Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. P. Petrov, On the standard identity in a finitely generated nilpotent algebra R over an arbitrary field with condition $\dim R^N/R^{N+1} = 2$, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1981–2002

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.142>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.82.47.9

April 26, 2023, 11:24:25

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 1981–2002 (2019)

DOI 10.33048/semi.2019.16.142

УДК 512.552.4

MSC 16R10

О СТАНДАРТНОМ ТОЖДЕСТВЕ В КОНЕЧНОПОРОЖДЕННОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ АЛГЕБРЕ R НАД ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОЛЕМ С УСЛОВИЕМ $\dim R^N/R^{N+1} = 2$

Е.П. ПЕТРОВ

ABSTRACT. In this paper it is proved that s -generated nilpotent algebra R over arbitrary field with condition $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ for some natural number $N \geq 3$ satisfies the standard identity of degree $N + 2$ if $s \geq N$, or the standard identity of smaller degree than N if $s < N$. The results of this article on a characteristic field other than 2 were obtained in a previous work by the author, published in SEMR.

Keywords: defining relations, identities, nilpotent algebra.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 80-е годы в Днестровской тетради [1] была поставлена задача (№ 1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех n -мерных ассоциативных алгебрах над полем (n — фиксированное число).

В 1980 году С.А.Пихтильниковым [2] эта задача была решена для алгебр с единицей при $n \leq 18$.

Известная теорема Веддерберна сводит вопрос о строении произвольной ассоциативной конечномерной алгебры над полем к соответствующему вопросу для полной алгебры матриц и нильпотентной алгебры, которые к настоящему времени достаточно хорошо изучены. Тем не менее, как для матричных, так и для нильпотентных алгебр остается нерешенным довольно широкий круг задач. В частности, описание определяющих соотношений и тождеств, выполняющихся в этих алгебрах.

PETROV, E.P., ON THE STANDARD IDENTITY IN A FINITELY GENERATED NILPOTENT ALGEBRA R OVER AN ARBITRARY FIELD WITH CONDITION $\dim R^N/R^{N+1} = 2$.

© 2019 ПЕТРОВ Е.П.

Поступила 9 октября 2019 г., опубликована 26 декабря 2019 г.

Что касается нильпотентных алгебр, то с целью решения вышеуказанной задачи (№ 1.23) были проведены следующие исследования.

В 1986 году Ю.Н.Мальцевым [3] изучалось многообразие $\mathfrak{M}_n$ ассоциативных алгебр над произвольным полем, порожденное всеми n -мерными нильпотентными алгебрами. Такие многообразия там были описаны для $n = \overline{1, 6}$, а также доказано, что каждая n -мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет тождествам:

$$x_1 x_2 \dots x_{n-2} = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n-2)}, \quad \sigma \in S_{n-2}, \quad n \geq 6; \quad [x_1, x_2, \dots, x_k] = 0,$$

где $k = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$. Кроме того, в работе [3] был поставлен вопрос:

(*) *Какова степень минимального тождества в многообразии $\mathfrak{M}_n$?*

Заметим, что описание многообразия $\mathfrak{M}_n$ на языке тождеств позволит ответить на вопрос: когда приведенно-свободная алгебра некоторого многообразия аппроксимируется k -мерными нильпотентными алгебрами ($k \leq n$)? Исходя из этого, представляется естественным изучение тождеств сначала нильпотентных n -мерных алгебр, а затем уже произвольных n -мерных алгебр.

В 1989 г. И.Л.Гусевой [4] было доказано, что n -мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству

$$S_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(k)} = 0, \quad \text{где } k = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 2.$$

В 1991 г. автором [6] была сформулирована гипотеза о том, что произвольная n -мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству $S_k(x_1, \dots, x_k) = 0$, где $k = \lfloor \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \rfloor$, в качестве подтверждения этой гипотезы приводится пример n -мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной степени, но не удовлетворяющей никакому полилинейному тождеству меньшей степени, и доказано, что n -мерная нильпотентная алгебра R с условием $\dim R^2/R^3 \leq 2$ удовлетворяет данной гипотезе.

Из этого результата следует, что стандартное тождество $S_k(x_1, \dots, x_k) = 0$, где $k = \lfloor \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \rfloor$, является минимальным тождеством в $\mathfrak{M}_n$ для $n \leq 12$ и $n = 15$ (см. [6]). Таким образом, для малых размерностей был получен положительный ответ на вопрос (*).

Необходимо заметить, что стандартное тождество благодаря своим уникальным свойствам является очень удобным инструментом в исследовании PI -алгебр. Оно довольно часто используется в работах многих авторов.

К примеру, благодаря замечательной теореме С. Амицура, Я. Левицкого (алгебра $M_n(K)$, где K — коммутативная алгебра над полем F , удовлетворяет тождеству $S_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) = 0$) многим авторам, изучающим PI -алгебры, удалось продвинуться в своих исследованиях, поскольку, если алгебра A является подалгеброй $M_n(K)$, то идеал тождеств $T(A)$ содержит идеал тождеств $T(M_n(K))$ для некоторого целого числа $n \geq 1$, в частности, $T(A) \ni S_{2n}(x_1, \dots, x_{2n})$. Эта идея, например, была основной для построения контрпримера к проблеме Капланского о вложении PI -алгебр в $M_n(K)$.

Данная работа продолжает исследования, проводимые ранее в работах автора [6]-[7].

Так, в работе [7] автором изучались строение и определяющие соотношения ассоциативной нильпотентной конечномерной алгебры R над произвольным полем с условием $\dim R^2/R^3 = 2$, и было показано, что всякая такая алгебра удовлетворяет стандартному тождеству степени четыре

$$S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} = 0.$$

Причем эта оценка оказалась точной.

Далее в работах [8], [9] автором изучались строение, определяющие соотношения произвольной ассоциативной s -порожденной нильпотентной алгебры R над полем с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ (для некоторого $N > 2$), и показано, что всякая такая алгебра над полем характеристики, не равной 2, удовлетворяет стандартному тождеству $S_{N+2}(x_1, x_2, \dots, x_{N+2}) = 0$, а при $s < N$ и достаточно больших значениях числа N алгебра удовлетворяет стандартному тождеству значительно меньшей степени, чем N . При этом, эта оценка является точной для бесконечного множества значений N определенного вида.

Использованная автором в работах [8], [9] техника, в основном, была рассчитана на получение некоторой классификации s -порожденных нильпотентных алгебр с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$, построении естественных (и по своему строению простых) определяющих соотношений и, как следствие, получение основного результата о стандартном тождестве, выполняющемся в этих алгебрах.

Надо сказать, что основным источником в применении данной техники явились идеи, изложенные в работе Р. Крузе и Д. Прайса [5].

К сожалению, такая техника, использующая подробное описание определяющих соотношений в алгебре R , не позволила получить основной результат для случая, когда поле имеет характеристику два, поскольку в этом случае естественные определяющие соотношения на порождающих устроены довольно сложно и получить основной результат о стандартном тождестве, выполняющемся в алгебре R , оказалось весьма затруднительно.

В данной работе мы используем несколько иную технику (хотя по многим параметрам и похожую на предыдущую). Отличие новой техники от старой заключается в нахождении в алгебре R специального вида определяющих соотношений, выполняющихся в алгебре R , довольно искусственным образом построенных, которые устроены таким образом, что стандартный полином от элементов алгебры R можно представить в виде суммы таких соотношений.

Использование этой идеи и позволило доказать основной результат о стандартном тождестве, выполняющемся в s -порожденной нильпотентной алгебре R с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ для некоторого ($N > 2$) уже над произвольным полем.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В данной работе мы будем предполагать, что R — нильпотентная конечномерная алгебра R над полем F с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$ для некоторого $N \geq 3$.

Причем поле F будем считать произвольным, если не оговорено иное.

Напомним некоторые определения и обозначения из работ [6] — [9].

Будем называть типом алгебры R следующую строчку натуральных чисел: $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_{m-1})$, где $s_i = \dim R^i/R^{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$, m — индекс нильпотентности алгебры R .

Типу алгебры R соответствует следующая базис-таблица:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline v_1^{(1)} & v_1^{(2)} & v_1^{(3)} & \dots & v_1^{(m-1)} \\ \hline v_2^{(1)} & v_2^{(2)} & v_2^{(3)} & \dots & v_2^{(m-1)} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline v_{s_1}^{(1)} & v_{s_2}^{(2)} & v_{s_3}^{(3)} & \dots & v_{s_{m-1}}^{(m-1)} \\ \hline \end{array},$$

под которой мы понимаем описание базиса алгебры R , где элементы i -го столбца — базис R^i по модулю R^{i+1} , $i = 1, \dots, m-1$.

В работе будем рассматривать хорошо известные тождества:

$p_k^\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1 x_2 \cdots x_k - x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)} = 0$ (перестановочное тождество),

$S_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)} = 0$, (стандартное тождество), где подстановка σ пробегает симметрическую группу S_k .

Если S — подмножество алгебры R , то через $\langle S \rangle$ будем обозначать подалгебру, порожденную S . Если $x \in R, x \notin R^i$ то, рассматривая его образ в R/R^i , условимся вместо $x + R^i$ писать x там, где это не вызовет недоразумений.

Запись $[x]$ обозначает округление числа x в меньшую сторону (целая часть числа, пол), $\lceil x \rceil$ обозначает округление числа x в большую сторону (потолок).

Напомним также некоторые факты из работ [6] - [9].

Прежде всего в работе [8] было получено общее представление о строении конечномерной нильпотентной алгебры R с условием $\dim R^N/R^{N+1} = 2$.

Предложение 1. [8]. Пусть R — конечномерная нильпотентная алгебра над произвольным полем F с условием $\dim R^N/R^{N+1} = \dim R^{N+1}/R^{N+2} = 2$ для некоторого $N \geq 2$. Тогда алгебра R имеет тип

$$\left(s_1 + 2, s_2 + 2, \dots, s_{N-1} + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{k-N+2}, \underbrace{1, \dots, 1}_{t-1} \right)$$

и следующую базис-таблицу:

a	a^2	$\dots$	a^{N-1}	a^N	$\dots$	a^k	a^{k+1}	a^{k+2}	$\dots$	a^{k+t}
b	ab	$\dots$	$a^{N-2}b$	$a^{N-1}b$	$\dots$	$a^{k-1}b$	$a^k b$			
c_1	$v_1^{(2)}$	$\dots$	$v_1^{(N-1)}$							
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
c_{s_1}	$v_{s_2}^{(2)}$	$\dots$	$v_{s_{N-1}}^{(N-1)}$							

где $s_i + 2 = \dim R^i/R^{i+1}$, $i = \overline{1, N-1}$, $k \geq N$, $t \geq 0$, $k+t+1$ — индекс нильпотентности алгебры R .

Имеет место следующее предложение из работы [6]:

Предложение 1. [6]. Пусть R — конечномерная нильпотентная алгебра индекса t над произвольным полем и для некоторого $i \in \{1, \dots, t-1\}$ удовлетворяет условию $\dim R^i/R^{i+1} = 1$. Тогда алгебра R удовлетворяет тождествам $p_{i+1}^\sigma(x_1, \dots, x_{i+1}) = 0$ для всех $\sigma \in S_{i+1}$.

В нашем случае алгебра R удовлетворяет перестановочным тождествам $p_{k+3}^\sigma(x_1, \dots, x_{k+3}) = 0$ для всех $\sigma \in S_{k+3}$.

