3, утверждающая, что аддитивный модуль алгебры $F_3^{(n)}(\Phi)$ ранга 3 является свободным, в частности, аддитивная группа кольца $F_3^{(n)}(\mathbb{Z})$ — свободная абелева группа.

Результаты этой работы в случае $\frac{1}{6} \in \Phi$ были доказаны автором в [17]. В случае $\frac{1}{2} \in \Phi$ теорема 1 независимо доказана А.М. Кузьминым.

На завершающем этапе подготовки статьи к печати мы обнаружили работу [18], в которой были доказаны теоремы 1 и 2 для алгебры $F_2^{(n)}(\Phi)$ при условии $\text{char}(\Phi) = 0$. Кроме того, в [18] была высказана гипотеза под номером 4.1 о справедливости этих теорем для алгебры $F_3^{(n)}(\Phi)$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Все результаты статьи относятся к алгебре $F = F_3$, даже если это специально не отмечено. Далее, если не оговорено противное, то всюду ниже

$$x, y, z \in X = \{x_1, x_2, x_3\} \text{ и } a, b, c \in F.$$

Иногда без дополнительных пояснений применяются тождества:

$$[xy, z] + [yz, x] + [zx, y] = 0, \quad (1)$$

$$[x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] = 0, \quad (2)$$

$$[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y. \quad (3)$$

Второе тождество называется *тождеством Якоби*; третье тождество означает, что отображение $D_z : x \mapsto [x, z]$ является дифференцированием алгебры F .

Следующая лемма принадлежит В.Н. Латышеву [2]. Для полноты изложения приведем ее доказательство.

Лемма 1. Если $a, b \in F$, то $[V_n, a][a, b] \subseteq T^{(n+2)}$.

Доказательство. Если $v \in V_n$, то по модулю $T^{(n+2)}$ имеем в силу (2) и (3)

$$[v, [a, b]] = [v, a, b] - [v, b, a] \equiv 0,$$

$$[v, a][a, b] \equiv [v, a[a, b]] = [v, [a, ab]] \equiv 0,$$

что и требовалось. □

Обозначим через P и Q модули над кольцом Φ , порожденные соответственно элементами $[x, y, z]$ и $[a, b][a, c]$, где $x, y, z \in X, a, b, c \in F$. Заметим, что Φ -модуль P конечно порожден, а Φ -модуль Q бесконечно порожден.

Лемма 2. Верно включение $[V_n, Q] \subseteq T^{(n+3)}$.

Доказательство. Пусть $v \in V_n, a, b, c \in F$. Сравнения в этой лемме понимаются по модулю $T^{(n+3)}$. Заметим, что в силу леммы 1 верно

$$[v, [a, c]] \cdot [a, b] = ([v, a, c] - [v, c, a]) \cdot [a, b] \equiv [v, a, c] \cdot [a, b]. \quad (4)$$

Следовательно, на основании сравнения (4) и леммы 1

$$\begin{aligned} [v, [a, b]] \cdot [a, c] &= [a, b] \cdot [v, [a, c]] + [v, [a, b]] \cdot [a, c] \equiv \\ &\equiv [v, [a, c]] \cdot [a, b] + [v, [a, b]] \cdot [a, c] \equiv [v, a, c][a, b] + [v, a, b][a, c]. \end{aligned}$$

Выражение $[v, a, c][a, b] + [v, a, b][a, c]$ является линеаризацией по переменной b элемента $[w, b][a, b]$, где $w = [v, a] \in V_{n+1}$. По лемме 1:

$$[w, b][a, b] \in [V_{n+1}, b][a, b] \subseteq T^{(n+3)},$$

что и требовалось. $\square$

Лемма 3. Верно включение $XP \subseteq V_3 + Q$.

