M. V. Mulyukov, Stability of three-parameter systems of two linear differential equations with delay. Part I, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 2019–2054

DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.145>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.89.197.203

April 26, 2023, 14:10:23

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 2019–2054 (2019)

УДК 517.929

DOI 10.33048/semi.2019.16.145

MSC 34K06, 34K20

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДВУХ
ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ. ЧАСТЬ I

М.В. МУЛЮКОВ

ABSTRACT. The system of two linear autonomous differential equations with a limited delay and a term without delay is considered. Complete classification of all three-parameter systems is obtained. For every such system the stability criterion in analytic and geometric form is obtained.

Keywords: system of differential equations with delay, autonomous equations, asymptotic stability, stability domain, D-subdivision method.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему функционально-дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) + Ax(t) + Bx(t-h) = f(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ x(t) = \psi(t), & t \in [-h, 0], \end{cases}$$

в следующих обозначениях:

- A, B — вещественные 2×2 -матрицы,
- $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$,
- $h > 0$,

и предположениях:

- начальная вектор-функция ψ суммируема на $[-h, 0]$,
- f — локально суммируемая вектор-функция.

MULYUKOV, M.V., STABILITY OF THREE-PARAMETER SYSTEMS OF TWO LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY. PART I.

© 2019 Мүлюков М.В.

Работа выполнена в рамках базовой части госзадания Минобрнауки РФ (проект 1.5336.2017/8.9) при поддержке РФФИ (проект 18-01-00928).

Поступила 12 июля 2019 г., опубликована 26 декабря 2019 г.

Система (1) возникает при рассмотрении линейного приближения моделей популяционной динамики, дыхания, стабилизации курса судна, ядерного ректора и других моделей [5, 8, 13, 14, 16, 35–37].

Следуя подходу, разработанному в научной школе Н. В. Азбелева, перенесем начальную функцию в правую часть, тогда система (1) примет вид

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) + Ax(t) + Bx(t-h) = \hat{f}(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ x(t) = 0, & t \in [-h, 0), \end{cases}$$

$$\text{где } \hat{f}(t) = \begin{cases} f(t) + B\psi(t-h), & \text{если } t \leq h, \\ f(t), & \text{если } t > h. \end{cases}$$

Определение 1 ([1, с. 9-10], [2, с. 23]). *Решением системы (2) называется локально абсолютно непрерывная вектор-функция $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$, удовлетворяющая системе (2) при почти всех $t \in \mathbb{R}_+$.*

Определенная таким образом вектор-функция x , будучи доопределенной функцией ψ на $[-h, 0]$, удовлетворяет системе (1) при почти всех $t \in [-h, +\infty]$. Следовательно, определение 1 не противоречит более традиционному пониманию решения как непрерывного продолжения начальной вектор-функции ψ [9, 10, 14, 29]. Более того, определение 1 не требует непрерывной стыковки решения с начальной вектор-функцией в нуле.

Определение 2 ([1, с. 34], [3]). Функция $X : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$, удовлетворяющая матричному уравнению

$$\dot{X}(t) + AX(t) + BX(t-h) = \Theta$$

при почти всех $t \in \mathbb{R}_+$ и условиям $X(0) = I$, $X(\xi) = \Theta$ при $\xi < 0$, называется *фундаментальной матрицей*.

Известно [1, с. 84], [2, с. 23], [3], что в рассмотренных предположениях решение задачи Коши для системы (1), дополненной начальными условиями $x(0) \in \mathbb{R}^n$, существует, единственно и представимо в виде

$$(3) \quad x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t X(t-s)\hat{f}(s)ds.$$

Из формулы (3) вытекает, что асимптотические свойства любого решения системы (1) определяются свойствами фундаментальной матрицы.

Определение 3. Систему (1) будем называть

- *асимптотически устойчивой*, если $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = 0$,
- *экспоненциально устойчивой*, если $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \|X(t)\|/t < 0$.

Определение 4. Назовем функцию

$$(4) \quad \Phi(z) = \det(Iz + A + Be^{-hz})$$

характеристической функцией системы (1), а уравнение

$$F(z) = 0$$

где $F(z, \mathbf{p}) = e^{w(z)}\Phi(z, \mathbf{p})$ и w — произвольная целая функция с вещественными коэффициентами ряда Маклорена, *характеристическим уравнением* системы (1).

Определение 5. Назовем целую функцию комплексного аргумента *устойчивой*, если все ее корни лежат слева от мнимой оси.

Известно [6, с. 209], [38], что следующие утверждения эквивалентны:

- система (1) асимптотически устойчива,
- система (1) экспоненциально устойчива,
- характеристической функции (4) устойчива.

О системах вида (1) в случае, когда A и B — матрицы произвольного размера, Дж. Хейл высказал предположение, что „точная область асимптотической устойчивости этой системы как функция A, B и h неизвестна и, возможно, никогда не будет известна. Причину этого нетрудно понять, поскольку характеристическое уравнение очень сложно“ [10, с. 137]. Для рассматриваемого в данной работе случая 2×2 -матриц функция Φ является квазиполиномом

$$(5) \quad \Phi(z) = k_\alpha + k_\beta e^{-zh} + k_\gamma e^{-2zh} + k_\mu z + k_\nu z e^{-zh} + z^2,$$

где

$$\begin{aligned} k_\alpha &= \det A, \quad k_\gamma = \det B, \quad k_\mu = \operatorname{Sp} A, \quad k_\nu = \operatorname{Sp} B, \\ k_\beta &= \det(A + B) - (\det A + \det B) = \operatorname{Sp} A \operatorname{Sp} B - \operatorname{Sp} AB \end{aligned}$$

инвариантны относительно преобразования базиса.

Как видно, параметров не слишком много, чтобы считать безнадежной задачу построения области устойчивости, но и не так мало, чтобы задача построения области устойчивости легко решалась.

К исследованию функции (5) приводит также изучение устойчивости функционально-дифференциального уравнения второго порядка

$$(6) \quad \ddot{u}(t) + k_\mu \dot{u}(t) + k_\nu \dot{u}(t - h) + k_\alpha u(t) + k_\beta u(t - h) + k_\gamma u(t - 2h) = 0,$$

описывающее ньютоновский осциллятор с запаздывающей обратной связью.

Для решения задачи построения области устойчивости применяется метод D-разбиения, разработанный Ю. И. Неймарком [30–32].

Исследовать функцию (5) с помощью метода D-разбиений можно разными способами. Суть этого подхода, реализованного в работах [7, 15], заключается в том, чтобы разрешить уравнение (5) относительно e^{-zh} : если $k_\gamma = 0$, то

$$(7) \quad e^{-zh} = \frac{k_\alpha + k_\mu z + z^2}{k_\beta + k_\nu z},$$

в противном случае

$$(8) \quad e^{-zh} = -\frac{k_\beta + k_\nu z \pm \sqrt{(k_\beta + k_\nu z)^2 - 4k_\gamma(k_\alpha + k_\mu z + z^2)}}{2k_\gamma}.$$

Выразив h из выражений (7), (8), получим не более чем счетное множество значений $\{h_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Эти числа разбивают $\mathbb{R}_+$ на не более чем счетное множество интервалов, среди которых требуется тем или иным способом найти интервалы, соответствующие устойчивым характеристическим функциям. Если коэффициенты уравнения (5) зафиксированы, то определить „устойчивые“ интервалы нетрудно. Однако при изменении коэффициентов уравнения изменение структуры этих интервалов практически непредсказуемо. Кроме того, если коэффициенты уравнения (5) и величина h зависят от других параметров, то такой подход неприменим.