Очевидно, что одними из основополагающих соотношений от порождающих a, b в алгебре R являются следующие равенства:

$$(1) \quad a^{N-2}ba = Aa^N + Ba^{N-1}b,$$

$$(2) \quad a^{N-2}b^2 = Ca^N + Da^{N-1}b,$$

$$(3) \quad a^{k+1}b = Ea^{k+2},$$

$$\text{где } A = \sum_{p=1}^{k+t-N+1} \alpha_p a^{p-1}, \quad B = \sum_{p=1}^{k-N+2} \beta_p a^{p-1}, \quad C = \sum_{p=1}^{k+t-N+1} \gamma_p a^{p-1},$$

$$D = \sum_{p=1}^{k-N+2} \delta_p a^{p-1}, \quad E = \sum_{p=1}^{t-1} \nu_p a^{p-1}, \quad \alpha_p, \beta_p, \gamma_p, \delta_p, \nu_p \in F.$$

Заметим, что элементы A, B, C, D, E принадлежат подалгебре $\langle a \rangle^1$ с присоединенной единицей, порожденной элементом a , и, поскольку a — нильпотентный элемент, обратимость какого-либо из элементов A, B, C, D, E равносильна наличию у него ненулевого "свободного члена".

При этом, если $A \neq 0$, то $A = \tilde{A}a^{s-1}$, где $\tilde{A}$ — обратим, a^{s-1} — самая маленькая степень с ненулевым коэффициентом, и, если $E \neq 0$, то $E = \tilde{E}a^{r-1}$, где $\tilde{E}$ — обратим, a^{r-1} — самая маленькая степень с ненулевым коэффициентом, $s \in \{1, \dots, k+t-N+1\}$, $r \in \{1, \dots, t-1\}$.

3. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ В АЛГЕБРЕ R

В этой части работы в каждом из утверждений мы будем предполагать, что R — нильпотентная конечномерная алгебра R над полем F с условием $\dim R^N / R^{N+1} = \dim R^{N+1} / R^{N+2} = 2$ для некоторого $N \geq 3$.

Заметим, что при подходящей замене порождающего b можно значительно упростить соотношения (1), (3), выполняющиеся в алгебре R , следя за значениями коэффициентов β_i элемента B из соотношения (1). Этому была посвящена в работе [8] лемма 5. Здесь мы представим аналогичное утверждение, изменив немного формулировку леммы 5 [8].

Лемма 1. *Можно подобрать порождающий элемент b' так, что в алгебре R соотношения (1), (3) принимают следующий вид:*

- 1) в случае $\beta_1 \neq 1$: $a^{N-2}b'a = Ba^{N-1}b', \quad a^{k+1}b' = Ea^{k+2};$
- 2) в случае $A = 0, B = 1$ ($\beta_1 = 1, \beta_2 = \dots = \beta_{k-N+2} = 0$):

$$a^{N-2}b'a = a^{N-1}b', \quad a^{k+1}b' = 0;$$

- 3) в случае $\beta_1 = 1$ и либо $A = 0, B \neq 1$, либо $A \neq 0, B = 1$, либо $A \neq 0, B \neq 1$:

$$a^{N-2}b'a = a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b', \quad a^{k+1}b' = 0,$$

где $l \in \{1, \dots, k+t-N+1\}$.

Доказательство. Пусть $b' = Xa + Yb$, где X, Y — неизвестные пока элементы подалгебры $\langle a \rangle^1$, Y — обратим.

Тогда с учетом соотношения (1) имеем, что

$$\begin{aligned} a^{N-2}b'a &= a^{N-2}Xa + a^{N-2}Yba = Xa^N + Ya^{N-2}ba = \\ &= Xa^N + Y(Aa^N + Ba^{N-1}b) = Xa^N + YAa^N + Ba^{N-1}(Yb) = \\ &= Xa^N + YAa^N + Ba^{N-1}(b' - Xa) = Xa^N + YAa^N - XBa^N + Ba^{N-1}b' = \\ &= (X(1 - B) + YA)a^N + Ba^{N-1}b'. \end{aligned}$$

Рассмотрим далее равенство $a^{N-2}b'a = (X(1 - B) + YA)a^N + Ba^{N-1}b'$ при различных значениях коэффициентов $\beta_p \in F$ элемента B .

Если $\beta_1 \neq 1$, то элемент $(1-B)$ обратим, поэтому при любом Y мы сможем найти такой X , чтобы выполнялось равенство $X(1-B)+YA=0$. Это означает, что $a^{N-2}b'a = Ba^{N-1}b'$ и первое утверждение леммы доказано.

Если $A=0$, $B=1$ ($\beta_1=1$, $\beta_2=\dots=\beta_{k-N+2}=0$), то для любого Y полагая $X=-YE$, получим, что

$$\begin{aligned} a^{N-2}b'a &= (X(1-B)+YA)a^N + Ba^{N-1}b' = 0 + Ba^{N-1}b' = a^{N-1}b', \\ a^{k+1}b' &= Xa^{k+2} + Ya^{k+1}b = (X+YE)a^{k+2} = (-YE+YE)a^{k+2} = 0. \end{aligned}$$

Второе утверждение леммы доказано.

Если $A \neq 0$, $B=1$, то положим $X=-\tilde{A}^{-1}E$, $Y=\tilde{A}^{-1}$. Тогда получим, что

$$\begin{aligned} a^{N-2}b'a &= (X(1-B)+YA)a^N + Ba^{N-1}b' = (0+\tilde{A}^{-1}\tilde{A}a^{s-1})a^N + Ba^{N-1}b' = \\ &= a^{s+N-1} + Ba^{N-1}b', \quad s \in \{1, \dots, k+t-N+1\}, \\ a^{k+1}b' &= Xa^{k+2} + Ya^{k+1}b = (X+YE)a^{k+2} = (-\tilde{A}^{-1}E + \tilde{A}^{-1}E)a^{k+2} = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим далее случай, когда $\beta_1=1$, $\beta_2=\dots=\beta_{n-1}=0$, $\beta_n \neq 0$ для некоторого $n \in \{2, \dots, k-N+2\}$.

В этом случае элемент B можно представить в виде

$$B = \sum_{p=1}^{k-N+2} \beta_p a^{p-1} = 1 + \sum_{p \geq n} \beta_p a^{p-1} = 1 + \left(\sum_{p \geq n} \beta_p a^{p-n} \right) a^{n-1} = 1 + B_1 a^{n-1},$$

где B_1 — обратим.

Если $A=0$, то положим $X=-B_1^{-1}a^{r-1}$, $Y=(\tilde{E}B_1)^{-1}$, где $r \in \{1, \dots, t-1\}$. Тогда получим, что

$$\begin{aligned} a^{N-2}b'a &= (X(1-B)+YA)a^N + Ba^{N-1}b' = (-XB_1a^{n-1}+0)a^N + Ba^{N-1}b' = \\ &= (B_1^{-1}a^{r-1}B_1a^{n-1})a^N + Ba^{N-1}b' = a^{r+n+N-2} + Ba^{N-1}b', \\ a^{k+1}b' &= (X+YE)a^{k+2} = (-B_1^{-1}a^{r-1} + (\tilde{E}B_1)^{-1}\tilde{E}a^{r-1})a^{k+2} = 0. \end{aligned}$$

При $A \neq 0$ возможны следующие варианты: $s \geq n$ или $s < n$ (напомним, что s такое, что $A=\tilde{A}a^{s-1}$, $\tilde{A}$ — обратим, $s \in \{1, \dots, k+t-N+1\}$).

При $s \geq n$ рассмотрим два случая: $(s-n) \geq (r-1)$ и $(r-1) > (s-n)$.

Если $(s-n) \geq (r-1)$, то полагая $X=-(\tilde{E}B_1 + \tilde{A}a^{s-n-r+1})^{-1}E$, $Y=(\tilde{E}B_1 + \tilde{A}a^{s-n-r+1})^{-1}$, получим, что

$$\begin{aligned} a^{N-2}b'a &= (X(1-B)+YA)a^N + Ba^{N-1}b' = \\ &= (-XB_1a^{n-1}+Y\tilde{A}a^{s-1})a^N + Ba^{N-1}b' = (-XB_1+Y\tilde{A}a^{s-n})a^{n+N-1} + Ba^{N-1}b' = \\ &= (\tilde{E}B_1 + \tilde{A}a^{s-n-r+1})^{-1}(\tilde{E}a^{r-1}B_1 + \tilde{A}a^{s-n})a^{n+N-1} + Ba^{N-1}b' = \\ &= (\tilde{E}B_1 + \tilde{A}a^{s-n-r+1})^{-1}(\tilde{E}B_1 + \tilde{A}a^{s-n-r+1})a^{r+n+N-2} + Ba^{N-1}b' = \\ &= a^{r+n+N-2} + Ba^{N-1}b', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{k+1}b' &= Xa^{k+2} + Ya^{k+1}b = (X+YE)a^{k+2} = \\ &= (- (\tilde{E}B_1 + \tilde{A}a^{s-n-r+1})^{-1}E + -(\tilde{E}B_1 + \tilde{A}a^{s-n-r+1})^{-1}E)a^{k+2} = 0. \end{aligned}$$

Если $(r-1) > (s-n)$, то полагая $X = -(\tilde{E}B_1a^{r+n-s-1} + \tilde{A})^{-1}E$,
 $Y = (\tilde{E}B_1a^{r+n-s-1} + \tilde{A})^{-1}$, получим, что

$$\begin{aligned} a^{N-2}b'a &= (X(1-B) + YA)a^N + Ba^{N-1}b' = \\ &= (-XB_1a^{n-1} + Y\tilde{A}a^{s-1})a^N + Ba^{N-1}b' = (-XB_1 + Y\tilde{A}a^{s-n})a^{n+N-1} + Ba^{N-1}b' = \\ &= (\tilde{E}B_1a^{r+n-s-1} + \tilde{A})^{-1}(\tilde{E}a^{r-1}B_1 + \tilde{A}a^{s-n})a^{n+N-1} + Ba^{N-1}b' = \\ &= (\tilde{E}B_1a^{r+n-s-1} + \tilde{A})^{-1}(\tilde{E}B_1a^{r+n-s-1} + \tilde{A})a^{s+N-1} + Ba^{N-1}b' = \\ &= a^{s+N-1} + Ba^{N-1}b', \\ a^{k+1}b' &= Xa^{k+2} + Ya^{k+1}b = (X + YE)a^{k+2} = \\ &= \left(-(\tilde{E}B_1a^{r+n-s-1} + \tilde{A})^{-1}E + (\tilde{E}B_1a^{r+n-s-1} + \tilde{A})^{-1}E\right)a^{k+2} = 0. \end{aligned}$$

Если $s < n$, то полагая $X = -(B_1Ea^{n-s} + \tilde{A})^{-1}E$, $Y = (B_1Ea^{n-s} + \tilde{A})^{-1}$,
 получим, что

$$\begin{aligned} a^{N-2}b'a &= (X(1-B) + YA)a^N + Ba^{N-1}b' = \\ &= (-XB_1a^{n-1} + Y\tilde{A}a^{s-1})a^N + Ba^{N-1}b' = (-XB_1a^{n-s} + Y\tilde{A})a^{s+N-1} + Ba^{N-1}b' = \\ &= ((B_1Ea^{n-s} + \tilde{A})^{-1}EB_1a^{n-s} + (B_1Ea^{n-s} + \tilde{A})^{-1}\tilde{A})a^{s+N-1} + Ba^{N-1}b' = \\ &= (B_1Ea^{n-s} + \tilde{A})^{-1}(EB_1a^{n-s} + \tilde{A})a^{s+N-1} + Ba^{N-1}b' = a^{s+N-1} + Ba^{N-1}b', \\ a^{k+1}b' &= Xa^{k+2} + Ya^{k+1}b = (X + YE)a^{k+2} = \\ &= \left(-(B_1Ea^{n-s} + \tilde{A})^{-1}E + (B_1Ea^{n-s} + \tilde{A})^{-1}E\right)a^{k+2} = 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Далее в тексте мы для удобства будем использовать запись b вместо b' .

Надо сказать, что в работе [8] подробно разобран первый пункт вышеприведенного утверждения — описаны определяющие соотношения в алгебре R и указано конкретное стандартное тождество, выполняющееся в алгебре R .