Доказательство. Пусть $x, y, z \in X$. Тогда по модулю $V_3 + Q$ имеем

$$x \cdot [x, y, z] = [x \cdot [x, y], z] - [x, z] \cdot [x, y] \equiv [x \cdot [x, y], z] = [[x, xy], z] \equiv 0,$$

т.е. $x \cdot [x, y, z] \in V_3 + Q$. В силу равноправия x и y , получаем $y \cdot [x, y, z] \in V_3 + Q$. Далее, в силу тождества Якоби (2)

$$z \cdot [x, y, z] = z\{[x, z, y] + [x, [y, z]]\} = -z[z, x, y] + z[z, y, x] \in V_3 + Q,$$

Наконец, по модулю $V_3 + Q$ имеем $z \cdot [x, y, y] \equiv -y \cdot [x, y, z] \equiv 0$. Значит, $XP \subseteq V_3 + Q$, что завершает доказательство леммы. $\square$

Лемма 4. Верно включение $T^{(n+1)}P \subseteq T^{(n+3)}$.

Доказательство. Поскольку $[V_n, F] = F[V_n, X]$ в силу (3), то достаточно показать, что $[V_n, X]P \subseteq T^{(s+3)}$. В силу лемм 2 и 3 имеем

$$[V_n, X]P = [V_n, XP] - X[V_n, P] \subseteq [V_n, V_3 + Q] + FV_{n+3} \subseteq T^{(s+3)}.$$

Значит, $V_{n+1} \cdot P \subseteq T^{(n+3)}$. $\square$

Лемма 5. Для любых $a, b, c \in F$ верно, что $b[a, b][a, c] \in Q$.

Доказательство. Заметим, что пространство Q замкнуто относительно линеаризаций, т.е. $[a, b][a', c] + [a', b][a, c] \in Q$ для любых $a, a', b, c \in F$. Тогда по модулю Q имеем в силу (1)

$$b[a, b][a, c] = [ba, b][a, c] \equiv -[a, b][ba, c] = [a, b]([ac, b] + [cb, a]) \equiv 0.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. Верно включение $T^{(n+1)}Q \subseteq T^{(n+3)}$.

Доказательство. Проверим сначала, что $[V_n, F] \cdot [x, y][x, z] \subseteq T^{(n+3)}$ для любых $x, y, z \in X$. Достаточно доказать, что $[V_n, t] \cdot [x, y][x, z] \subseteq T^{(n+3)}$ для любых $x, y, z, t \in X$. Из лемм 2 и 5 вытекает требуемое включение при $t \in \{x, y\}$. Если же $t = z$, то достаточно понять, что $T^{(n+1)} \cdot [[x, y], [x, z]] \subseteq T^{(n+3)}$, если $x, y, z \in X$. Учитывая лемму 4: $T^{(n+1)} \cdot P \subseteq T^{(n+3)}$, имеем

$$\begin{aligned} T^{(n+1)} \cdot [[x, y], [x, z]] &\subseteq T^{(n+1)} \cdot [P, X] \subseteq T^{(n+1)}PX + T^{(n+1)}XP \subseteq \\ &\subseteq T^{(n+1)}PX + T^{(n+1)}P \subseteq T^{(n+3)}. \end{aligned}$$

Итак, доказано включение $T^{(n+1)} \cdot [x, y][x, z] \subseteq T^{(n+3)}$, если $x, y, z \in X$. Проводя подходящие линеаризации, получаем $T^{(n+1)} \cdot [a, b][a, b] \subseteq T^{(n+3)}$, где $a, b, c \in F$. Значит, $T^{(n+1)}Q \subseteq T^{(n+3)}$. $\square$

Следующая лемма принадлежит В.Н. Латышеву [2]. Ее доказательство приводится лишь для полноты изложения.

Лемма 7. В алгебре F идеал $T^{(3)}$ порождается элементами вида

$$[x, y, z], [x, y][x, z], \text{ где } x, y, z \in X. \quad (5)$$

Кроме того, $F'^2 \subseteq T^{(3)}$, где $F' = T^{(2)}$ — коммутант алгебры F .