Эти трудности преодолены в другом подходе, который заключается в том, чтобы заменой переменных $zh \mapsto z$ привести функцию (5) к виду

$$(9) \quad \Phi(z) = \alpha + \beta e^{-z} + \gamma e^{-2z} + \mu z + \nu z e^{-z} + z^2,$$

где $\alpha = h^2 k_\alpha$, $\beta = h^2 k_\beta$, $\gamma = h^2 k_\gamma$, $\mu = h k_\mu$, $\nu = h k_\nu$, и считать, что коэффициенты функции (9) независимы и могут принимать любые вещественные значения.

Если область устойчивости функции (9) известна, то фиксированием коэффициентов функции (5) мы зададим кривую в пространстве коэффициентов функции (9), где h — параметр кривой. Проанализировав точки пересечения этой кривой с границами области устойчивости, можно найти „устойчивые“ интервалы.

Настоящая работа продолжает цикл работ автора статьи по исследованию устойчивости системы (1) [21–23, 25–27]. В работе [21] рассмотрен случай факторизации характеристического квазиполинома, то есть представления его в виде произведения двух квазиполиномов, которые являются характеристическими функциями для скалярных уравнений. Необходимым и достаточным условием факторизации характеристического квазиполинома служит равенство $\det(AB - BA) = 0$. Различные частные случаи системы (1), допускающие факторизацию характеристического квазиполинома, рассмотрены в работах [17–19].

Если $\det(AB - BA) \neq 0$, то задачу построения области устойчивости системы нельзя свести к известным результатам для скалярных уравнений первого порядка.

Домножим характеристическую функцию на e^z и запишем характеристическое уравнение в виде:

$$(10) \quad F(z) = \chi \operatorname{ch} z + \beta + \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z + \nu z + z^2 e^z,$$

где параметры

$$\begin{aligned} \chi &= h^2(\det A + \det B), \quad \zeta = h^2(\det A - \det B), \\ \beta &= h^2(\det(A + B) - \det A - \det B), \quad \mu = h \operatorname{Sp} A, \quad \nu = h \operatorname{Sp} B \end{aligned}$$

инвариантны относительно преобразования базиса.

Очевидно, функции Φ и F имеют один и тот же набор корней в комплексной плоскости. Вопрос о выборе параметризации задачи открыт, однако исследование квазиполинома F по сравнению с Φ имеет ряд технических преимуществ, поэтому в настоящей работе в качестве объекта исследования выбрана F .

Будем называть систему (1) *n-параметрической*, если $(5 - n)$ коэффициентов функции (10) равны нулю, а остальные могут принимать любые вещественные значения. Существуют

- 1) пять однопараметрических систем,
- 2) десять двухпараметрических систем,
- 3) десять трехпараметрических систем,
- 4) пять четырехпараметрических систем,
- 5) одна пятипараметрическая система.

Случай 1) относительно просто рассматривается.

Случай 2) рассмотрен в работе [22] — для всех десяти двухпараметрических систем построена область устойчивости в плоскости выбранных параметров и найдено ее аналитическое описание. В работе [23] тоже рассмотрены все десять систем, характеристический квазиполином которых содержит два параметра, но эти параметры являются параметрами квазиполинома (9), а не (10).

Автору статьи неизвестны области устойчивости для четырехпараметрических систем.

Случай 3) интересен по ряду причин. Во-первых, сравнительно небольшое количество параметров позволяет представить критерий устойчивости не только в аналитической, но и в наглядной геометрической форме. Во-вторых, многие модели приводят к исследованию трехпараметрических систем. В-третьих, несмотря на то, что некоторые трехпараметрические системы были исследованы [4, 11, 12, 25–27, 33] (в основном, в связи с изучением уравнения (6)), полного исследования всех трехпараметрических систем до сих пор не было проведено.

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы провести полную классификацию трехпараметрических систем и получить для каждой из них критерий устойчивости в терминах коэффициентов исходной системы в аналитической форме и в виде области устойчивости.

2. ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ: ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ И ТЕОРЕМЫ

Определение 6. Если функция (4) линейно зависит от n -мерного вещественного вектора $\mathbf{p}$, то функцию $\Phi = \Phi(z, \mathbf{p})$ назовем n -параметрической характеристической функцией, а уравнение

$$F(z, \mathbf{p}) = 0,$$

где $F(z, \mathbf{p}) = e^{w(z)}\Phi(z, \mathbf{p})$ и w — произвольная целая функция с вещественными коэффициентами ряда Маклорена, n -параметрическим характеристическим уравнением.

Очевидно, для трехпараметрической системы (1) характеристическое уравнение тоже трехпараметрическое. Изучению одно- и двухпараметрических характеристических уравнений посвящены работы [20], [22].

Общей теории исследования характеристических уравнений при $n \geq 3$ не существует, поэтому исследование проводится по следующей схеме: фиксируется один из трех параметров или их соотношение и проводится исследование уравнения при каждом значении этого фиксированного параметра. Таким образом, трехпараметрическое уравнение рассматривается как однопараметрическое семейство двухпараметрических уравнений.

Исследование последних основано на походе, изложенном в [22], поэтому кратко изложим его. Доказательства всех утверждений, приведенных в данном разделе, читатель сможет найти в указанной работе.

2.1. Точки D-разбиения. Двухпараметрическое характеристическое уравнение имеет вид

$$(11) \quad F(z, \mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} f_0(z) + p_1 f_1(z) + p_2 f_2(z) = 0,$$

где $\mathbf{p} = \{p_1, p_2\}$.

Отметим, что слагаемое $z^N e^{w(z)}$ характеристической функции должно входить в слагаемое $f_0(z)$ характеристического уравнения — данное требование является достаточным условием того, что при непрерывном изменении $\mathbf{p}$ корни уравнения (11) с положительной вещественной частью появляются только благодаря переходу через мнимую ось.

Определение 7. Область устойчивости — это совокупность всех точек плоскости, которым соответствует устойчивая функция $F(\cdot, \mathbf{p})$.

Как правило, границы области устойчивости задаются параметрически, поэтому для ее описания удобно воспользоваться другими координатами. Обозначим $\mathbf{r} = \{r_1, r_2\}$ и будем исследовать в комплексной плоскости уравнение

$$(12) \quad f_0(z) + r_1 f_1(z) + r_2 f_2(z) = 0.$$

Определение 8. Любой точке $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ поставим в соответствие число $\rho(\mathbf{r})$, равное количеству корней (с учетом кратности) с неотрицательной вещественной частью функции $F(\cdot, \mathbf{r})$, и будем называть его абсолютным индексом точки $\mathbf{r}$.

Отметим, что $\rho(\mathbf{r})$ всегда конечно. Будем искать все точки пространства $\mathbb{R}^2$ с нулевым абсолютным индексом. Принадлежность точки $\mathbf{p}$ множеству этих точек эквивалентна тому, что функция $F(\cdot, \mathbf{p})$ устойчива.

Определение 9. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^3$, точки которого будем обозначать символом $(\mathbf{r}, \varphi)$, где $\varphi \in \mathbb{R}$. Значение φ будем называть *частотой* этой точки, а вектор $\mathbf{r}$ — *проекцией* точки $(\mathbf{r}, \varphi)$.