Рассмотрим отдельно второй пункт леммы 1.

Лемма 2. Если в алгебре R выполняется соотношение $a^{N-2}ba = a^{N-1}b$, то в алгебре также выполняются следующие соотношения:

$$g_1 \cdots g_{N+2} = a^{N+2-i}b^i, \quad i = \overline{1, N+1},$$

где $g_p \in \{a, b\}$, среди которых встречается ровно i порождающих b .

Доказательство. Поскольку для любого $x \in R^N$ имеют место равенства

$$x = A(x)a^N + B(x)a^{N-1}b, \quad xa = A(x)a^{N+1} + B(x)a^{N-1}ba = A(x)a^{N+1} + B(x)a^Nb,$$

где $A(x), B(x) \in \langle a \rangle^1$, то получим, что $[x, a] = 0$ для любого $x \in R^N$.

С другой стороны, с учетом равенства (2) имеем, что

$$\begin{aligned} xab &= A(x)a^{N+1}b + B(x)a^Nb^2 = A(x)a^{N+1}b + B(x)Ca^{N+2} + B(x)Da^{N+1}b, \\ xba &= A(x)a^Nba + B(x)a^{N-1}b^2a = A(x)a^{N+1}b + B(x)(Ca^{N+1} + Da^Nb)a = \\ &= A(x)a^{N+1}b + B(x)Ca^{N+2} + B(x)Da^{N+1}b, \end{aligned}$$

откуда получим, что $x[a, b] = 0$ для любого $x \in R^N$.

Из равенств $[x, a] = 0$ и $x[a, b] = 0$, очевидно, следует утверждение леммы. $\square$

Остается не до конца изученным только третий пункт леммы 1. Далее в этом параграфе мы будем рассматривать только этот случай.

В связи с вышесказанным, в нашем исследовании мы будем полагать, что основополагающими соотношениями от порождающих a, b в алгебре R являются следующие равенства:

$$(4) \quad a^{N-2}ba = a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b,$$

$$(5) \quad a^{N-2}b^2 = Ca^N + Da^{N-1}b,$$

$$(6) \quad a^{k+1}b = 0,$$

где $l \in \{1, \dots, k+t-N+1\}$, $B = \sum_{p=1}^{k-N+2} \beta_p a^{p-1}$, $C = \sum_{p=1}^{k+t-N+1} \gamma_p a^{p-1}$,

$D = \sum_{p=1}^{k-N+2} \delta_p a^{p-1}$, $\beta_p, \gamma_p, \delta_p \in F$, причем $\beta_1 = 1$.

Замечание. Справедливо следующее неравенство: $l > t-2$, поскольку с учетом равенств (4), (6) имеем, что

$$a^{k+1}ba = a^{k-N+3} \cdot a^{N-2}ba = a^{k-N+3}(a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b) = a^{l+k+2} = 0.$$

Лемма 3. В алгебре R выполняются соотношения

$$a^k b g_p = \varepsilon(g_p) a^{k+t}, \quad g_p a^k b = \xi(g_p) a^{k+t},$$

где $\varepsilon(g_p), \xi(g_p) \in F$, g_p — один из порождающих a, b, c_i , $i = \overline{1, s-2}$, $p = \overline{1, s}$.

Доказательство. Если $t < 2$, то $a^k b g_p = g_p a^k b = 0$, то есть $\varepsilon(g_p) = \xi(g_p) = 0$.

Пусть далее $t \geq 2$.

Рассмотрим равенство $a^k b g_p = \varepsilon_{k+2} a^{k+2} + \dots + \varepsilon_{k+t} a^{k+t}$, $\varepsilon_i \in F$.

Домножая слева на a , с учетом равенства (6) в алгебре R , получим, что

$$a^{k+1} b g_p = \varepsilon_{k+2} a^{k+3} + \dots + \varepsilon_{k+t-1} a^{k+t} = 0.$$

Откуда следует, что $\varepsilon_{k+2} = \dots = \varepsilon_{k+t-1} = 0$, и, следовательно,

$$a^k b g_p = \varepsilon_{k+t} a^{k+t} = \varepsilon(g_p) a^{k+t}.$$

Рассмотрим также равенство $g_p a^k b = \xi_{k+2} a^{k+2} + \dots + \xi_{k+t} a^{k+t}$, $\xi_i \in F$.

Домножая справа на a , с учетом предыдущего, получим, что

$$g_p a^k b a = \xi_{k+2} a^{k+3} + \dots + \xi_{k+t-1} a^{k+t} = 0.$$

Откуда следует, что $\xi_{k+2} = \dots = \xi_{k+t-1} = 0$, и, следовательно,

$$g_p a^k b = \xi_{k+t} a^{k+t} = \xi(g_p) a^{k+t}.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. В алгебре R для любого $u \in R^N$

$$au = 0 \text{ тогда, и только тогда, когда } u = \mu(u) a^{k+t} + \nu(u) a^k b,$$

$$au = \mu a^{k+t} \text{ тогда, и только тогда, когда } u = A(u) a^{k+t-1} + \nu(u) a^k b,$$

для некоторых $\mu(u), \nu(u) \in F$, $A(u) \in \langle a \rangle^1$.

Доказательство. Элемент $u \in R^N$ можно представить в следующем виде:

$$u = \mu_1 a^N + \dots + \mu_{k+t-N+1} a^{k+t} + \nu_1 a^{N-1} b + \dots + \nu_{k-N+2} a^k b, \quad \mu_i, \nu_i \in F.$$

Тогда с учетом равенства (6) получим равенство

$$au = \mu_1 a^{N+1} + \dots + \mu_{k+t-N} a^{k+t} + \nu_1 a^{N-1} b + \nu_{k-N+1} a^k b.$$

Предположим, что $au = 0$.

Тогда $\mu_1 = \dots = \mu_{k+t-N} = \nu_1 = \dots = \nu_{k-N+1} = 0$, и имеет место равенство

$$u = \mu_{k+t-N+1} a^{k+t} + \nu_{k-N+2} a^k b = \mu(u) a^{k+t} + \nu(u) a^k b.$$

В обратную сторону утверждение очевидно.

Предположим, что $au = \mu a^{k+t}$, $\mu \neq 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} au - \mu a^{k+t} &= \mu_1 a^{N+1} + \dots + \mu_{k+t-N-1} a^{k+t-1} + (\mu_{k+t-N} - \mu) a^{k+t} + \dots \\ &\quad \dots + \nu_1 a^{N-1} b + \nu_{k-N+1} a^k b = 0, \end{aligned}$$

и, значит, $\mu_1 = \dots = \mu_{k+t-N-1} = \nu_1 = \dots = \nu_{k-N+1} = 0$, $\mu_{k+t-N} = \mu$ (при $k = N$ и $t = 1$: $\nu_1 = 0$, $\mu_1 = \mu$).

Получим, что

$$u = \mu a^{k+t-1} + \mu_{k+t-N+1} a^{k+t} + \nu_{k-N+2} a^k b = A(u) a^{k+t-1} + \nu(u) a^k b,$$

где $A(u) = \mu + \mu_{k+t-N+1} a \in \langle a \rangle^1$.

В обратную сторону утверждение очевидно. Лемма доказана. $\square$

Лемма 5. Если в алгебре R для элемента $u \in R^{N-n}$, $n \in \{1, \dots, N-1\}$, справедливо равенство $a^n u = \mu a^{k+t} + \nu a^k b$, $\mu, \nu \in F$, то имеют место также следующие равенства:

$$a^{n-r} u g_1 \cdots g_r = A(u, g_1, \dots, g_r) a^{k+t-1} + \nu(u, g_1, \dots, g_r) a^k b, \quad r = \overline{1, n},$$

для некоторых $\nu(g_1, \dots, g_r) \in F$, $A(u, g_1, \dots, g_r) \in \langle a \rangle^1$ и порождающих $g_p \in \{a, b, c_i\}$, $i = \overline{1, s-2}$, $p = \overline{1, r}$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по $r = \overline{1, n}$.

Очевидно, что из равенства $a^n u = \mu a^{k+t} + \nu a^k b$ с учетом леммы 3 следует, что $a^n u g_1 = \mu' a^{k+t}$, $\mu' \in F$, и, с учетом леммы 4, имеем, что

$$a^{n-1} u g_1 = A(u, g_1) a^{k+t-1} + \nu(u, g_1) a^k b, \quad \nu(u, g_1) \in F, \quad A(u, g_1) \in \langle a \rangle^1.$$

Предположим, что имеет место следующее равенство:

$$a^{n-r+1} u g_1 \cdots g_{r-1} = A(u, g_1, \dots, g_{r-1}) a^{k+t-1} + \nu(u, g_1, \dots, g_{r-1}) a^k b,$$

где $\nu(u, g_1, \dots, g_{r-1}) \in F$, $A(u, g_1, \dots, g_{r-1}) \in \langle a \rangle^1$.

Рассмотрим элемент $a^{n-r} u g_1 \cdots g_{r-1} g_r$.

С учетом индукционного предположения и леммы 3 имеем, что

$$a^{n-r+1} u g_1 \cdots g_{r-1} g_r = \mu'' a^{k+t}, \quad \mu'' \in F.$$

Отсюда, по лемме 4, получим следующее равенство:

$$a^{n-r} u g_1 \cdots g_{r-1} g_r = A(u, g_1, \dots, g_r) a^{k+t-1} + \nu(u, g_1, \dots, g_r) a^k b,$$

для некоторых $\nu(g_1, \dots, g_r) \in F$, $A(u, g_1, \dots, g_r) \in \langle a \rangle^1$.

Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. Если в алгебре R для элемента $u \in R^{N-n}$, $n \in \{1, \dots, N-1\}$, справедливо равенство $a^n u = 0$, то имеют место также следующие равенства:

$$ug_1g_2 \cdots g_{n+2} = g_1ug_2 \cdots g_{n+2} = \cdots = g_1g_2 \cdots g_{n+2}u = 0,$$

где $g_p \in \{a, b, c_i\}$ — произвольные порождающие, $i = \overline{1, s-2}$.

Доказательство. Очевидно, что равенство $ug_1g_2 \cdots g_{n+2} = 0$ следует непосредственно из леммы 5.

Рассмотрим элемент

$$g_1ug_2 \cdots g_n = \mu_1 a^N + \dots + \mu_{k+t-N+1} a^{k+t} + \lambda_1 a^{N-1} b + \dots + \lambda_{k-N+2} a^k b, \quad \mu_i, \lambda_i \in F.$$

Домножая справа на a , с учетом соотношения (4), лемм 3 и 5 получим, что

$$\begin{aligned} g_1ug_2 \cdots g_n a &= \mu_1 a^{N+1} + \dots + \mu_{k+t-N} a^{k+t} + \lambda_1 a^{N-1} ba + \dots + \lambda_{k-N+2} a^k ba = \\ &= \mu_1 a^{N+1} + \dots + \mu_{k+t-N} a^{k+t} + \lambda_1 a(a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b) + \dots \\ &\dots + \lambda_{k-N+1} a^{k-N+1} (a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b) + \lambda_{k-N+2} a^{k-N+2} (a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b) = \\ &= \mu_1 a^{N+1} + \dots + \mu_{k+t-N-1} a^{k+t-1} + \mu_{k+t-N} a^{k+t} + \lambda_1 a^{l+N} + \dots \\ &\dots + \lambda_{k-N+1} a^{l+k} + \lambda_{k-N+2} a^{l+k+1} + B(\lambda_1 a^N b + \dots + \lambda_{k-N+1} a^k b) = \mu a^{k+t}. \end{aligned}$$

По замечанию $l > t-2$, то есть $a^{l+k+1} = \varepsilon a^{k+t}$, где $\varepsilon \in \{0, 1\}$, и поэтому имеет место следующее равенство:

$$\mu_1 a^{N+1} + \dots + \mu_{k+t-N-1} a^{k+t-1} + \mu' a^{k+t} + \lambda_1 a^{l+N} + \dots + \lambda_{k-N+1} a^{l+k} + B(\lambda_1 a^N b + \dots + \lambda_{k-N+1} a^k b) = 0,$$

где $\mu' = \mu_{k+t-N} + \lambda_{k-N+2} \varepsilon - \mu$.