Доказательство. Известно и легко понять, что $T^{(2)}$ (коммутант) как идеал порождается элементами $[x, y]$, где $x, y \in X$. Заметим, что идеал $T^{(3)}$ порождается элементами $[a, x, y]$, где $a \in F, x, y \in X$. Поскольку

$$[bc, x, y] = b[c, x, y] + [b, x, y]c + [b, x][c, y] + [b, y][c, x], \quad (6)$$

то достаточно проверить, что элементы $[a, x, y]$ и $[b, x][c, y]$ содержатся в идеале, порожденном элементами вида (5). Индукцией по степени этих элементов, легко понять, что это утверждение верно. $\square$

Следующая лемма впервые была доказана И.Б. Воличенко [5] для произвольной ассоциативной алгебры над кольцом Φ , содержащим $\frac{1}{6}$. Для алгебры ранга 3 она справедлива без ограничений на кольцо скаляров Φ .

Лемма 8. В алгебре F верно включение $T^{(n)}T^{(3)} + T^{(3)}T^{(n)} \subseteq T^{(n+2)}$ для $n \geq 2$.

Доказательство. Для доказательства достаточно понять, что $V_n T^{(3)} = 0$ в алгебре $A = F^{(n+2)}$. Используя лемму 7, преобразуем выражение

$$V_n T^{(3)} = \sum [V_{n-1}, A]AwA,$$

где элементы w имеют вид (5),

$$\subseteq \sum [V_{n-1}, X]AwA = \sum A[V_{n-1}, X]wA = 0,$$

поскольку $[V_{n-1}, X]w = 0$ в силу лемм 4 и 6. $\square$

Следующая лемма доказана в [7] (см. лемму 2) при условии $\frac{1}{6} \in \Phi$. Однако для алгебры ранга 3 она справедлива в любой характеристике.

Лемма 9. В алгебре F верно $T^{(n)}D_a D_b \subseteq T^{(n+2)}$.

Доказательство. Пусть $v \in V_n, a, b, c \in A$. В силу тождества (6) верно

$$[vc, a, b] = v[c, a, b] + [v, a, b]c + \{[v, a][c, b] + [v, b][c, a]\}.$$

Покажем, что каждое слагаемое лежит в $T^{(n+2)}$. Для первого слагаемого имеем $v[c, a, b] \in V_n T^{(3)} \subseteq T^{(n+2)}$ в силу леммы 8. Второе слагаемое $[v, a, b]c \in T^{(n+2)}$, поскольку $[v, a, b] \in V_{n+2}$. Наконец, третье $\{[v, a][c, b] + [v, b][c, a]\}$ является линейной комбинацией $[v, a][c, a]$ и по лемме 1 содержится в $T^{(n+2)}$. $\square$

3. ТЕОРЕМА О ПРОИЗВЕДЕНИИ КОММУТАТОРОВ

Теперь мы можем доказать теорему о произведении коммутаторов.

Теорема 1. В свободной ассоциативной алгебре $F = F_3$ ранга 3

$$T^{(n)}T^{(m)} \subseteq T^{(n+m-1)}.$$

Доказательство. Без ограничения общности, достаточно понять, что $V_n V_m \subseteq T^{(n+m-1)}$. Проведем индукцию по m .

Основание индукции $m = 2$. Мы должны доказать, что $V_n V_2 = 0$ в алгебре A , порожденной множеством X из трех элементов, в которой $T^{(n+1)}(A) = 0$.

Докажем индукцией по n , что $V_n[x, y] = 0$ для любых $x, y \in A$. Основание индукции при $n = 2$ верно в силу леммы 7.