Определение 10. Точку $(\mathbf{r}, \varphi)$ назовем *точкой D-разбиения*, если $F(i\varphi, \mathbf{r}) = 0$.

Определение 11. Областью D-разбиения будем называть линейно связное открытое множество $V \in \mathbb{R}^2$ такое, что:

- V не содержит проекции ни одной точки D-разбиения,
- любое линейно связное открытое множество, собственным подмножеством которого является V , содержит проекцию хотя бы одной точки D-разбиения.

Отметим, что все точки области D-разбиения V имеют один и тот же абсолютный индекс, который будем называть *абсолютным индексом области* V и обозначать $\rho(V)$.

Символом $F'(z, \mathbf{r})$ будем обозначать производную по первому аргументу.

Определение 12. Назовем точку D-разбиения $(\mathbf{r}, \varphi)$ *регулярной*, если $F'(i\varphi, \mathbf{r}) \neq 0$, и *нерегулярной*, если $F'(i\varphi, \mathbf{r}) = 0$.

Приведем следствие из теоремы о неявном операторе в аналитическом случае [34, с. 415]. Рассмотрим регулярную точку D-разбиения $(\mathbf{a}, \varphi)$. В окрестности точки $\mathbf{a}$ существует единственная аналитическая функция $Z_\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что $Z_\varphi(\mathbf{a}) = i\varphi$ и $F(Z_\varphi(\mathbf{r}), \mathbf{r}) \equiv 0$.

Определение 13. Регулярную точку D-разбиения $(\mathbf{r}, \varphi)$ назовем *стационарной*, если $\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, и *нестационарной*, если $\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r}) \neq \mathbf{0}$.

2.2. Линии D-разбиения. Для того, чтобы найти точки D-разбиения, разделим действительную и мнимую части уравнения (12) при $z = i\varphi$:

$$(13) \quad \begin{cases} r_1 \operatorname{Re} f_1(i\varphi) + r_2 \operatorname{Re} f_2(i\varphi) + \operatorname{Re} f_0(i\varphi) = 0, \\ r_1 \operatorname{Im} f_1(i\varphi) + r_2 \operatorname{Im} f_2(i\varphi) + \operatorname{Im} f_0(i\varphi) = 0. \end{cases}$$

Введем следующие функции, представляющие собой определители системы (13):

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi) &= \operatorname{Im} f_1(-i\varphi) f_2(i\varphi), \\ u_1(\varphi) &= \operatorname{Im} f_2(-i\varphi) f_0(i\varphi), \\ u_2(\varphi) &= \operatorname{Im} f_0(-i\varphi) f_1(i\varphi), \\ \mathbf{u} &= \{u_1, u_2\}. \end{aligned}$$

При заданном φ система (13) разрешима ровно в трех случаях:

- если $\Delta(\varphi) \neq 0$, то система (13) имеет единственное решение $\mathbf{S}(\varphi) = \mathbf{u}(\varphi)/\Delta(\varphi)$;
- если выполняется система

$$(14) \quad \begin{cases} \Delta(\varphi) = u_1(\varphi) = u_2(\varphi) = 0, \\ |f_1(i\varphi)| + |f_2(i\varphi)| \neq 0, \end{cases}$$

то система (13) описывает прямую в плоскости параметров (r_1, r_2) ;

- если $f_1(i\varphi) = f_2(i\varphi) = f_0(i\varphi) = 0$, то любое $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ является решением системы (13), поэтому область устойчивости пуста.

В случае $\Delta(\varphi) \neq 0$ множество корней функции Δ либо конечно, либо счетно, причем в последнем случае любой отрезок содержит лишь конечное количество корней. Пронумеруем все неотрицательные корни по возрастанию, начиная с нулевого номера, и обозначим множество этих корней через $\{\xi_n\}, n = 0, 1, 2, \dots$

Множество $\{\xi_n\}$ разбивает $\mathbb{R}_+$ на не более чем счетное множество интервалов I_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Заметим, что $\xi_0 = 0$ в силу нечетности функции Δ . Если множество $\{\xi_n\}$ бесконечно, то $I_n = (\xi_n, \xi_{n+1})$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$. Если количество корней конечно, то, обозначив через M их количество, уменьшенное на единицу, имеем $I_n = (\xi_n, \xi_{n+1})$ при $n = 0, M-1$ и $I_M = (\xi_M, \infty)$.

Определение 14. Ориентированную кривую в $\mathbb{R}^3$, задаваемую непрерывным отображением $(\mathbf{r}, \varphi) = (\mathbf{S}(\varphi), \varphi)$, $\varphi \in I_n$, будем называть *кривой D-разбиения*. Ориентированную кривую в $\mathbb{R}^2$, задаваемую непрерывным отображением $\mathbf{r} = \mathbf{S}(\varphi)$, $\varphi \in I_n$, будем обозначать через C_n и называть *проекцией кривой D-разбиения*.

Если $(a, b) \subset I_n$, то множество $(S(\varphi), \varphi)$, $\varphi \in (a, b)$ является непрерывным участком проекции кривой D-разбиения, который будем обозначать через $C_n^{(a,b)}$.

Определение 15. Если φ удовлетворяет (14), то прямую на плоскости $(\cdot, \cdot, \varphi)$ пространства $\mathbb{R}^3$, состоящую из таких точек $(\mathbf{r}, \varphi)$, что $F(i\varphi, \mathbf{r}) = 0$, будем называть *прямой D-разбиения, соответствующей частоте φ* . Прямую в плоскости $\mathbb{R}^2$, состоящую из точек $\mathbf{r}$ таких, что $F(i\varphi, \mathbf{r}) = 0$, будем называть *проекцией прямой D-разбиения, соответствующей частоте φ* .

Любая точка D-разбиения принадлежит ровно одной *линии D-разбиения* (то есть кривой или прямой D-разбиения).

Определение 16. Если $\Delta(\varphi) \neq 0$ и функции Δ, u_1, u_2 линейно зависимы, то прямую $k_0 + k_1 r_1 + k_2 r_2 = 0$ с вещественными коэффициентами k_0, k_1, k_2 такими, что $|k_1| + |k_2| \neq 0$ и $k_0 \Delta(\varphi) + k_1 u_1(\varphi) + k_2 u_2(\varphi) \equiv 0$, будем называть *главной прямой*.

Коэффициенты k_0, k_1, k_2 определяются однозначно с точностью до общего множителя, поэтому главная прямая единственная (если существует).

Заметим, что Δ не меняет знак на I_n .

Определение 17. Назовем кривую C_n *положительной*, если $\forall \varphi \in I_n : \Delta(\varphi) > 0$. Назовем кривую C_n *отрицательной*, если $\forall \varphi \in I_n : \Delta(\varphi) < 0$.

Будем говорить, что точка $\mathbf{S}(\varphi)$ пробегает кривую C_n в положительном направлении, если при этом φ пробегает I_n слева направо.

Теорема 1. Пусть $\varphi \in I_n$ и $\mathbf{S}'(\varphi) \neq \mathbf{0}$. Если кривая C_n положительна (отрицательна), то вектор $\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{S}(\varphi))$ отличен от нулевого и направлен вправо (влево) относительно положительного направления ее обхода.

Прямые D-разбиения не являются частным случаем кривых. Более того, прямые могут иметь различную природу, что потребовало проведения полной классификации прямых и исследования их свойств.

Определение 18. Назовем прямую D-разбиения *нерегулярной*, если она состоит из нерегулярных точек D-разбиения. В противном случае прямую D-разбиения будем называть *регулярной*.