Поскольку элемент B обратим (так как $\beta_1 = 1$), то $\lambda_1 = \dots = \lambda_{k-N+1} = 0$ и, как следствие, $\mu_1 = \dots = \mu_{k+t-N-1} = 0$.

Следовательно,

$$g_1ug_2 \cdots g_n = A_1 a^{k+t-1} + \nu_1 a^k b,$$

для некоторых $\nu_1 \in F$, $A_1 \in \langle a \rangle^1$ и порождающих $g_1, g_2, \dots, g_n$.

Рассмотрим далее элемент

$$g_1g_2ug_3 \cdots g_n = \mu'_1 a^N + \dots + \mu'_{k+t-N+1} a^{k+t} + \lambda'_1 a^{N-1} b + \dots + \lambda'_{k-N+2} a^k b, \quad \mu'_i, \lambda'_i \in F.$$

Домножая справа на a , с учетом соотношения (4) и того, что имеет место равенство $g_2ug_3 \cdots g_n a = A'_1 a^{k+t-1} + \nu'_1 a^k b$, для некоторых $\nu'_1 \in F$, $A'_1 \in \langle a \rangle^1$, получим, что

$$\begin{aligned} g_1g_2ug_3 \cdots g_n a &= \mu'_1 a^{N+1} + \dots + \mu'_{k+t-N} a^{k+t} + \lambda'_1 a^{N-1} ba + \dots + \lambda'_{k-N+2} a^k ba = \\ &= \mu'_1 a^{N+1} + \dots + \mu'_{k+t-N} a^{k+t} + \lambda'_1 a(a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b) + \dots \\ &\dots + \lambda'_{k-N+1} a^{k-N+1} (a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b) + \lambda'_{k-N+2} a^{k-N+2} (a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b) = \\ &= \mu'_1 a^{N+1} + \dots + \mu'_{k+t-N-1} a^{k+t-1} + \mu'_{k+t-N} a^{k+t} + \lambda'_1 a^{l+N} + \dots \\ &\dots + \lambda'_{k-N+1} a^{l+k} + \lambda'_{k-N+2} a^{l+k+1} + B(\lambda'_1 a^N b + \dots + \lambda'_{k-N+1} a^k b) = \mu'' a^{k+t}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda'_1 = \dots = \lambda'_{k-N+1} = 0$ и $\mu'_1 = \dots = \mu'_{k+t-N-1} = 0$, и, поэтому, $g_1g_2ug_3 \cdots g_n = A_2 a^{k+t-1} + \nu_2 a^k b$, для некоторых $\nu_2 \in F$, $A_2 \in \langle a \rangle^1$ и порождающих $g_1, g_2, \dots, g_n$.

Продолжая этот процесс, получим, что

$$\begin{aligned} g_1ug_2 \cdots g_n &= A_1 a^{k+t-1} + \nu_1 a^k b, \\ g_1g_2ug_3 \cdots g_n &= A_2 a^{k+t-1} + \nu_2 a^k b, \\ &\dots, \dots, \dots, \\ g_1g_2 \cdots g_n u &= A_n a^{k+t-1} + \nu_n a^k b, \end{aligned}$$

для некоторых $\nu_1, \dots, \nu_n \in F$, $A_1, \dots, A_n \in \langle a \rangle^1$ и порождающих $g_1, g_2, \dots, g_n$.

Домножая эти равенства справа и слева на произвольные порождающие g' и g'' , после естественных переобозначений получим, что

$$ug_1g_2 \cdots g_{n+2} = g_1ug_2 \cdots g_{n+2} = \cdots = g_1g_2 \cdots g_{n+2}u = 0.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 7. В алгебре R выполняются следующие соотношения:

$$a^{M-i-1}ba^i = (1 + B + \dots + B^{i-1})a^{l+M-1} + B^i a^{M-1}b + \nu_i a^k b + A_i a^{k+t-1},$$

где $i = \overline{1, M-1}$, $M \geq N$, $\nu_i \in F$, $A_i \in \langle a \rangle^1$, l и B — из соотношения (4).

Доказательство. Ввиду (4) в алгебре R выполняется соотношение

$$a^{N-2}ba = a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b.$$

Очевидно, что в результате домножения

$$a^{M-N} \cdot a^{N-2}ba = a^{M-N}(a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b)$$

в алгебре R также выполняется соотношение

$$a^{M-2}ba = a^{l+M-1} + Ba^{M-1}b,$$

где $M \geq N$.

Домножая указанное равенство справа на a , получим, что

$$\begin{aligned} a^{M-2}ba \cdot a &= a^{l+M} + Ba^{M-1}ba = \\ &= a^{l+M} + Ba(a^{l+M-1} + Ba^{M-1}b) = (1+B)a^{l+M} + B^2a^M b. \end{aligned}$$

С учетом леммы 4 получим следующее равенство:

$$a^{M-3}ba^2 = (1+B)a^{l+M-1} + B^2a^{M-1}b + \nu_2 a^k b + A_2 a^{k+t-1}, \quad \nu_2 \in F, A_2 \in \langle a \rangle^1.$$

Проводя доказательство индукцией по $i > 1$, предположим, что для некоторых $\nu_{i-1} \in F$, $A_{i-1} \in \langle a \rangle^1$, имеет место равенство

$$a^{M-i}ba^{i-1} = (1+B+\dots+B^{i-2})a^{l+M-1} + B^{i-1}a^{M-1}b + \nu_{i-1}a^k b + A_{i-1}a^{k+t-1}.$$

Тогда, домножая это равенство справа на a , с учетом леммы 3 и равенства (4) для некоторого $\mu \in F$ получим, что

$$\begin{aligned} a^{M-i}ba^i &= (1+B+\dots+B^{i-2})a^{l+M} + B^{i-1}a^{M-1}ba = \\ &= (1+B+\dots+B^{i-2})a^{l+M} + B^{i-1}a(a^{l+M-1} + Ba^{M-1}b) = \\ &= (1+B+\dots+B^{i-2}+B^{i-1})a^{l+M} + B^i a^M b + \mu a^{k+t}. \end{aligned}$$

Откуда с учетом леммы 4 имеем, что

$$a^{M-i-1}ba^i = (1+B+\dots+B^{i-1})a^{l+M-1} + B^i a^{M-1}b + \nu_i a^k b + A_i a^{k+t-1}$$

для некоторых $\nu_i \in F$, $A_i \in \langle a \rangle^1$.

Лемма доказана. $\square$

Предложение 1. В алгебре R выполняются следующие соотношения:

$$a^n P(i_1, i_2, i_3; m) g_1 \cdots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n} = 0,$$

где $P(i_1, i_2, i_3; m) = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma a^{\sigma(i_1)}(ba^m)a^{\sigma(i_2)}ba^{\sigma(i_3)} = 0$, i_1, i_2, i_3 , такие что

$0 \leq i_1 < i_2 < i_3$, $m \geq 0$, $n \geq 0$, $i_1+i_2+i_3+m+n \leq M$, $M \geq N$, g_p — произвольные порождающие из $\{a, b, c_i\}$, $i = \overline{1, s-2}$, $p = \overline{1, M-i_1-i_2-i_3-m-n}$.

Доказательство. В соответствии с утверждением леммы 7 в алгебре R выполняется соотношение

$$a^{M-j_2-1}ba^{j_2} = (1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{l+M-1} + B^{j_2}a^{M-1}b + \nu_{j_2}a^kb + A_{j_2}^0a^{k+t-1}$$

для некоторых $\nu_{j_2} \in F$ ($j_2 \in \{1, M-1\}$), $A_{j_2}^0 \in \langle a \rangle^1$.

Домножая указанное равенство справа на b , с учетом леммы 3 и равенства (5) получим для некоторого $\rho_{j_2} \in F$, что

$$\begin{aligned} a^{M-j_2-1}ba^{j_2}b &= (1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{l+M-1}b + B^{j_2}a^{M-1}b^2 = \\ &= (1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{l+M-1}b + B^{j_2}Ca^{M+1} + B^{j_2}Da^Mb + \rho_{j_2}a^{k+t}. \end{aligned}$$

По лемме 4 имеем следующее равенство:

$$\begin{aligned} &a^{M-2-j_2}ba^{j_2}b \equiv \\ \equiv &(1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{l+M-2}b + B^{j_2}Ca^M + B^{j_2}Da^{M-1}b + \mu_0a^kb + A_0a^{k+t-1} \end{aligned}$$

для некоторых $\mu_0 \in F$, $A_0 \in \langle a \rangle^1$.

Домножая указанное равенство справа на a , с учетом леммы 3 и равенства (4) получим для некоторого $\lambda_1 \in F$, что

$$\begin{aligned} a^{M-2-j_2}ba^{j_2}ba &= (1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{l+M-2}ba + B^{j_2}Ca^{M+1} + B^{j_2}Da^{M-1}ba = \\ &= (1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^l(a^{l+M-1} + Ba^{M-1}b) + B^{j_2}Ca^{M+1} + \\ &+ B^{j_2}Da(a^{l+M-1} + Ba^{M-1}b) = B^{j_2}Ca^{M+1} + (1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{2l+M-1} + \\ &+ B(1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{l+M-1}b + B^{j_2}Da^{l+M} + B^{j_2+1}Da^Mb + \lambda_1a^{k+t}. \end{aligned}$$

Для удобства перепишем это равенство в следующем виде:

$$\begin{aligned} &a^{M-2-j_2}ba^{j_2}ba = \\ &= G_1a^{M+1} + B(1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{l+M-1}b + B^{j_2+1}Da^Mb + \lambda_1a^{k+t}, \end{aligned}$$

где $G_1 \in \langle a \rangle^1$.

По лемме 4 имеем следующее равенство:

$$\begin{aligned} &a^{M-2-j_2-1}ba^{j_2}ba = \\ &= G_1a^M + B(1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{l+M-2}b + B^{j_2+1}Da^{M-1}b + \mu_1a^kb + A_1a^{k+t-1}, \end{aligned}$$

для некоторых $\mu_1 \in F$, $A_1 \in \langle a \rangle^1$.

Продолжая этот процесс домножения справа на a , получим, что

$$\begin{aligned} (7) \quad &a^{M-2-j_2-j_3}ba^{j_2}ba^{j_3} = G_{j_3}a^M + B^{j_3}(1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{l+M-2}b + \\ &+ B^{j_2+j_3}Da^{M-1}b + \mu_{j_3}a^kb + A_{j_3}a^{k+t-1}, \end{aligned}$$

для некоторых $\mu_{j_3} \in F$, $A_{j_3} \in \langle a \rangle^1$, $j_2 + j_3 \leq M-2$, $G_{j_3} \in \langle a \rangle^1$.

С другой стороны, домножая равенство (5) справа на a , имеем, что

$$\begin{aligned} a^{M-2}b^2a &= Ca^{M+1} + Da^{M-1}ba = Ca^{M+1} + Da(a^{l+M-1} + Ba^{M-1}b) = \\ &= Ca^{M+1} + Da^{l+M} + BDa^Mb = H_1a^{M+1} + BDa^Mb, \end{aligned}$$

где $H_1 \in \langle a \rangle^1$.

С учетом леммы 4 получим следующее равенство:

$$a^{M-3}b^2a = H_1a^M + BDa^{M-1}b + \nu_1a^kb + A'_1a^{k+t-1}$$

для некоторых $\nu_1 \in F$, $A'_1 \in \langle a \rangle^1$.