Пусть $n \geq 3$. Возьмем произвольный элемент $v \in V_{n-2}$ и рассмотрим произведение $w = [v, a, b][x, y]$, где $a, b, x, y \in A$. В силу (6) и индуктивного предположения имеем

$$v[[x, y], a, b] + [v, a, b][x, y] = [v[x, y], a, b] - \{[v, a][x, y], b\} + [v, b][x, y], a\} \in$$

$$[V_{n-2}[x, y], a, b] + [V_{n-2}, A]V_3 \subseteq [T^{(n-1)}, a, b] + T^{(n-1)}T^{(3)} \subseteq T^{(n+1)} = 0$$

ввиду лемм 8 и 9. Итак, для любых $a, b, x, y \in A$

$$v[x, y, a, b] + [v, a, b][x, y] = 0 \quad (7).$$

Полагая в (7) $b = x$ и применяя лемму 1 $[v, a, x][x, y] \in [V_{n-1}, x][x, y] = 0$, получаем

$$v[x, y, a, x] = 0. \quad (8)$$

Это означает, что в алгебре A элемент $v[x, y, a, b]$ кососимметричен по переменным x, y, b . Поскольку в силу (8)

$$v[x, y, b, b] = v\{[x, b, y, b] + [x, [y, b], b]\} = v[b, y, x, b] = 0,$$

то элемент $v[x, y, a, b]$ кососимметричен по переменным x, y, a, b . Замечая, что $b \mapsto v[x, y, a, b]$ является дифференцированием в алгебре A , получаем, что без ограничения общности, можно считать, что $x, y, a, b \in X$. Поскольку множество порождающих X состоит из трех элементов, то среди $x, y, a, b \in X$ должны быть два одинаковых и тогда $v[x, y, a, b] = 0$. Тогда из (7) получаем $[v, a, b][x, y] = 0$ для любых $v \in V_{n-2}, a, b, x, y \in A$, т.е. $V_n[x, y] = 0$. Тем самым, доказано включение $V_n T^{(2)} \subseteq T^{(n+1)}$. Переходя от алгебры A к антиизоморфной, получаем $T^{(2)}V_n \subseteq T^{(n+1)}$.

Докажем, что $V_n V_m \subseteq T^{(n+m-1)}$ для всех $n, m \geq 2$. Проведем индукцию по $n + m$. Основание индукции при $n + m = 4$, т.е. $n = m = 2$, верно в силу

включения $V_2 V_2 \subseteq T^{(3)}$. Сделав предположение индукции и предположив, что $n, m \geq 3$ (случай: одно из чисел n, m равно 2 рассмотрен ранее), имеем

$$\begin{aligned} V_n V_m &= [V_{n-1}, F] V_m \subseteq \\ &[V_{n-1} V_m, F] + V_{n-1} [V_m, F] \subseteq T^{(n+m-1)} + V_{n-1} V_{m+1} \\ &\subseteq T^{(n+m-1)} + V_{n-2} V_{m+2} \subseteq \dots \\ &\subseteq T^{(n+m-1)} + V_2 V_{n+m-2} \subseteq T^{(n+m-1)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Поскольку $[x, y][z, t] \notin T^{(3)}$ в алгебре F_4 , то ограничение в теореме 1 на ранг алгебры является существенным.

Следствие 1. В алгебре $A = F_3^{(n)}$ верно включение $T^{(n-1)}(A) \subseteq Z(A)$.

Доказательство. Пусть $T^{(m)} = T^{(m)}(A)$, $V_m = V_m(A)$. По теореме 1:

$$[T^{(n-1)}, A] = [V_{n-1} A, A] \subseteq T^{(n)} + V_{n-1} T^{(2)} = 0,$$

что и требовалось. $\square$

4. ТОЖДЕСТВА АЛГЕБРЫ $F_3^{(n)}$

Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$; F и L — свободная ассоциативная и свободная алгебра Ли над множеством X соответственно. Пусть $e_1, \dots, e_\alpha, \dots$ — базис алгебры Ли L , состоящий из однородных элементов. При этом предполагается, что базис упорядочен по возрастанию индексов и

$$e_\alpha < e_\beta, \text{ если } \deg(e_\alpha) > \deg(e_\beta).$$

Из теоремы Пуанкаре-Бирхгофа-Витта (см. [19]) вытекает, что всякий элемент алгебры F однозначно представим в виде линейной комбинации *правильных слов* вида

$$p_i := e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_t}, \text{ где } t \geq 1, e_{i_1} \leq \dots \leq e_{i_t}; \quad (9)$$

в слове p_i элементы e_{i_j} перемножаются в алгебре F . Иначе говоря, правильные слова составляют аддитивный базис модуля F над кольцом Φ .