Теорема 2. Регулярная прямая D -разбиения состоит из регулярных точек D -разбиения за исключением не более чем одной точки. Для того чтобы прямая D -разбиения, соответствующая частоте φ , была нерегулярной, необходимо и достаточно выполнения всех трех условий (15)–(17):

$$(15) \quad \operatorname{Im} f_1'(-i\varphi)f_2'(i\varphi) = \operatorname{Im} f_0'(-i\varphi)f_1'(i\varphi) = \operatorname{Im} f_2'(-i\varphi)f_0'(i\varphi) = 0,$$

$$(16) \quad (f_1(-i\varphi)f_2(i\varphi))' = (f_0(-i\varphi)f_1(i\varphi))' = (f_2(-i\varphi)f_0(i\varphi))' = 0,$$

$$(17) \quad f_1'(i\varphi) = f_2'(i\varphi) = 0 \Rightarrow f_0'(i\varphi) = 0.$$

Определение 19. Назовем регулярную прямую D -разбиения, соответствующую частоте φ , *стационарной*, если $\Delta'(\varphi) = u_1'(\varphi) = u_2'(\varphi) = 0$, и *нестационарной*, если хотя бы одно из значений $\Delta'(\varphi)$, $u_1'(\varphi)$, $u_2'(\varphi)$ не равно нулю.

ТАБЛИЦА 1. Типы прямых D -разбиения и их критерии

Нерегулярные	Регулярные		
	Стационарные	Нестационарные	
		С центральной точкой	Без центральной точки
$\Delta'(\varphi) = \mathbf{u}'(\varphi) = \mathbf{0}$, (15), (16) и (17)	$\Delta'(\varphi) = \mathbf{u}'(\varphi) = \mathbf{0}$ и хотя бы одно из (15)–(17) неверно	$\Delta'(\varphi) \neq 0$	$\Delta'(\varphi) = 0$, $\mathbf{u}'(\varphi) \neq \mathbf{0}$

Теорема 3. Пусть частоте φ соответствует прямая D -разбиения такая, что $\Delta'(\varphi) = 0$ и $\mathbf{u}'(\varphi) \neq \mathbf{0}$. Тогда:

- данная прямая регулярна и нестационарна;
- любая точка данной прямой нестационарна;
- в любой точке $\mathbf{r}$ проекции прямой D -разбиения вектор $\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r})$ отличен от нулевого и повернут относительно вектора $\mathbf{u}'(\varphi)$ на $\pi/2$ по часовой стрелке.

Определение 20. Пусть частоте φ соответствует прямая D -разбиения и $\Delta'(\varphi) \neq 0$; назовем точку $(\mathbf{u}'(\varphi)/\Delta'(\varphi), \varphi)$ пространства $\mathbb{R}^3$ *центральной точкой* данной прямой D -разбиения.

Теорема 4. Пусть частоте φ соответствует прямая D -разбиения и $\Delta'(\varphi) \neq 0$. Тогда:

- данная прямая регулярна и нестационарна;
- любая точка данной прямой, кроме центральной точки, нестационарна;
- если $\mathbf{r}$ — проекция точки данной прямой, не являющейся центральной точкой, то вектор $\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r})$ отличен от нулевого и направлен по касательной к окружности, проходящей через $\mathbf{r}$, с центром в проекции центральной точки данной прямой; при этом $\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi(\mathbf{r})$ направлен против часовой стрелки, если $\Delta'(\varphi) > 0$, и по часовой стрелке, если $\Delta'(\varphi) < 0$.

Для того чтобы определить направление возрастания вещественной части корня на проекциях стационарных прямых (за исключением не более чем одной точки), нужно вычислить младшую ненулевую частную производную функции $\operatorname{Re} Z_\varphi$. В частности, на стационарной прямой следующее выражение:

$$(18) \quad W(\varphi, \mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Re} \frac{1}{F'(i\varphi, \mathbf{r})} \left(\frac{f_1^2(i\varphi) + f_2^2(i\varphi)}{F'(i\varphi, \mathbf{r})} \right)'.$$

определяет знак квадратичной формы частных производных второго порядка. Иными словами, если на стационарной прямой имеем $W(\varphi, \mathbf{r}) > 0$, то абсолютный индекс точек вблизи ее проекции положителен.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Существует четыре типа двухпараметрических характеристических уравнений:

- будем называть (11) *двухпараметрическим характеристическим уравнением первого рода*, если функции Δ, u_1, u_2 линейно независимы;
- будем называть (11) *двухпараметрическим характеристическим уравнением второго рода*, если $\Delta(\varphi) \neq 0$ и функции Δ, u_1, u_2 линейно зависимы;
- будем называть (11) *двухпараметрическим характеристическим уравнением третьего рода*, если $\Delta(\varphi) \equiv 0$, но $\mathbf{u}(\varphi) \neq \mathbf{0}$;
- будем называть (11) *двухпараметрическим характеристическим уравнением четвертого рода*, если $\mathbf{u}(\varphi) \equiv \mathbf{0}$.

Заметим, что невырожденное линейное преобразование координат и перенос начала координат не меняют тип характеристического уравнения.

Для характеристического уравнения первого рода множества кривых D-разбиения и прямых D-разбиения не более чем счетно, главной прямой не существует, а области D-разбиения могут иметь криволинейные границы, поэтому едва ли удастся уточнить геометрию областей D-разбиения без дополнительных предположений.

Для характеристического уравнения второго рода множества кривых D-разбиения и прямых D-разбиения тоже не более чем счетны. В отличие от предыдущего, в этом случае существует главная прямая (то есть проекции всех кривых D-разбиения принадлежат этой прямой).

Характеристическое уравнение системы (1) можно представить в виде

$$(19) \quad z^2 + p_1 + p_2 f_2(z) = 0,$$

где $p_1 = \alpha$, $f_2(z) = p_\beta e^{-z} + p_\gamma e^{-2z} + p_\mu z + p_\nu z e^{-z}$, а $p_\beta, p_\gamma, p_\mu, p_\nu$ — фиксированные вещественные параметры.

Уравнение (19) является двухпараметрическим характеристическим уравнением второго рода.

Если множество $\{\xi_n\}$ бесконечно, то обозначим $\mathbb{M} = \mathbb{N}_0$, а если множество $\{\xi_n\}$ конечно, то обозначим через M наибольший индекс этого множества, то есть $\mathbb{M} = \{0, 1, \dots, M\}$.

При каждом $n \in \mathbb{M}$ рассмотрим область Q_n в плоскости $\mathbb{R}^2$, содержащую такие точки $\mathbf{r}$, что

$$(20) \quad \forall m \leq n: r_1 > \theta_m^2 - r_2 f_2(i\theta_m),$$

$$(21) \quad \forall m \in \mathbb{M} \cap (n, +\infty): r_1 < \theta_m^2 - r_2 f_2(i\theta_m),$$

$$(22) \quad r_2 \Delta(\theta_n + 0) < 0.$$

Лемма 1. Пусть существует $\delta \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $n \in \mathbb{M}$ имеем $|f_2(i\theta_n)| \geq |\delta|$ и если $f_2(i\theta_n) \neq \delta$, то $\operatorname{Re} f_2'(i\theta_n) f_2(i\theta_n) < 0$. Тогда $\bigcup_{n \in \mathbb{M}} Q_n$ — область устойчивости уравнения (19).