Продолжая этот процесс домножения справа на a , получим, что

$$a^{M-2-i}b^2a^i = H_ia^M + B^iDa^{M-1}b + \nu_ia^kb + A'_ia^{k+t-1}$$

для некоторых $\nu_i \in F$, $A'_i \in \langle a \rangle^1$, $i \in \{0, M-2\}$, $H_i \in \langle a \rangle^1$.

При $i = j_2 + j_3$ имеем следующее равенство:

$$a^{M-2-j_2-j_3}b^2a^{j_2+j_3} = H_ia^M + B^{j_2+j_3}Da^{M-1}b + \nu_ia^kb + A'_ia^{k+t-1}.$$

Рассматривая разность равенства (7) и последнего равенства, получим, что

$$\begin{aligned} & a^{M-2-j_2-j_3}(ba^{j_2}ba^{j_3} - b^2a^{j_2+j_3}) = \\ & = Ka^M + B^{j_3}(1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{l+M-2}b + \rho a^kb + A''a^{k+t-1}, \end{aligned}$$

где $K = (G_{j_3} - H_i) \in \langle a \rangle^1$, $\rho = (\mu_{j_3} - \nu_i) \in F$, $A'' = A_{j_3} - A'_i$.

Домножая это равенство справа на a , с учетом леммы 3 и равенства (4) получим для некоторого $\lambda_2 \in F$, что

$$\begin{aligned} & a^{M-2-j_2-j_3}(ba^{j_2}ba^{j_3} - b^2a^{j_2+j_3})a = \\ & = Ka^{M+1} + B^{j_3}(1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^l(a^{l+M-1} + Ba^{M-1}b) = \\ & = Ka^{M+1} + B^{j_3}(1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{2l+M-1} + \\ & + B^{j_3+1}(1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{l+M-1}b + \lambda_2a^{k+t}, \end{aligned}$$

По лемме 4 имеем следующее равенство:

$$\begin{aligned} & a^{M-2-j_2-j_3-1}(ba^{j_2}ba^{j_3} - b^2a^{j_2+j_3})a = \\ & = Ka^M + B^{j_3}(1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{2l+M-2} + \\ & + B^{j_3+1}(1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{l+M-2}b + \rho_1a^kb + A'_1a^{k+t-1} \end{aligned}$$

для некоторых $\rho_1 \in F$, $A'_1 \in \langle a \rangle^1$.

Продолжая этот процесс домножения справа на a , получим, что

$$\begin{aligned} & a^{M-2-j_2-j_3-j}(ba^{j_2}ba^{j_3} - b^2a^{j_2+j_3}) \cdot a^j = \\ & = Ka^M + B^{j_3}(1 + B + \dots + B^{j-1})(1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{2l+M-2} + \\ & + B^{j_3+j}(1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{l+M-2}b + \rho_ja^kb + A'_ja^{k+t-1} \end{aligned}$$

для некоторых $\rho_j \in F$, $A'_j \in \langle a \rangle^1$, $j \geq 1$, $j_2 + j_3 + j \leq M-2$.

Также очевидно, что

$$\begin{aligned} & a^j \cdot a^{M-2-j_2-j_3-j}(ba^{j_2}ba^{j_3} - b^2a^{j_2+j_3}) = \\ & = Ka^M + B^{j_3}(1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{l+M-2}b + \rho a^kb + A''a^{k+t-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} & a^{M-2-j_2-j_3-j}[ba^{j_2}ba^{j_3} - b^2a^{j_2+j_3}, a^j] = \\ & = B^{j_3}(1 + B + \dots + B^{j-1})(1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{2l+M-2} + \\ & + B^{j_3}(B^j - 1)(1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{l+M-2}b + (\rho_j - \rho)a^kb + (A'_j - A'')a^{k+t-1}. \end{aligned}$$

Откуда получим, что

$$\begin{aligned} & a^{M-2-j_2-j_3-j}([ba^{j_2}ba^{j_3}, a^j] - [b^2a^{j_2+j_3}, a^j] - \\ & - B^{j_3}(1 + B + \dots + B^{j-1})(1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{2l+j_2+j_3+j} - \\ & - B^{j_3}(B^j - 1)(1 + B + \dots + B^{j_2-1})a^{l+j_2+j_3+j}b) = (\rho_j - \rho)a^kb + (A'_j - A'')a^{k+t-1}. \end{aligned}$$

Тогда по лемме 5 для $r \geq 1$ имеем следующее равенство:

$$a^{M-2-j_2-j_3-j-r} \left([ba^{j_2}ba^{j_3}, a^j] - [b^2a^{j_2+j_3}, a^j] - \right. \\ \left. -B^{j_3}(1+B+\dots+B^{j-1})(1+B+\dots+B^{j_2-1})a^{2l+j_2+j_3+j} - \right. \\ \left. -B^{j_3}(B^j-1)(1+B+\dots+B^{j_2-1})a^{l+j_2+j_3+j}b \right) g_1 \dots g_r = \widehat{\rho}a^kb + \widehat{A}a^{k+t-1}$$

для некоторых $\widehat{\rho} \in F$, $\widehat{A} \in \langle a \rangle^1$, и порождающих $g_p \in \{a, b, c_i\}$, $i = \overline{1, s-2}$, $p = \overline{1, r}$, при $j_2 + j_3 + j + r \leq M-2$.

Поскольку $R^{k+t+1} = 0$, с учетом леммы 3 получим, что

$$a^{M-2-j_2-j_3-j-r} \left([ba^{j_2}ba^{j_3}, a^j] - [b^2a^{j_2+j_3}, a^j] - \right. \\ \left. -B^{j_3}(1+B+\dots+B^{j-1})(1+B+\dots+B^{j_2-1})a^{2l+j_2+j_3+j} - \right. \\ \left. -B^{j_3}(B^j-1)(1+B+\dots+B^{j_2-1})a^{l+j_2+j_3+j}b \right) g_1 \dots g_r g_{r+1} g_{r+2} = 0.$$

Введя новые обозначения $n + j_1 = M - 2 - j_2 - j_3 - j - r$, $n \geq 0$, $j_1 \geq 0$ (при этом $r + 2 = M - j_1 - j_2 - j_3 - j - n$), имеем следующее равенство:

$$a^n \left(a^{j_1} [ba^{j_2}ba^{j_3}, a^j] - a^{j_1} [b^2a^{j_2+j_3}, a^j] - \right. \\ (8) \quad \left. -B^{j_3}(1+B+\dots+B^{j-1})(1+B+\dots+B^{j_2-1})a^{2l+j_1+j_2+j_3+j} - \right. \\ \left. -B^{j_3}(B^j-1)(1+B+\dots+B^{j_2-1})a^{l+j_1+j_2+j_3+j}b \right) g_1 \dots g_{M-j_1-j_2-j_3-j-n} = 0,$$

где $j_1 + j_2 + j_3 + j + n \leq M$.

Приступим теперь к доказательству непосредственно самого утверждения предложения.

Рассмотрим следующее выражение:

$$a^n P(i_1, i_2, i_3; m) g_1 \dots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n},$$

где $P(i_1, i_2, i_3; m) = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma a^{\sigma(i_1)} (ba^m) a^{\sigma(i_2)} ba^{\sigma(i_3)} = 0$, i_1, i_2, i_3 , такие что

$0 \leq i_1 < i_2 < i_3$, $m \geq 0$, $n \geq 0$, $i_1 + i_2 + i_3 + m + n \leq M$, $M \geq N$, g_p — произвольные порождающие из $\{a, b, c_i\}$, $i = \overline{1, s-2}$, $p = \overline{1, N - i_1 - i_2 - i_3 - m - n}$.

Легко видеть, что

$$a^n P(i_1, i_2, i_3; m) g_1 \dots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n} = \\ = a^n \left(\sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma a^{\sigma(i_1)} (ba^m) a^{\sigma(i_2)} ba^{\sigma(i_3)} \right) g_1 \dots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n} = \\ = a^n \left((a^{i_1} ba^{m+i_2} ba^{i_3} - a^{i_3} ba^{m+i_2} ba^{i_1}) + (a^{i_2} ba^{m+i_3} ba^{i_1} - a^{i_1} ba^{m+i_3} ba^{i_2}) + \right. \\ \left. + (a^{i_3} ba^{m+i_1} ba^{i_2} - a^{i_2} ba^{m+i_1} ba^{i_3}) \right) g_1 \dots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n} = \\ = a^n \left(a^{i_1} [ba^{m+i_2} ba^{i_1}, a^{i_3-i_1}] - a^{i_1} [ba^{m+i_3} ba^{i_1}, a^{i_2-i_1}] - \right. \\ \left. - a^{i_2} [ba^{m+i_1} ba^{i_2}, a^{i_3-i_2}] \right) g_1 \dots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n}.$$

Используя равенство (8), получим, что

$$a^n P(i_1, i_2, i_3; m) g_1 \dots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n} = \\ = a^n \left(a^{i_1} [b^2a^{m+i_1+i_2}, a^{i_3-i_1}] + \right. \\ + B^{i_1} (1+B+\dots+B^{i_3-i_1-1})(1+B+\dots+B^{m+i_2-1})a^{2l+i_1+i_2+i_3+m} + \\ + B^{i_1} (B^{i_3-i_1}-1)(1+B+\dots+B^{m+i_2-1})a^{l+i_1+i_2+i_3+m}b - \\ \left. - a^{i_1} [b^2a^{m+i_1+i_3}, a^{i_2-i_1}] - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -B^{i_1}(1+B+\dots+B^{i_2-i_1-1})(1+B+\dots+B^{m+i_3-1})a^{2l+i_1+i_2+i_3+m}- \\
& -B^{i_1}(B^{i_2-i_1}-1)(1+B+\dots+B^{m+i_3-1})a^{l+i_1+i_2+i_3+m}b- \\
& -a^{i_2}[b^2a^{m+i_1+i_2}, a^{i_3-i_2}]- \\
& -B^{i_2}(1+B+\dots+B^{i_3-i_2-1})(1+B+\dots+B^{m+i_1-1})a^{2l+i_1+i_2+i_3+m}- \\
& -B^{i_2}(B^{i_3-i_2}-1)(1+B+\dots+B^{m+i_1-1})a^{l+i_1+i_2+i_3+m}b) g_1 \cdots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно выражение

$$a^{i_1}[b^2a^{m+i_1+i_2}, a^{i_3-i_1}] - a^{i_1}[b^2a^{m+i_1+i_3}, a^{i_2-i_1}] - a^{i_2}[b^2a^{m+i_1+i_2}, a^{i_3-i_2}].$$

Преобразовав его, получим следующее равенство:

$$\begin{aligned}
& [b^2a^{m+i_1+i_2}, a^{i_3}] - [b^2a^{m+i_1+i_2}, a^{i_1}]a^{i_3-i_1}- \\
& -[b^2a^{m+i_1+i_3}, a^{i_2}] + [b^2a^{m+i_1+i_3}, a^{i_1}]a^{i_2-i_1}- \\
& -[b^2a^{m+i_1+i_2}, a^{i_3}] + [b^2a^{m+i_1+i_2}, a^{i_2}]a^{i_3-i_2}= \\
& = -[b^2a^{m+i_1+i_2}, a^{i_1}]a^{i_3-i_1} - [b^2a^{m+i_1+i_3}, a^{i_2}] + \\
& + [b^2a^{m+i_1+i_3}, a^{i_1}]a^{i_2-i_1} + [b^2a^{m+i_1+i_2}, a^{i_2}]a^{i_3-i_2}= \\
& = -[b^2a^{m+i_2+i_3}, a^{i_1}] - [b^2a^{m+i_1+i_3}, a^{i_2}] + \\
& + [b^2a^{m+i_2+i_3}, a^{i_1}] + [b^2a^{m+i_1+i_3}, a^{i_2}] = 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим далее выражения при элементах $a^{2l+i_1+i_2+i_3+m}$ и $a^{l+i_1+i_2+i_3+m}b$ и проведем также необходимые преобразования.