Определим *вес* $wt(e_i)$ (the weight) однородного элемента $e_i \in L$, считая, что

$$wt(e_i) = \deg_L(e_i).$$

Далее, если p_i правильное слово вида (9), то положим

$$wt(p_i) = \sum_{j=1}^t wt(e_{i_j}) - (t-1),$$

и назовем $wt(p_i)$ *весом* слова p_i . *Весом* $wt(a)$ элемента $a \in F$ назовем наименьший из весов правильных слов p_i , входящих в разложение

$$a = \sum_i \alpha_i p_i, \text{ где } 0 \neq \alpha_i \in \Phi.$$

Лемма 10. Всякий элемент идеала $T^{(m)}$ представим в виде линейной комбинации элементов вида

$$x M_1 M_2 \dots M_k, \quad (10)$$

где M_i является либо оператором правого умножения R_y , либо оператором внутреннего дифференцирования D_y и среди операторов M_i содержится не менее $(t-1)$ -го оператора вида D_y , где $x, y \in X$.

Доказательство. Из определения идеала $T^{(m)}$ следует, что $T^{(m)}$ линейно порождается элементами вида

$$a_1 D_{a_2} \dots D_{a_m} R_{a_{m+1}}, \quad (11)$$

где $a_i \in F$. Из тождеств (1) и (3) вытекает, что в ассоциативной алгебре справедливы равенства

$$R_{ab} = R_a R_b, \quad D_{ab} = R_a D_b + L_b D_a, \quad L_a = R_a - D_a. \quad (12)$$

Используя (12), по индукции легко понять, что элемент вида (11) представим в виде линейной комбинации элементов вида (10). $\square$

Теорема 2. В алгебре $F_3^{(n)}$ выполнено тождество $f(x, y, z) = 0$ от 3-х переменных тогда и только тогда, когда $wt(f) \geq n$.

Доказательство. Покажем сначала, что если $wt(f) \geq n$, то $f = 0$ в алгебре $F_3^{(n)}$. Элемент f можно представить в виде линейной комбинации правильных слов p_i вида (9), причем $wt(p_i) \geq n$ для любого i . Пусть $n_j = \deg(e_{i_j})$. Тогда по определению веса многочлена имеем

$$n \leq \left(\sum_{1 \leq j \leq t} n_j \right) - (t-1).$$

Далее, в алгебре F_3 в силу теоремы 1 о произведении:

$$T^{(n_1)} T^{(n_2)} \dots T^{(n_t)} \subseteq T^{(N)},$$

где

$$N = n_1 + \sum_{2 \leq i \leq t} (n_i - 1) = \left(\sum_{1 \leq i \leq t} n_i \right) - (t-1).$$

Значит, если $wt(f) \geq n$, то $f \in T^{(n)}$ и $f = 0$ в алгебре $F_3^{(n)}$. В частности, если вес правильного слова p_i вида (9) не менее n , то $p_i = 0$ в алгебре $F_3^{(n)}$.