Для характеристического уравнения третьего рода кривых D-разбиения не существует и множество прямых D-разбиения не более чем счетно, поэтому любая область D-разбиения является выпуклым множеством, граница которого состоит из не более чем счетного множества прямолинейных сегментов.

Так как $\Delta(\varphi) \equiv 0$ любая нестационарная прямая не имеет центральной точки. Рассмотрим нестационарную прямую, соответствующую частоте φ и обозначим через $\mathcal{H}_n$ множество точек $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих неравенству

$$(23) \quad F(i\theta_n, \mathbf{r})(f_2(-i\theta_n)u'_1(\theta_n) - f_1(-i\theta_n)u'_2(\theta_n)) > 0.$$

Если $f_1(-i\theta_n)u'_2(\theta_n) \neq 0$, то неравенство (23) равносильно следующему неравенству

$$(24) \quad F(i\theta_n, \mathbf{r})f_1(-i\theta_n)u'_2(\theta_n) < 0,$$

а если $f_2(-i\theta_n)u'_1(\theta_n) \neq 0$, то — неравенству

$$(25) \quad F(i\theta_n, \mathbf{r})f_2(-i\theta_n)u'_1(\theta_n) > 0.$$

Будем предполагать, что множество $\{\theta_n\}$ бесконечно.

Теорема 5. Пусть (11) — двухпараметрическое характеристическое уравнение третьего рода и $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n \neq \emptyset$. Тогда область устойчивости либо пуста, либо совпадает с $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$.

Теорема 6. Пусть (11) — двухпараметрическое характеристическое уравнение третьего рода, $|f_1(0)| + |f_2(0)| \neq 0$ и область D , являющаяся пересечением полуплоскости $r_1f_1(0) + r_2f_2(0) + f_0(0) > 0$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$, не пуста. Тогда область устойчивости либо пуста, либо совпадает с D .

Теорема 7. Пусть (11) — двухпараметрическое характеристическое уравнение третьего рода, а точка $\mathbf{a}$ принадлежит прямой L_m и полуплоскости $\mathcal{H}_n$ при любом $n \neq m$. Область устойчивости пуста, если выполняется хотя бы одно из условий:

- 1) $W(\theta_m, \mathbf{a}) > 0$;
- 2) существует прямая в $\mathbb{R}^2$, проходящая через точку $\mathbf{a}$, но не совпадающая с L_m такая, что абсолютный индекс любой точки этой прямой положителен;
- 3) $f_1(0)u'_2(0) > f_2(0)u'_1(0)$.

Для характеристического уравнения четвертого рода множество кривых D-разбиения пусто, а множество прямых D-разбиения может быть континуально. Анализ этого случая мог бы вызвать значительные трудности, однако удалось доказать, что область устойчивости характеристического уравнения четвертого рода либо пуста, либо совпадает со всей плоскостью параметров.

В конце данного параграфа приведем области устойчивости для некоторых двухпараметрических систем — эти результаты будут использованы для доказательств теорем в следующем параграфе.

Теорема 8 (см. [4]). Все корни уравнения

$$(26) \quad z + a + be^{-z} = 0$$

лежат слева от мнимой оси в том и только том случае, если выполняются неравенства $a > -1$ и $-a < b < \eta/\sin \eta$, где η — единственный корень уравнения $a = -\eta \operatorname{ctg} \eta$ из интервала $(0, \pi/2)$.

Теорема 9 (см. [22, Теорема 6.15]). Уравнение

$$z^2 + a \frac{1 + e^{-2z}}{2} + be^{-z} = 0$$

имеет хотя бы один корень с неотрицательной вещественной частью при любых вещественных a и b .

Теорема 10 (см. [22, Теорема 6.8]). Для того чтобы все корни уравнения

$$(27) \quad z^2 + a \frac{1 + e^{-2z}}{2} + bze^{-z} = 0$$

имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись либо два неравенства

$$0 < a < \pi^2/4, \quad \sqrt{a} \sin \sqrt{a} < b < \pi/2,$$

либо два неравенства

$$\pi^2/4 < a < \eta^2, \quad \pi/2 < b < \sqrt{a} \sin \sqrt{a},$$

где η — корень уравнения $\eta \sin \eta = \pi/2$ из интервала $(\pi/2, \pi)$.

Рис. 1. Область устойчивости уравнения (26) (справа)

Рис. 2. Область устойчивости уравнения (27) (внутри)

В дальнейшем нам потребуется элементарно проверяемое следствие из вышеприведенного утверждения.

Следствие 1. Пусть

- (1) $a \in \mathbb{R}$ и $b \notin [0, f(\varphi_0)]$, тогда у характеристического уравнения (33) есть корни с положительной вещественной частью;
- (2) $a = \pi^2/4$ и $b = \pi/2$, тогда у характеристического уравнения (33) есть ровно одна пара простых комплексно-сопряженных корней с неотрицательной вещественной частью и нет корней с положительной вещественной частью.

Теорема 11 (см. [22, Теорема 6.7]). Для того чтобы все корни уравнения

$$(28) \quad z^2 + a \frac{1 - e^{-2z}}{2} + be^{-z} = 0$$

имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно выполнения неравенств $0 < a < \pi^2/4$, $0 < b < a \cos \sqrt{a}$.

Теорема 12 (см. [9, с. 130]). Для того чтобы все корни уравнения

$$(29) \quad z^2 + ae^{-z} + bz = 0,$$

имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно выполнения неравенств $0 < a < \eta^2 / \cos \eta$, где η — корень уравнения $b = \eta \operatorname{tg} \eta$ из интервала $(0, \pi/2)$.

Рис. 3. Область устойчивости уравнения (28) (внутри)

Рис. 4. Область устойчивости уравнения (30) (внутренность счетного множества треугольников)

Теорема 13 (см. [4]). Для того чтобы все корни уравнения

$$(30) \quad z^2 + a + be^{-2z} = 0,$$

имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы точка $\{a, b\}$ принадлежала внутренности одного из равнобедренных треугольников

$$Q_n = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : (-1)^n r_2 < 0, \frac{\pi^2 n^2}{4} - (-1)^n r_2 < r_1 < \frac{\pi^2 (n+1)^2}{4} + (-1)^n r_2 \right\},$$

где $n \in \mathbb{N}_0$.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим трехпараметрические системы (1) и приведем их характеристические уравнения

$$(31) \quad \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z + \nu z + z^2 e^z = 0,$$

$$(32) \quad \chi \operatorname{ch} z + \beta + \mu z e^z + z^2 e^z = 0,$$

$$(33) \quad \chi \operatorname{ch} z + \beta + \nu z + z^2 e^z = 0,$$

$$(34) \quad \beta + \zeta \operatorname{sh} z + \nu z + z^2 e^z = 0,$$

$$(35) \quad \chi \operatorname{ch} z + \beta + \zeta \operatorname{sh} z + z^2 e^z = 0,$$

$$(36) \quad \chi \operatorname{ch} z + \zeta \operatorname{sh} z + \nu z + z^2 e^z = 0,$$

$$(37) \quad \beta + \mu z e^z + \nu z + z^2 e^z = 0,$$

$$(38) \quad \chi \operatorname{ch} z + \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z + z^2 e^z = 0,$$

$$(39) \quad \beta + \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z + z^2 e^z = 0,$$

$$(40) \quad \chi \operatorname{ch} z + \mu z e^z + \nu z + z^2 e^z = 0.$$

Данный параграф посвящен исследованию характеристических уравнений (31)–(38). Уравнения (39), (40) рассмотрены во второй части настоящей работы.