$$\begin{aligned}
& B^{i_1}(1+B+\dots+B^{i_3-i_1-1})(1+B+\dots+B^{m+i_2-1})- \\
& -B^{i_1}(1+B+\dots+B^{i_2-i_1-1})(1+B+\dots+B^{m+i_3-1})- \\
& -B^{i_2}(1+B+\dots+B^{i_3-i_2-1})(1+B+\dots+B^{m+i_1-1})= \\
& = (B^{i_1}+B^{i_1+1}+\dots+B^{i_3-1})(1+B+\dots+B^{m+i_2-1})- \\
& -(B^{i_1}+B^{i_1+1}+\dots+B^{i_2-1})(1+B+\dots+B^{m+i_3-1})- \\
& -(B^{i_2}+B^{i_2+1}+\dots+B^{i_3-1})(1+B+\dots+B^{m+i_1-1})= \\
& = (B^{i_1}+\dots+B^{i_2-1}+B^{i_2}+\dots+B^{i_3-1})(1+B+\dots+B^{m+i_2-1})- \\
& -(B^{i_1}+B^{i_1+1}+\dots+B^{i_2-1})(1+\dots+B^{m+i_2-1}+B^{m+i_2}+\dots+B^{m+i_3-1})- \\
& -(B^{i_2}+B^{i_2+1}+\dots+B^{i_3-1})(1+B+\dots+B^{m+i_1-1})= \\
& = (B^{i_1}+\dots+B^{i_2-1})(1+\dots+B^{m+i_2-1})+(B^{i_2}+\dots+B^{i_3-1})(1+\dots+B^{m+i_2-1})- \\
& -(B^{i_1}+\dots+B^{i_2-1})(1+\dots+B^{m+i_2-1})- \\
& -(B^{i_1}+\dots+B^{i_2-1})(B^{m+i_2}+\dots+B^{m+i_3-1})- \\
& -(B^{i_2}+\dots+B^{i_3-1})(1+\dots+B^{m+i_1-1})= \\
& = (B^{i_2}+\dots+B^{i_3-1})(1+\dots+B^{m+i_2-1})- \\
& -(B^{m+i_1}+\dots+B^{m+i_2-1})(B^{i_2}+\dots+B^{i_3-1})- \\
& -(B^{i_2}+\dots+B^{i_3-1})(1+\dots+B^{m+i_1-1})= \\
& = (B^{i_2}+\dots+B^{i_3-1})(1+\dots+B^{m+i_2-1}- \\
& -1-\dots-B^{m+i_1-1}-B^{m+i_1}-\dots-B^{m+i_2-1})=0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B^{i_1}(B^{i_3-i_1}-1)(1+B+\dots+B^{m+i_2-1})- \\
& -B^{i_1}(B^{i_2-i_1}-1)(1+B+\dots+B^{m+i_3-1})- \\
& -B^{i_2}(B^{i_3-i_2}-1)(1+B+\dots+B^{m+i_1-1})= \\
& = (B^{i_3}-B^{i_1})(1+B+\dots+B^{m+i_2-1})-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(B^{i_2} - B^{i_1})(1 + B + \dots + B^{m+i_3-1}) - \\
& -(B^{i_3} - B^{i_2})(1 + B + \dots + B^{m+i_1-1}) = \\
& = B^{i_3} + B^{i_3+1} + \dots + B^{m+i_2+i_3-1} - B^{i_1} - B^{i_1+1} - \dots - B^{m+i_1+i_2-1} - \\
& - B^{i_2} - B^{i_2+1} - \dots - B^{m+i_2+i_3-1} + B^{i_1} + B^{i_1+1} + \dots + B^{m+i_1+i_3-1} - \\
& - B^{i_3} - B^{i_3+1} - \dots - B^{m+i_1+i_3-1} + B^{i_2} + B^{i_2+1} + \dots + B^{m+i_1+i_2-1} = \\
& = B^{m+i_1+i_3} + \dots + B^{m+i_2+i_3-1} + B^{m+i_1+i_2} + \dots + B^{m+i_1+i_3-1} - \\
& - B^{m+i_1+i_2} - \dots - B^{m+i_2+i_3-1} = \\
& = B^{m+i_1+i_3} + \dots + B^{m+i_2+i_3-1} - B^{m+i_1+i_3} - \dots - B^{m+i_2+i_3-1} = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, $a^n P(i_1, i_2, i_3; m) g_1 \cdots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n} = 0$.

Предложение доказано. $\square$

Обратимся теперь к выполняющимся в алгебре R соотношениям, в записи которых наверняка встречается хотя бы один из порождающих c_i , $i = \overline{1, s-2}$.

С этой целью, приведем доказанные в работе [9] предложения.

Предложение 1. [9]. Если $\beta_1 \neq 0$, то в алгебре R для любого $i \in \{1, \dots, s-2\}$ выполняются соотношения

$$g_1 g_2 \cdots g_N c_i = 0;$$

$$c_i g_1 g_2 \cdots g_{N-1} \equiv g_1 c_i g_2 \cdots g_{N-1} \equiv \cdots \equiv g_1 g_2 \cdots g_{N-1} c_i \equiv 0 \pmod{R^{k+1}};$$

$$c_i g_1 g_2 \cdots g_{N+1} = g_1 c_i g_2 \cdots g_{N+1} = \cdots = g_1 g_2 \cdots g_{N+1} c_i = 0,$$

где $g_p \in \{a, b, c_m\}$ – порождающие, $m = \overline{1, s-2}$.

Предложение 2. [9]. Если $\beta_1 = 0$, то в алгебре R на порождающих $g_i \in \{a, b, c_i\}$, $i = \overline{1, s-2}$, выполняются следующие соотношения:

$$g_1 \cdots g_r (g_{r+1} \cdots g_{N+p} - g_{\sigma(r+1)} \cdots g_{\sigma(N+p)}) = 0, \quad p \geq 2,$$

для любых $r \in \{1, \dots, N+p-2\}$, для любых $\sigma \in S_{N+p-r}$, при условии, что среди порождающих $g_1, \dots, g_r \in \{a, b, c_i\}$ встречается по крайней мере один порождающий, отличный от a .

Следствие. Если $\beta_1 = 0$, то в алгебре R на порождающих $g_i \in \{a, b, c_i\}$, $i = \overline{1, s-2}$, выполняются следующие соотношения:

$$\left[g_1 \cdots g_{r_1}, g_{r_1+1} \cdots g_{r_2} \right] \left[g_{r_2+1} \cdots g_{r_3}, g_{r_3+1} \cdots g_{r_4} \right] g_{r_4+1} \cdots g_{N+p} = 0,$$

где $p \geq 2$, $0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 \leq N+p$.

Заметим, что доказательство последних двух предложений не зависело от характеристики основного поля F .

4. СТАНДАРТНОЕ ТОЖДЕСТВО В АЛГЕБРЕ R

Предложим теперь обобщение основного результата работы [9].

Следующая теорема предоставляет алгоритм нахождения степени минимального тождества s -порожденной нильпотентной алгебры над произвольным полем с условием $\dim R^N / R^{N+1} = 2$ (для некоторого $N \geq 3$) для бесконечного множества значений N определенного вида.

Теорема. Пусть R – произвольная s -порожденная ($s \geq 2$) нильпотентная алгебра над полем с условием $\dim R^N / R^{N+1} = 2$ для некоторого $N \geq 3$. Тогда

1) если $s < N + 2$, то R удовлетворяет стандартному тождеству $S_T(x_1, x_2, \dots, x_T) = 0$, где $T = \left\lceil \frac{(N+2)(s-1)^2 + s^{m+1} - m(s-1)s - s}{m(s-1)^2} \right\rceil$ и параметр m вычисляется по формулам:

$$m = \begin{cases} \left\lceil \log_s \frac{\frac{(N+2)(s-1)^2 - s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2 - s}{s \cdot (s-1)}} \right\rceil, & \text{если } N < N^*; \\ \left\lceil \log_s \frac{s \cdot \frac{(N+2)(s-1)^2 - s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2 - s}{s \cdot (s-1)}} \right\rceil, & \text{если } N \geq N^*, \end{cases}$$

$$N^* = \frac{\left(\left\lceil \log_s \frac{s \cdot \frac{(N+2)(s-1)^2 - s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2 - s}{s \cdot (s-1)}} \right\rceil (s-1) - s \right) \cdot s \left\lceil \log_s \frac{s \cdot \frac{(N+2)(s-1)^2 - s}{s-1}}{\log_s \frac{(N+2)(s-1)^2 - s}{s \cdot (s-1)}} \right\rceil + s}{(s-1)^2} - 2;$$

2) при любых значениях s алгебра R удовлетворяет стандартному тождеству $S_{N+2}(x_1, x_2, \dots, x_{N+2}) = 0$.

Доказательство. В случае, когда характеристика поля не равна двум, утверждение теоремы следует из основного результата работы [9].

Будет предполагать далее, что характеристика поля равна двум.

Но, не ограничивая общности, будем далее в тексте использовать как "+", так и "-", поскольку это удобно для восприятия хорошо известных формул и соотношений из ранее доказанных утверждений.

Нам понадобятся для доказательства теоремы некоторые свойства стандартного полинома. Согласно [10] имеет место следующее равенство:

$$(9) \quad S_T(x_1, x_2, \dots, x_T) = \sum_{1 \leq i < j \leq T} (-1)^{i+j-1} [x_i, x_j] S_{T-2}(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_T),$$

где запись $\widehat{x}_i$ означает отсутствие элемента x_i в совокупности $x_1, \dots, x_T$.

Также согласно [10] имеет место следующее его обобщение:

$$S_T(X) = \sum_{Y \subseteq X} (-1)^{\tau} S_m(Y) S_{T-m}(X \setminus Y),$$

где τ означает подстановку $(Y, X \setminus Y)$, Y — подмножество в $X = \{x_1, x_2, \dots, x_T\}$.

В нашем случае, в частности, с учетом того, что характеристика поля равна двум, справедлива формула

$$(10) \quad S_T(X) = \sum_{Y \subseteq X} S_4(Y) S_{T-4}(X \setminus Y).$$

Заметим также, что при $T = 4$ из равенства (9) следует следующее равенство:

$$(11) \quad S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] + [x_2, x_3] \circ [x_1, x_4] + [x_1, x_3] \circ [x_4, x_2],$$

где $x \circ y = xy + yx$.

Из определения стандартного полинома следует, что он линеен по всем своим переменным и обращается в нуль, если какие-либо два аргумента равны. Поэтому можно считать, что переменные стандартного полинома пробегают набор линейно-независимых элементов алгебры R .

Предположим сначала, что $s < N + 2$.

Рассмотрим в алгебре R элемент

$$S = S_T(x_1, x_2, \dots, x_T) = \sum_{\sigma \in S_T} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(T)}$$

для некоторых $x_1, x_2, \dots, x_T \in R$, где T – как в формулировке теоремы.

В работе [9] была доказана следующая лемма:

Лемма 6. [9]. Если $s < N + 2$, то для любых $x_1, x_2, \dots, x_T \in R$ выполняется сравнение

$$S = S_T(x_1, x_2, \dots, x_T) \equiv 0 \pmod{R^{N+2}}.$$

Поскольку доказательство леммы не зависело от характеристики поля, то утверждение леммы справедливо и в нашем случае.

Заметим, что если $\dim R^N/R^{N+1} = 2$, $\dim R^{N+1}/R^{N+2} = 1$, то алгебра R либо нильпотентна индекса $(N + 2)$, либо по предложению 1 [6] удовлетворяет перестановочным тождествам $p_{N+2}^\sigma(x_1, \dots, x_{N+2}) = 0$ для всех $\sigma \in S_{N+2}$, и, поэтому, с учетом леммы 6 [9] алгебра R удовлетворяет и стандартному тождеству $S_T(x_1, x_2, \dots, x_T) = 0$.