Допустим, что $f(x, y, z) = 0$ в алгебре $F_3^{(n)}$, т.е. $f \in T^{(n)}$. Тогда по лемме 10 элемент f линейно выражается через элементы вида $x' := x M_1 M_2 \dots M_k$, причем в операторном слове $M_1 M_2 \dots M_k$ встречается не менее, чем $(n-1)$ операторов вида D_y . Пусть $M_k = D_y$. Тогда $x'' := x' M_1 M_2 \dots M_{k-1}$ и в операторном слове $M_1 M_2 \dots M_{k-1}$ встречается не менее, чем $(n-2)$ операторов вида D_y . По предположению индукции можно считать, что x'' является линейной комбинацией правильных слов

$$p_i = e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_t},$$

веса которых $\geq n-1$. Заметим, что

$$p_i D_y = \sum_{j=1}^t e_{i_1} \dots [e_{i_j}, y] \dots e_{i_t}.$$

Из доказательства теоремы Пуанкаре-Бирхгофа-Витта следует, что каждый из элементов $e_{i_1} \dots [e_{i_j}, y] \dots e_{i_t}$ является линейной комбинацией правильных слов, веса которых $\geq n$. $\square$

Следствие 2. Если $n \geq 3$, то $[x, y]^{n-1} \in T^{(n)}$ и $[x, y]^{n-2} \notin T^{(n)}$, т.е. индекс нильпотентности коммутатора от свободных порождающих алгебры $F_3^{(n)}$ равен $n - 1$.

В самом деле, поскольку $wt([x, y]^m) = m + 1$, то указанное утверждение немедленно вытекает из теоремы 2. Легко понять, что индекс нильпотентности коммутанта $(F_3^{(n)})'$ алгебры $F_3^{(n)}$ также равен $n - 1$.

Заметим, что включение $[x, y]^{n-1} \in T^{(n)}$ известно (см. [20], предложение 1). Вопрос о точности указанной оценки в [20] не обсуждался.

5. АДДИТИВНАЯ СТРУКТУРА АЛГЕБРЫ $F_3^{(n)}$

В ходе доказательства теоремы 2 было установлено, что аддитивный базис алгебры $F_3^{(n)}(\Phi)$ получается факторизацией базиса Пуанкаре-Бирхгофа-Витта по идеалу $T^{(n)}(F_3)$. Отсюда вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. Аддитивный модуль свободной Φ -алгебры $F_3^{(n)}(\Phi)$ ранга 3 не имеет кручения. В частности, аддитивная группа свободного Ли нильпотентного индекса n кольца $F_3^{(n)}(\mathbb{Z})$ от 3-х порождающих является свободной абелевой.

Теорему 3 можно также получить в виде следствия из теоремы 1 и результатов работы [9].

Проблема кручения обсуждалась в [15], [16] для свободных ассоциативных Ли нильпотентных колец индекса 3 и 4 соответственно.

Отметим, что А.И. Ширшов [21] доказал, что свободное кольцо Ли не имеет кручения, а автор [22] доказал существование элементов степени 13 аддитивного порядка 3 в свободном альтернативном кольце.

Интересной задачей остается изучение аддитивной группы свободного ассоциативного Ли нильпотентного кольца индекса 5. В [23] доказано, что аддитивная группа кольца $F^{(5)}(\mathbb{Z})$ не имеет элементов простого порядка ≥ 5 .