4.1. Уравнение (31): $\zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z + \nu z + z^2 e^z = 0$. Данное уравнение имеет нулевой корень, поэтому соответствующая система не является асимптотически устойчивой. Однако интересно исследовать уравнение

$$(41) \quad \zeta \frac{\operatorname{sh} z}{z} + \mu e^z + \nu + z e^z = 0,$$

получаемое из (31) делением на z .

Уравнение (41) является характеристическим уравнением следующего функционально-дифференциального уравнения:

$$\dot{x}(t) + \zeta \int_{t-2}^t x(s) ds + \mu x(t) + \nu x(t-1) = 0.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ область $\mathcal{D}_1$, содержащую точки $\mathbf{r}$ такие, что $r_3 > -1$, $r_1 + r_2 + r_3 > 0$ и

$$\eta_2 / \sin \eta_2 - r_1 \sin \eta_2 / \eta_2 < r_2 < \eta_1 / \sin \eta_1 - r_1 \sin \eta_1 / \eta_1,$$

где $\eta_1 < \eta_2$ — корни уравнения $r_3 = -\varphi \operatorname{ctg} \varphi$ из интервалов $(0, \pi)$ и $(\pi, 2\pi)$ соответственно. Эта область связна, неограниченна и частично изображена на рис. 5.

Рис. 5. Область $\mathcal{D}_1$ (внутри)

Рис. 6. Области D-разбиения уравнения (41) при $\mu = 0$

Теорема 14. Для того чтобы все корни уравнения (41) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы точка $\{\zeta, \nu, \mu\}$ принадлежала области $\mathcal{D}_1$.

Доказательство. Уравнение (41) рассмотрим как однопараметрическое семейство двухпараметрических характеристических уравнений (11) третьего рода, где μ — параметр семейства, $p_1 = \zeta$ и $p_2 = \nu$.

Имеем $f_1(z) = \operatorname{sh} z / z$, $f_2(z) \equiv 1$, $f_0(z) = z e^z + \mu e^z$, следовательно,

$$\Delta(\varphi) \equiv 0, \quad \mathbf{u}(\varphi) = (\varphi \cos \varphi + \mu \sin \varphi) \{1, -\sin \varphi / \varphi\},$$

поэтому $\theta_0 = 0$, а θ_n — последовательность положительных корней уравнения $\mu = -\varphi \operatorname{ctg} \varphi$, $n \geq 1$.

Прямая L_0 задается уравнением $r_1 + r_2 = -\mu$. При $n \geq 1$ прямая L_n задается уравнением $r_1 \sin \theta_n / \theta_n + r_2 = \theta_n / \sin \theta_n$. Воспользовавшись формулой (25) легко показать, что при $n \geq 1$ плоскость $\mathcal{H}_n$ задается неравенством

$$(42) \quad r_1 + r_2 \theta_n / \sin \theta_n < (\theta_n / \sin \theta_n)^2.$$

Точки пересечения прямой L_0 с координатными осями имеют координаты $\mathbf{a}^0 = \{-\mu, 0\}$ и $\mathbf{b}^0 = \{0, -\mu\}$. Из неравенства

$$-\mu\theta_n/\sin\theta_n = \theta_n^2 \cos\theta_n/\sin^2\theta_n < \theta_n^2/\sin^2\theta_n$$

вытекает $\mathbf{b}^0 \in \mathcal{H}_n$.

Далее рассмотрим три ситуации: $\mu < -1$, $\mu = -1$ и $\mu > -1$.

Если $\mu < -1$, то $f_1(0)u'_2(0) - f_2(0)u'_1(0) = -2(1 + \mu) > 0$, то есть согласно пункту 3) теоремы 7 область устойчивости пуста.

Если $\mu = -1$, то L_0 — проекция нерегулярной прямой, но точки прямой $r_1 = 0$ имеют положительный абсолютный индекс (теорема 8), следовательно область устойчивости пуста согласно пункту 2) теоремы 7.

Далее пусть $\mu > -1$. Прямая L_0 нестационарна, а плоскость $\mathcal{H}_0$ задается неравенством $r_1 + r_2 + \mu > 0$.

Согласно теореме 8 область устойчивости не пуста, а по теореме 5 задается бесконечной системой неравенств: $r_1 + r_2 + \mu > 0$ и (42) при всех $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что среди этих неравенств независимыми являются следующие три:

$$(43) \quad \begin{cases} r_1 + r_2 + \mu > 0, \\ r_1 + r_2\theta_1/\sin\theta_1 < \sin^2\theta_1/\theta_1^2, \\ r_1 + r_2\theta_2/\sin\theta_2 < \sin^2\theta_2/\theta_2^2. \end{cases}$$

Обозначим через T треугольник, образованный отрезками прямых L_0, L_1, L_2 . Иными словами, внутренность T состоит из точек $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$, для которых справедлива система (43) (на рис. 6–8 стороны указанного треугольника выделены жирными линиями). Докажем, что проекция никакой другой прямой D-разбиения не пересекает этот треугольник.

Рис. 7. Области D-разбиения уравнения (41) при $\mu = -0.5$

Рис. 8. Области D-разбиения уравнения (41) при $\mu = 2$

При $n, k \geq 1$ обозначим точку пересечения различных прямых L_n и L_k через

$$\mathbf{p}^{n,k} = \{-\theta_k\theta_n/(\sin\theta_k\sin\theta_n), \theta_k/\sin\theta_k + \theta_n/\sin\theta_n\}.$$

При $n \geq 1$ и $\mu > -1$ имеем $\theta_n \in (\pi(n-1), \pi n)$, поэтому выполняется равенство $\theta_n/\sin\theta_n = (-1)^n\sqrt{\theta_n^2 + \mu^2}$, следовательно, все нечетные прямые имеют отрицательный угловой коэффициент, а все четные (кроме L_0) — положительный. Точка пересечения прямой L_n с осью r_1 имеет координаты $\mathbf{a}^n = \{\sqrt{\mu^2 + \theta_n^2}, 0\}$. Следовательно, если точки

$\mathbf{p}_{1,2m+1}$ и $\mathbf{p}_{2,2m+2}$ расположены слева от прямой L_0 (при $m \in \mathbb{N}$), то ни одна из проекций прямых D-разбиения не пересекает внутренность T .

Расположение точки $\mathbf{p}_{n,k}$ слева от L_0 эквивалентно неравенству

$$(44) \quad (\theta_n \theta_k - \theta_n \sin \theta_k - \theta_k \sin \theta_n + \theta_k \cos \theta_k \sin \theta_n) / (\sin \theta_n \sin \theta_k) > 0.$$

Если n и k — четные числа, то неравенство (44) выполняется в силу $\sin \theta_n < 0$ и $\sin \theta_k < 0$.

Докажем неравенство (44) при $k = 1$ и $n = 2m + 1$. При $\varphi \in (0, \pi)$ имеем $\varphi \cos \varphi - \sin \varphi < 0$. Дважды интегрируя последнее неравенство, получаем следующее: $3 \sin \varphi - \varphi \cos \varphi < 2\varphi$. Полученное неравенство перепишем в виде:

$$\frac{\varphi - \sin \varphi}{\varphi(1 - \cos \varphi)} > \frac{1}{3}.$$

Так как $\theta_1 < \pi$ и $\theta_n > 2\pi$ справедливо неравенство

$$\frac{\sin \theta_n}{\theta_n} < \frac{\theta_1 - \sin \theta_1}{\theta_1(1 - \cos \theta_1)},$$

откуда и вытекает (44).