Поэтому далее считаем, что $\dim R^N/R^{N+1} = \dim R^{N+1}/R^{N+2} = 2$.

Предположим, что в записи элемента $S = S_T(x_1, x_2, \dots, x_T)$ встречается хотя бы один из порождающих c_i , $i = \overline{1, s-2}$.

Тогда по приведенной выше лемме 6 [9] все мономы элемента $S = S_T(x_1, x_2, \dots, x_T)$ имеют длину от порождающих a, b, c_i , не меньшую, чем $N + 2$. Следовательно, по приведенным выше предложению 1 [9] и следствию из предложения 2 [9], получим с учетом равенства (9), что $S = S_T(x_1, x_2, \dots, x_T) = 0$.

Предположим теперь, что в записи элемента S не встречается ни одного из порождающих c_i , $i = \overline{1, s}$, то есть, в записи элемента S встречаются только порождающие a и b .

Если в записи S кроме a встречается только один порождающий b , то, так как $T \geq 4$, из формулы (11) получим, что

$$S_4(a^{s_1}, a^{s_2}, a^{s_3}, a^{s_4}ba^{s_4}) = [a^{s_1}, a^{s_2}] \circ [a^{s_3}, a^{s_4}ba^{s_4}] + [a^{s_2}, a^{s_3}] \circ [a^{s_1}, a^{s_4}ba^{s_4}] + [a^{s_1}, a^{s_3}] \circ [a^{s_4}ba^{s_4}, a^{s_2}] = 0,$$

и, поэтому, с учетом (9) получим, что $S = S_T(x_1, x_2, \dots, x_T) = 0$.

Пусть далее в записи S среди порождающих a, b встречается не менее двух порождающих b .

Рассмотрим сначала случаи, когда коэффициент поля β_1 из равенства (4) не равен 1.

Тогда, по предложению 4 [8] и следствию из него, когда $\beta_1 = 0$, доказательство которых не зависело от характеристики основного поля F , в алгебре R выполняется соотношение:

$$\left[g_1 \cdots g_{r_1}, g_{r_1+1} \cdots g_{r_2} \right] \left[g_{r_2+1} \cdots g_{r_3}, g_{r_3+1} \cdots g_{r_4} \right] g_{r_4+1} \cdots g_{N+p} = 0,$$

где $p \geq 2$, $0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 \leq N + p$.

Также, по предложению 7 [8], когда $\beta_1 \neq 0; \pm 1$, доказательство которого тоже не зависело от характеристики основного поля F , в алгебре R выполняется соотношение: $g_1 g_2 \cdots g_{N+p} = 0$, $p \geq 2$, при условии, что среди порождающих $g_i \in \{a, b\}$ встречается не менее двух порождающих b .

Следовательно, когда $\beta_1 = 0$ или $\beta_1 \neq 0; \pm 1$, по лемме 6 [4] получим, что $S = S_T(x_1, x_2, \dots, x_T) = 0$.

Обратимся теперь к случаю, когда коэффициент поля β_1 из равенства (4) равен 1.

Тогда, по лемме 1 в алгебре R либо выполнены либо соотношения: $a^{N-2}ba = a^{N-1}b$ и $a^{k+1}b = 0$, либо соотношения: $a^{N-2}ba = a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b$ и $a^{k+1}b = 0$.

В первом случае, по лемме 2 с учетом леммы 6 [9] получим, что $S = S_T(x_1, x_2, \dots, x_T) = 0$.

Во втором случае, когда в алгебре R выполняются соотношения $a^{N-2}ba = a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b$ и $a^{k+1}b = 0$, рассмотрим более подробно равенство (10):

$$\begin{aligned} S &= S_T(X) = \sum_{Y \subseteq X} S_4(Y) S_{T-4}(X \setminus Y) = \\ &= \sum_{\tau \in S_T} S_4(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}) \cdot S_{T-4}(x_{\tau(5)}, x_{\tau(6)}, \dots, x_{\tau(T)}), \end{aligned}$$

где каждый элемент $x_{\tau(j)}$, $j = \overline{1, T}$, имеет следующий вид $a^{i_1} b a^{i_2} b \cdots b a^{i_{m-1}} b a^{i_m}$, при этом, $i_p \geq 0$, $p = \overline{1, m}$, $m \geq 1$ (когда $m = 1$, $x_{\tau(j)} = a^{i_1}$).

Если длина слова $x_{\tau(j)}$, равная $L_j = i_1 + i_2 + \dots + i_{m-1} + i_m + 2 \geq N$, то $x_{\tau(j)} = A'_{\tau(j)} a^N + B'_{\tau(j)} a^{N-1}b$ для некоторых $A'_{\tau(j)}, B'_{\tau(j)} \in \langle a \rangle^1$.

Если $L_j = i_1 + i_2 + \dots + i_{m-1} + i_m + 2 < N$, то имеет место равенство $a^{N-L_j} x_{\tau(j)} = A_{\tau(j)} a^N + B_{\tau(j)} a^{N-1}b$ для некоторых $A_{\tau(j)}, B_{\tau(j)} \in \langle a \rangle^1$, то есть $a^{N-L_j} (x_{\tau(j)} - A_{\tau(j)} a^{L_j} - B_{\tau(j)} a^{L_j-1}b) = 0$.

По лемме 6 получим, что

$$\begin{aligned} &(x_{\tau(j)} - A_{\tau(j)} a^{L_j} - B_{\tau(j)} a^{L_j-1}b) g_1 g_2 \cdots g_{N-L_j+2} = \\ &= g_1 (x_{\tau(j)} - A_{\tau(j)} a^{L_j} - B_{\tau(j)} a^{L_j-1}b) g_2 \cdots g_{N-L_j+2} = \\ &= \dots = \\ &= g_1 g_2 \cdots g_{N-L_j+2} (x_{\tau(j)} - A_{\tau(j)} a^{L_j} - B_{\tau(j)} a^{L_j-1}b) = 0, \end{aligned}$$

для некоторых порождающих $g_p \in \{a, b\}$.

Таким образом, в любом случае, справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\tau \in S_T} S_4(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}) \cdot S_{T-4}(x_{\tau(5)}, x_{\tau(6)}, \dots, x_{\tau(T)}) = \\ &= \sum_{\tau \in S_T} S_4(A_{\tau(1)} a^{L_1} + B_{\tau(1)} a^{L_1-1}b, A_{\tau(2)} a^{L_2} + B_{\tau(2)} a^{L_2-1}b, A_{\tau(3)} a^{L_3} + \\ &\quad + B_{\tau(3)} a^{L_3-1}b, A_{\tau(4)} a^{L_4} + B_{\tau(4)} a^{L_4-1}b) \cdot S_{T-4}(x_{\tau(5)}, x_{\tau(6)}, \dots, x_{\tau(T)}). \end{aligned}$$

Учитывая представление элементов $A_{\tau(j)}, B_{\tau(j)} \in \langle a \rangle^1$ в виде $\sum_{p=1}^{k+t-N+1} \alpha_{\tau(j)p} a^{p-1}$

и $\sum_{p=1}^{k-N+2} \beta_{\tau(j)p} a^{p-1}$, $\alpha_{\tau(j)p}, \beta_{\tau(j)p} \in F$, получим, что

$$S = \sum_{\tau \in S_T} S_4 \left(\sum_{p_1=1}^{k+t-N+1} \alpha_{\tau(1)p_1} a^{p_1-1} a^{L_1} + \sum_{p_2=1}^{k-N+2} \beta_{\tau(1)p_2} a^{p_2-1} a^{L_1-1} b, \right. \\ \sum_{p_3=1}^{k+t-N+1} \alpha_{\tau(2)p_3} a^{p_3-1} a^{L_2} + \sum_{p_4=1}^{k-N+2} \beta_{\tau(2)p_4} a^{p_4-1} a^{L_2-1} b, \\ \sum_{p_5=1}^{k+t-N+1} \alpha_{\tau(3)p_5} a^{p_5-1} a^{L_3} + \sum_{p_6=1}^{k-N+2} \beta_{\tau(3)p_6} a^{p_6-1} a^{L_3-1} b, \\ \left. \sum_{p_7=1}^{k+t-N+1} \alpha_{\tau(4)p_7} a^{p_7-1} a^{L_4} + \sum_{p_8=1}^{k-N+2} \beta_{\tau(4)p_8} a^{p_8-1} a^{L_4-1} b \right) \cdot \\ S_{T-4}(x_{\tau(5)}, x_{\tau(6)}, \dots, x_{\tau(T)}).$$

Откуда, используя свойство полилинейности стандартного полинома, очевидно следует, что предыдущее равенство имеет следующий вид:

$$S = \sum_{\tau \in S_T} \sum_{i, m_i, \varepsilon_i} \rho_{m_i} S_4(a^{m_1} b^{\varepsilon_1}, a^{m_2} b^{\varepsilon_2}, a^{m_3} b^{\varepsilon_3}, a^{m_4} b^{\varepsilon_4}) \cdot S_{T-4}(x_{\tau(5)}, x_{\tau(6)}, \dots, x_{\tau(T)})$$

для некоторых $m_i \geq 0$ ($i = \overline{1, 4}$), $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $\rho_{m_i} \in F$.

Поскольку по предложению 1 в алгебре R выполняются следующие соотношения:

$$a^n P(i_1, i_2, i_3; m) g_1 \cdots g_{M-i_1-i_2-i_3-m-n} = 0,$$

где $P(i_1, i_2, i_3; m) = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma a^{\sigma(i_1)} (ba^m) a^{\sigma(i_2)} ba^{\sigma(i_3)} = 0$, i_1, i_2, i_3 , такие что $0 \leq i_1 < i_2 < i_3$, $m \geq 0$, $n \geq 0$, $i_1 + i_2 + i_3 + m + n \leq M$, $M \geq N$, g_p — произвольные порождающие из $\{a, b, c_i\}$, $i = \overline{1, s-2}$, $p = \overline{1, M-i_1-i_2-i_3-m-n}$, то для окончания доказательства теоремы нам достаточно показать с учетом леммы 6 [4], что элемент $S_1 = S_4(a^{m_1} b^{\varepsilon_1}, a^{m_2} b^{\varepsilon_2}, a^{m_3} b^{\varepsilon_3}, a^{m_4} b^{\varepsilon_4})$ можно представить в виде суммы слагаемых, каждое из которых имеет вид $a^n P(i_1, i_2, i_3; m) g_1 \cdots g_r$ для некоторых $i_1, i_2, i_3, m, n, g_p, r$.

Рассмотрим различные варианты.

1) $S_1 = S_4(a^{i_1}, a^{i_2} b, a^{i_3}, a^{i_4} b)$, где $1 \leq i_1 < i_3$, $0 \leq i_2 < i_4$.