REFERENCES

- [1] S.A. Jennings, *On rings whose associated Lie rings are nilpotent*, Bull. Amer. Math. Soc., **53**:6 (1947), 593–597. Zbl 0032.25301
- [2] V.N. Latyshev, *On choosing a base in one T -ideal*, Sib. Mat. Journal, **4**:5 (1963), 1122–1127. Zbl 0199.07501
- [3] V.N. Latyshev, *On the finite generation of T -ideal with an element $[x_1, x_2, x_3, x_4]$* , Sib. Mat. Journal, **6**:6 (1965), 1432–1434. Zbl 0199.07502
- [4] D. Krakowski, A.Regev, *The polynomial identities of the Grassman algebra*, Trans. Amer. Math. Soc., **181** (1973), 429–438. Zbl 0289.16015
- [5] I.B. Volichenko, *The T -ideal generated by the element $[x_1, x_2, x_3, x_4]$* , Preprint no. 22, Inst. Math. Acad. Sci. Beloruss. SSR (1978), 13 pp.
- [6] A.S. Gordienko, *The codimension of the commutator of length 4*, Usp. Mat. Nauk, **62**:1 (2007), 191–192. Zbl 1167.16016
- [7] A.V. Grishin, S.V. Pchelintsev, *On the centers of relatively free algebras with an identity of Lie nilpotency*, Sb. Math., **206**:11 (2015), 1610–1627. Zbl 1366.16019.
- [8] A.V. Grishin and S.V. Pchelintsev, *Proper central and core polynomials of relatively free associative algebras with identity of Lie nilpotency of degrees 5 and 6*, Math. Sb., **207**:12 (2016), 54–72. Zbl 1372.16020
- [9] R.Tyler, *On the lower central factors of a free associative rings*, Can. J. Math., **27**:2 (1975), 434–438. Zbl 0303.16002

- [10] V.M. Petrogradsky, *Codimension growth of strong Lie nilpotent associative algebras*, Comm. Algebra, **39**:3 (2011), 918–928. Zbl 1226.16017
- [11] N. Gupta, F. Levin, *On the Lie ideals of a ring*, J. Algebra, **81** (1983), 225–231. Zbl 0514.16024
- [12] R.K. Sharma, J.B. Srivastava, *Lie ideals in group rings*, Journal of Pure and Applied Algebra, **63** (1990), 67–80. Zbl 0689.16005
- [13] A. Bapat, D. Jordan, *Lower central series of free algebras in symmetric tensor categories*, J. Algebra, **373** (2013), 299–311. Zbl 1276.16017
- [14] G. Deryabina, A. Krasilnikov, *On some products of commutators in an associative ring*, International Journal of Algebra and Computation, **29**:2 (2019), 333–341.
- [15] S. Bhupatiraju, P. Etingof, D. Jordan, W. Kuzmaul, J. Li *Lower central series of a free associative algebra over the integers and finite fields* J. Algebra, **372** (2012), 251–274. Zbl 1320.16012
- [16] A.Krasilnikov, *The additive group of a Lie nilpotent associative ring*, J. Algebra, **392** (2013), 10–22. Zbl 1296.16019
- [17] S.V. Pchelintsev, *Relatively free associative algebras of ranks 2 and 3 with Lie nilpotency identity and systems of generators of some T-spaces*, arXiv:1801.07771 (20 pages in Russian) [math.RA].
- [18] R.R. Dangovski, *On the maximal containments of lower central series ideals*, arXiv:1509.08030 [math.RA].
- [19] N. Jacobson, *Lie algebras*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, **10**, Interscience, New York–London, 1962. Zbl 0121.27504
- [20] A.V. Grishin, L.M. Tsybula, and A.A. Shokola, *On T-spaces and relations in relatively free, Lie nilpotent, associative algebras*, J. Math. Sci., **177**:6 (2011), 868–877. Zbl 1290.16018
- [21] A.I. Shirshov, *On free Lie rings*, Mat. Sat., **45**:2 (1958), 113–122. Zbl 0080.25503
- [22] S.V. Pchelintsev, *On the torsion of a free alternative ring*, Sib. Mat. Journal, **32**:6. (1991), 142–149. Zbl 0777.17029
- [23] S.V. Pchelintsev, *Additive basis of relatively free associative algebra with the identity of Lie nilpotency of degree 5 and its applications*, Sib. Mat. Journal (pending publication).

SERGEY VALENTINOVICH PCHELINTSEV

DEPARTMENT OF DATA ANALYSIS, DECISION MAKING AND FINANCIAL TECHNOLOGIES,
 FINANCE UNIVERSITY UNDER THE GOVERNMENT OF THE RUSSIAN FEDERATION,
 49, LENINGRADSKY AVE.,
 MOSCOW, 125993, RUSSIA
 E-mail address: pchelinzev@mail.ru