Остается отметить, что $\{\zeta, \nu, \mu\} \in \mathcal{D}_1$ равносильно тому, что $\mu > -1$ и $\{\zeta, \nu\}$ принадлежит внутренности T . $\square$

4.2. Уравнение (32): $\chi \operatorname{ch} z + \beta + \mu z e^z + z^2 e^z = 0$. Зададим в пространстве $\mathbb{R}^3$ область $\mathcal{D}_2$, состоящую из точек $\mathbf{r}$, удовлетворяющих условиям: $r_3 > 0$, $r_1 + r_2 > 0$ и

$$\frac{\eta_2^2}{\cos \eta_2} - r_1 \cos \eta_2 < r_2 < \frac{\eta_1^2}{\cos \eta_1} - r_1 \cos \eta_1,$$

где η_1, η_2 — корни уравнения $r_3 = \varphi \operatorname{tg} \varphi$ из интервалов $(0, \pi/2)$ и $(\pi, 3\pi/2)$ соответственно. Область $\mathcal{D}_2$ связна, неограниченна и изображена на рис. 9.

Рис. 9. Область $\mathcal{D}_2$ (внутри)

Рис. 10. Области D-разбиения уравнения (32) при $\mu = 1$

Теорема 15. Для того чтобы все корни уравнения (32) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы точка $\{\chi, \beta, \mu\}$ принадлежала области $\mathcal{D}_2$.

Доказательство. Будем рассматривать (32) как однопараметрическое семейство двухпараметрических характеристических уравнений (11) третьего рода, где $p_1 = \chi$, $p_2 = \beta$, а μ — параметр семейства.

Из $f_1(z) = \operatorname{ch} z$, $f_2(z) \equiv 1$, $f_0(z) = z^2 e^z + \mu z e^z$ получаем, что $\Delta(\varphi) \equiv 0$, $\mathbf{u}(\varphi) = (\mu\varphi \cos \varphi - \varphi^2 \sin \varphi)\{1, -\cos \varphi\}$, поэтому $\theta_0 = 0$, а θ_n — упорядоченная по возрастанию последовательность положительных корней уравнения $\mu = \varphi \operatorname{tg} \varphi$, где $n \geq 1$.

При $\mu < 0$ имеем $u'_1(0)f_2(0) - u'_2(0)f_1(0) = 2\mu < 0$, поэтому область устойчивости пуста согласно пункту 3) теоремы 7.

Согласно теореме 9 область устойчивости пуста при $\mu = 0$.

Далее пусть $\mu > 0$.

Прямая L_0 нестационарна и задается уравнением $r_1 + r_2 = 0$. Полуплоскость $\mathcal{H}_0$ задается неравенством $r_1 + r_2 > 0$.

При $n \geq 1$ прямая L_n задается уравнением $r_1 \cos \theta_n + r_2 = \theta_n^2 / \cos \theta_n$. Воспользуемся (25) для того, чтобы найти неравенство для полуплоскости $\mathcal{H}_n$. Имеем

$$F(i\theta_n, \mathbf{r})f_2(-i\theta_n)u'_1(\theta_n) = - \left(r_1 \cos \theta_n + r_2 - \frac{\theta_n^2}{\cos \theta_n} \right) \frac{\theta_n(\theta_n + \sin \theta_n \cos \theta_n)}{\cos \theta_n},$$

следовательно, $\mathcal{H}_n$ задается неравенством

$$(45) \quad r_1 + r_2 / \cos \theta_n < (\theta_n / \cos \theta_n)^2.$$

Легко видеть, что начало координат принадлежит прямой L_0 и полуплоскости $\mathcal{H}_n$ при любом $n \geq 1$. Следовательно, область устойчивости не пуста.

Если $\mu > 0$, то согласно теореме 5 область устойчивости описывается бесконечной системой неравенств: $r_1 + r_2 > 0$ и (45), где $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что среди этих неравенств независимыми являются три:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 > 0, \\ r_1 + r_2 / \cos \theta_1 < (\theta_1 / \cos \theta_1)^2, \\ r_1 + r_2 / \cos \theta_2 < (\theta_2 / \cos \theta_2)^2. \end{cases}$$

Для этого достаточно показать, что треугольник T , образованный отрезками прямых L_0, L_1 и L_2 , не имеет общих точек ни с одной другой проекцией прямой D-разбиения. Стороны T выделены жирным на рис. 10, 11.

При $n \geq 1$ имеем $\cos \theta_n = (-1)^{n+1} \theta_n / \sqrt{\mu^2 + \theta_n^2}$, поэтому с ростом n растет абсолютная величина коэффициента наклона прямых, а знаки коэффициентов наклона прямых чередуются. Прямая L_n пересекает ось r_1 в точке $\{\mu^2 + \theta_n^2, 0\}$. С ростом n абсцисса этих точек растет. Таким образом, точка пересечения прямых с одинаковой четностью (за исключением L_0) расположена правее, чем точка пересечения любой из этих прямых с осью r_1 . Таким образом, T принадлежит углу $r_2 \leq \mu^2 + \theta_2^2 + |r_1| \theta_2 / \sqrt{\theta_2^2 + \mu^2}$, а прямая L_n при $n \geq 3$ не пересекает этот угол.

Остается заметить, что $\mu > 0$ и принадлежность точки $\{\chi, \beta\}$ внутренности T эквивалентны тому, что $\{\chi, \beta, \mu\}$ принадлежит $\mathcal{D}_2$. $\square$

4.3. Уравнение (33): $\chi \operatorname{ch} z + \beta + \nu z + z^2 e^z = 0$. Рассмотрим функцию $f(\varphi) = \varphi \sin \varphi$ и обозначим через φ_n корень уравнения $\varphi = -\operatorname{tg} \varphi$ из интервала $(\pi(n+1/2), \pi(n+1))$, где $n \in \mathbb{N}_0$.

Очевидно, φ_n — точки экстремума функции f , причем

$$f(\varphi_n) = (-1)^n \varphi_n^2 / \sqrt{\varphi_n^2 + 1}.$$

Рассмотрим область $\mathcal{D}_3$, состоящую из точек $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ таких, что

$$0 < r_3 < \frac{\varphi_0}{\sqrt{\varphi_0^2 + 1}}, \quad r_1 + r_2 > 0, \quad (\eta_2^2 - r_1) \cos \eta_2 < r_2 < (\eta_1^2 - r_1) \cos \eta_1,$$

где $\eta_1 < \eta_2$ — корни уравнения $r_3 = \varphi \sin \varphi$ из интервала $(0, \pi)$. Эта область связна, ограничена и изображена на рис. 12.

Рис. 11. Области D-разбиения уравнения (32) при $\mu = 3$

Рис. 12. Область $\mathcal{D}_3$ (внутри)

Теорема 16. Для того чтобы все корни уравнения (33) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы точка $\{\chi, \beta, \nu\}$ принадлежала области $\mathcal{D}_3$.

Доказательство. Будем рассматривать данное уравнение как семейство двухпараметрических уравнений (11) третьего рода, где ν — параметр семейства, а $p_1 = \chi$, $p_2 = \beta$.