В этом случае

$$S_1 = S_4(a^{i_1}, a^{i_2} b, a^{i_3}, a^{i_4} b) = [a^{i_1}, a^{i_2} b] \circ [a^{i_3}, a^{i_4} b] + [a^{i_2} b, a^{i_3}] \circ [a^{i_1}, a^{i_4} b] + \\ + [a^{i_1}, a^{i_3}] \circ [a^{i_4} b, a^{i_2} b] = [a^{i_1}, a^{i_2} b] \circ [a^{i_3}, a^{i_4} b] + [a^{i_2} b, a^{i_3}] \circ [a^{i_1}, a^{i_4} b] = \\ = a^{i_1} a^{i_2} b a^{i_3} a^{i_4} b - a^{i_1} a^{i_2} b a^{i_4} b a^{i_3} - a^{i_2} b a^{i_1} a^{i_3} a^{i_4} b + a^{i_2} b a^{i_1} a^{i_4} b a^{i_3} + \\ + a^{i_3} a^{i_4} b a^{i_1} a^{i_2} b - a^{i_3} a^{i_4} b a^{i_2} b a^{i_1} - a^{i_4} b a^{i_3} a^{i_1} a^{i_2} b + a^{i_4} b a^{i_3} a^{i_2} b a^{i_1} + \\ + a^{i_2} b a^{i_3} a^{i_1} a^{i_4} b - a^{i_2} b a^{i_3} a^{i_4} b a^{i_1} - a^{i_3} a^{i_2} b a^{i_1} a^{i_4} b + a^{i_3} a^{i_2} b a^{i_4} b a^{i_1} + \\ + a^{i_1} a^{i_4} b a^{i_2} b a^{i_3} - a^{i_1} a^{i_4} b a^{i_3} a^{i_2} b - a^{i_4} b a^{i_1} a^{i_2} b a^{i_3} + a^{i_4} b a^{i_1} a^{i_3} a^{i_2} b.$$

После очевидных сокращений

$$S_1 = a^{i_1} a^{i_2} b a^{i_3} a^{i_4} b - a^{i_1} a^{i_2} b a^{i_4} b a^{i_3} + a^{i_2} b a^{i_1} a^{i_4} b a^{i_3} + a^{i_3} a^{i_4} b a^{i_1} a^{i_2} b - \\ - a^{i_3} a^{i_4} b a^{i_2} b a^{i_1} + a^{i_4} b a^{i_3} a^{i_2} b a^{i_1} - a^{i_2} b a^{i_3} a^{i_4} b a^{i_1} - a^{i_3} a^{i_2} b a^{i_1} a^{i_4} b + \\ + a^{i_3} a^{i_2} b a^{i_4} b a^{i_1} + a^{i_1} a^{i_4} b a^{i_2} b a^{i_3} - a^{i_1} a^{i_4} b a^{i_3} a^{i_2} b - a^{i_4} b a^{i_1} a^{i_2} b a^{i_3} = \\ = a^{i_2} \left(a^{i_1} b a^{i_3} a^{i_4} b - a^{i_1} b a^{i_4} b a^{i_3} + b a^{i_1} a^{i_4} b a^{i_3} - b a^{i_3} a^{i_4} b a^{i_1} - a^{i_3} b a^{i_1} a^{i_4} b + a^{i_3} b a^{i_4} b a^{i_1} \right) + \\ + a^{i_4} \left(a^{i_3} b a^{i_1} a^{i_2} b - a^{i_3} b a^{i_2} b a^{i_1} + b a^{i_3} a^{i_2} b a^{i_1} + a^{i_1} b a^{i_2} b a^{i_3} - a^{i_1} b a^{i_3} a^{i_2} b - b a^{i_1} a^{i_2} b a^{i_3} \right) = \\ = a^{i_2} \left(a^{i_1} (b a^{i_4}) a^{i_3} b a^0 - a^{i_1} (b a^{i_4}) a^0 b a^{i_3} + a^0 (b a^{i_4}) a^{i_1} b a^{i_3} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -a^0(ba^{i_4})a^{i_3}ba^{i_1} - a^{i_3}(ba^{i_4})a^{i_1}ba^0 + a^{i_3}(ba^{i_4})a^0ba^{i_1}) - \\
& -a^{i_4}\left(a^{i_3}(ba^{i_2})a^{i_1}ba^0 - a^{i_3}(ba^{i_2})a^0ba^{i_1} + a^0(ba^{i_2})a^{i_3}ba^{i_1} + \right. \\
& \left. + a^{i_1}(ba^{i_2})a^0ba^{i_3} - a^{i_1}(ba^{i_2})a^{i_3}ba^0 - a^0(ba^{i_2})a^{i_1}ba^{i_3}\right) = \\
& = a^{i_2}P(0, i_1, i_3; i_4) - a^{i_4}P(0, i_1, i_3; i_2).
\end{aligned}$$

2) $S_1 = S_4(a^{i_1}, a^{i_2}b, a^{i_3}b, a^{i_4}b)$, где $i_1 \geq 1$, $0 \leq i_2 < i_3 < i_4$.

В этом случае

$$\begin{aligned}
S_1 &= a^{i_1}a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4}b - a^{i_1}a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2}b + a^{i_1}a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}b - \\
& - a^{i_1}a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4}b + a^{i_1}a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2}b - a^{i_1}a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}b + \\
& + a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_1}a^{i_2}b - a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1}a^{i_3}b + a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_1}a^{i_4}b - \\
& - a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_1}a^{i_2}b + a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1}a^{i_3}b - a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_1}a^{i_4}b + \\
& + a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_1} - a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_1} + a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1} - \\
& - a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_1} + a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_1} - a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1} + \\
& + a^{i_4}ba^{i_1}a^{i_3}ba^{i_2}b - a^{i_2}ba^{i_1}a^{i_3}ba^{i_4}b + a^{i_2}ba^{i_1}a^{i_4}ba^{i_3}b - \\
& - a^{i_3}ba^{i_1}a^{i_4}ba^{i_2}b + a^{i_3}ba^{i_1}a^{i_2}ba^{i_4}b - a^{i_4}ba^{i_1}a^{i_2}ba^{i_3}b = \\
& = a^{i_1}\left(a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4} - a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2} + a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3} - \right. \\
& \left. - a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4} + a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2} - a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}\right)b + \\
& + \left(a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2}b - a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}b + a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4}b - \right. \\
& \left. - a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2}b + a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}b - a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4}\right)a^{i_1}b - \\
& - \left(a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4} - a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2} + a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3} - \right. \\
& \left. - a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4} + a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2} - a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}\right)ba^{i_1} - \\
& - \left(a^{i_2}(ba^{i_1})a^{i_3}ba^{i_4} - a^{i_4}(ba^{i_1})a^{i_3}ba^{i_2} + a^{i_3}(ba^{i_1})a^{i_4}ba^{i_2} - \right. \\
& \left. - a^{i_2}(ba^{i_1})a^{i_4}ba^{i_3} + a^{i_4}(ba^{i_1})a^{i_2}ba^{i_3} - a^{i_3}(ba^{i_1})a^{i_2}ba^{i_4}\right)b = \\
& = a^{i_1}P(i_2, i_3, i_4; 0)b + P(i_2, i_3, i_4; 0)a^{i_1}b - P(i_2, i_3, i_4; 0)ba^{i_1} - P(i_2, i_3, i_4; i_1)b.
\end{aligned}$$

3) $S_1 = S_4(a^{i_1}b, a^{i_2}b, a^{i_3}b, a^{i_4}b)$, где $0 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4$.

В этом случае

$$\begin{aligned}
S_1 &= a^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4}b - a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_1}ba^{i_4}b + a^{i_3}ba^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_4}b - \\
& - a^{i_2}ba^{i_1}ba^{i_3}ba^{i_4}b + a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_1}ba^{i_4}b - a^{i_1}ba^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4}b + \\
& + a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1}ba^{i_3}b - a^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}b + a^{i_2}ba^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_3}b - \\
& - a^{i_4}ba^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_3}b + a^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}b - a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1}ba^{i_3}b + \\
& + a^{i_1}ba^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2}b - a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_1}ba^{i_2}b + a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_1}ba^{i_2}b - \\
& - a^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2}b + a^{i_4}ba^{i_1}ba^{i_3}ba^{i_2}b - a^{i_3}ba^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_2}b + \\
& + a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_1}b - a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_1}b + a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1}b - \\
& - a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_1}b + a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_1}b - a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1}b = \\
& = \left(a^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_3} - a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_1} + a^{i_3}ba^{i_1}ba^{i_2} - \right. \\
& \left. - a^{i_2}ba^{i_1}ba^{i_3} + a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_1} - a^{i_1}ba^{i_3}ba^{i_2}\right)ba^{i_4}b - \\
& - \left(a^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_4} - a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_1} + a^{i_4}ba^{i_1}ba^{i_2} - \right. \\
& \left. - a^{i_2}ba^{i_1}ba^{i_4} + a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_1} - a^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_2}\right)ba^{i_3}b + \\
& + \left(a^{i_1}ba^{i_3}ba^{i_4} - a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_1} + a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_1} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a^{i_1}ba^{i_4}ba^{i_3} + a^{i_4}ba^{i_1}ba^{i_3} - a^{i_3}ba^{i_1}ba^{i_4})ba^{i_2}b - \\
& -\left(a^{i_2}ba^{i_3}ba^{i_4} - a^{i_4}ba^{i_3}ba^{i_2} + a^{i_4}ba^{i_2}ba^{i_3} - \right. \\
& \left. -a^{i_3}ba^{i_2}ba^{i_4} + a^{i_3}ba^{i_4}ba^{i_2} - a^{i_2}ba^{i_4}ba^{i_3}\right)ba^{i_1}b = \\
& = P(i_1, i_2, i_3; 0)ba^{i_4}b - P(i_1, i_2, i_4; 0)ba^{i_3}b + P(i_1, i_3, i_4; 0)ba^{i_2}b - \\
& - P(i_2, i_3, i_4; 0)ba^{i_1}b.
\end{aligned}$$

Доказательство второго утверждения теоремы проводится аналогично, то есть повторяет рассуждения, использованные при доказательстве первого утверждения, поскольку $S = S_{N+2}(x_1, x_2, \dots, x_{N+2}) \equiv 0 \pmod{R^{N+2}}$.

Теорема доказана. $\square$

Замечание. Если $m \geq 3$, то для $N = \frac{(ms - m - s) \cdot s^m + s}{(s - 1)^2} - 2 + mr$, где $1 \leq r < s^m$, найдется такая s -порожденная нильпотентная алгебра R над произвольным полем с условием $\dim R^N / R^{N+1} = 2$, которая не удовлетворяет никакому полилинейному тождеству степени $(T - 1)$.

Доказательство замечания проводится аналогично соответствующему замечанию в работе [9].

REFERENCES

- [1] *The Dniester Notebook (Unsolved problems in the theory of rings and modules)*, V.A. Andrunakievich (ed.), Third edition, Akad. Nauk SSSR, Sib. Otd., Inst. Mat., Novosibirsk, 1982.
- [2] S.A. Pikhtil'kov, *On varieties generated by n -dimensional algebras*, Tula Polytechnic Inst., Tula, (1980), Manuscript deposited at VINITI, 1213-80 Dep.
- [3] Yu.N. Mal'tsev, *On identities of nilpotent algebras*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., **9** (1986), 68–72. MR882655
- [4] I.L. Guseva, *On identities of finite-dimensional nilpotent algebras*, in: Internat. Conf. on Algebra, dedicated in the memory A.I. Mal'tsev, August 1989, Novosibirsk, p. 43.
- [5] Kruse, R.L., Price, D.T., *Nilpotent rings*, New York: Gordon and Breach, 1969. Zbl 0198.36102
- [6] E.P. Petrov, *On identities of finite-dimensional nilpotent algebras*, Algebra i Logika, **30**:5 (1991), 540–556. MR1202508
- [7] E.P. Petrov, *Defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition $\dim R^2 / R^3 = 2$* , Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 1052–1066. MR3580049
- [8] E.P. Petrov, *Structure, defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition $\dim R^N / R^{N+1} = 2$* , Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 1153–1187. MR3744051
- [9] E.P. Petrov, *Defining relations and identities of finite-generated nilpotent algebra R with condition $\dim R^N / R^{N+1} = 2$* , Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 1048–1064. MR3873769
- [10] L. H. Rowen, *Polynomial identities in ring theory*, New York: Academic Press, 1980. MR576061

EVGENIY PETROVICH PETROV
 ALTAI STATE UNIVERSITY,
 61, LENINA AVE.,
 BARNUL, 656049, RUSSIA
E-mail address: pep@email.asu.ru