Имеем $f_1(z) = \operatorname{ch} z$, $f_2(z) \equiv 1$ и $f_0(z) = z^2 e^z + \nu z$, следовательно, $\Delta(\varphi) \equiv 0$, $\mathbf{u}(\varphi) = (\nu\varphi - \varphi^2 \sin \varphi)\{1, -\cos \varphi\}$, поэтому θ_n — последовательность неотрицательных корней уравнения $\nu = f(\varphi)$, $n \geq 0$.

Плоскость $\nu = 0$ не пересекает область устойчивости (теорема 9).

При $\nu < 0$ имеем $f_1(0)u'_2(0) - f_2(0)u'_1(0) = -2\nu > 0$, поэтому область устойчивости пуста согласно пункту 3) теоремы 7.

Далее будем полагать, что $\nu > 0$.

Прямая L_0 нестационарна и задается уравнением $r_1 + r_2 = 0$, а полуплоскость $\mathcal{H}_0$ задается неравенством $r_1 + r_2 > 0$.

При $n \geq 1$ имеем $f_0(i\theta_n) = -\theta_n^2 \cos \theta_n$, поэтому прямая L_n задается уравнением $r_2 + r_1 \cos \theta_n = \theta_n^2 \cos \theta_n$. Если $\nu \neq f(\varphi_m)$ ни при каком $m \in \mathbb{N}_0$, то эта прямая нестационарна. Воспользуемся (25) для того, чтобы найти неравенство для полуплоскости $\mathcal{H}_n$:

$$-F(i\theta_n, \mathbf{r})f_2(-i\theta_n)u'_1(\theta_n) = \theta_n((r_1 - \theta_n^2) \cos \theta_n + r_2)f'(\theta_n) > 0.$$

Очевидно, $\operatorname{sgn} f'(\theta_n) = (-1)^{n+1}$, следовательно, $\mathcal{H}_n$ задается неравенством

$$(46) \quad ((r_1 - \theta_n^2) \cos \theta_n + r_2)(-1)^n < 0.$$

Докажем, что $\operatorname{sgn} \cos \theta_n = (-1)^n$ при $n \geq 2$. Пусть это не так, тогда $f'(\theta_n) \cos \theta_n \leq 0$, откуда получаем, что $\theta_n \in [\pi(m+1/2), \varphi_m]$ при некотором $m \in \mathbb{N}_0$. Поскольку $|f(\varphi_{m-1})| < \pi(m+1/2)$, то при $\varphi < \pi(m+1/2)$ имеем $|f(\varphi)| < \pi(m+1/2)$, следовательно, $n = 1$.

Итак, при $n \geq 2$ неравенство (46) можно переписать в виде $r_1 < \theta_n^2 - r_2 / \cos \theta_n$.

Рассмотрим точку $\mathbf{a}^n = \{\theta_n^2, 0\}$, принадлежащую L_n при любом $n \in \mathbb{N}_0$. Кроме того, если $\cos \theta_n \neq 0$, то $\mathbf{a}^n$ — точка пересечения прямой L_n с осью r_1 . Заметим, что $\mathbf{a}^k \in \mathcal{H}_n$ при любом $n > k$.

Пусть $\nu = f(\varphi_{2m})$ при некотором $m \in \mathbb{N}_0$. Имеем $(f_1(-i\pi m)f_2(i\pi m))' \neq 0$ и $\mathbf{u}'(\pi m) = \mathbf{0}$, поэтому в силу теоремы 2 прямая L_1 стационарна. Согласно следствию 1 через $\mathbf{a}^1$ проходит прямая $r_2 = 0$, состоящая из точек с положительным абсолютным индексом, следовательно, область устойчивости пуста согласно пункту 3) теоремы 7.

Пусть $\nu \in (f(\varphi_{2m}), f(\varphi_{2m+2}))$ при некотором $m \in \mathbb{N}_0$. Согласно теореме 5 либо область устойчивости пуста, либо область устойчивости — многоугольник, границе которого принадлежит точка $\mathbf{a}^1$. Согласно следствию 1 имеем $\rho(\mathbf{a}^1) > 2$, поэтому абсолютный индекс этого многоугольника положителен, то есть область устойчивости пуста.

Пусть $\nu \in (0, f(\varphi_0))$. Согласно теореме 5 область устойчивости либо пуста, либо описывается бесконечной системой неравенств: $r_1 + r_2 > 0$ и (46), где $n \in \mathbb{N}$. Известно (теорема 10) что при $\nu \neq \pi/2$ область устойчивости не пуста. Если $\nu = \pi/2$, то $\rho(\mathbf{a}^1) = 2$ согласно второму пункту следствия 1, поэтому область устойчивости не пуста по определению $\mathcal{H}_1$.

С ростом n растет a_1^n и абсолютная величина угловых коэффициентов прямых L_n . Следовательно, треугольник T , образованный отрезками прямых L_0, L_1 и L_2 , не имеет общих точек ни с одной другой проекцией прямой D-разбиения. На рис. 13–15 стороны данного треугольника выделены жирными линиями.

Рис. 13. Области D-разбиения уравнения (33) при $\nu = 1$

Рис. 14. Области D-разбиения уравнения (33) при $\nu = \pi/2$

Таким образом, среди неравенств, которые задают область устойчивости, независимыми являются три:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 > 0, \\ r_2 < (\theta_1^2 - r_1) \cos \theta_1, \\ r_1 < \theta_2^2 - r_2 / \cos \theta_2. \end{cases}$$

Неравенство $\nu > 0$ и принадлежность $\{\chi, \beta\}$ внутренности T эквивалентны тому, что $\{\chi, \beta, \nu\}$ принадлежит $\mathcal{D}_3$. $\square$

4.4. Уравнение (34): $\beta + \zeta \operatorname{sh} z + \nu z + z^2 e^z = 0$. Рассмотрим функцию $f(\varphi) = \varphi^2 \cos \varphi$; корень уравнения $\varphi = 2 \operatorname{ctg} \varphi$ из интервала $(\pi n, \pi(n + 1/2))$ обозначим через φ_n , где $n \in \mathbb{N}_0$.

Очевидно, φ_n — точки экстремума функции f , причем

$$f(\varphi_n) = \frac{(-1)^n \varphi_n^3}{\sqrt{\varphi_n^2 + 4}}.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ область $\mathcal{D}_4$, состоящую из точек $\mathbf{r}$, удовлетворяющих условиям: $0 < r_3 < \varphi_0^3 / \sqrt{\varphi_0^2 + 4}$ и

$$(47) \quad \begin{aligned} \frac{(\eta_0^2 - r_1) \sin \eta_0}{\eta_0} &< r_2 < \frac{(\eta_1^2 - r_1) \sin \eta_1}{\eta_1}, \\ \frac{(\eta_2^2 - r_1) \sin \eta_2}{\eta_2} &< r_2, \end{aligned}$$

где η_1, η_2, η_3 — корни уравнения $r_3 = f(\varphi)$ такие, что $0 < \eta_1 < \eta_2 < \pi/2$ и $\eta_3 \in (3\pi/2, 2\pi)$. Эта область связна, ограничена и изображена на рис. 16.

Рис. 15. Области D-разбиения уравнения (33) при $\nu = 1.8$

Рис. 16. Область $\mathcal{D}_4$ (внутри)

Теорема 17. Для того чтобы все корни уравнения (34) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы точка $\{\zeta, \nu, \beta\}$ принадлежала области $\mathcal{D}_4$.

Доказательство. Рассмотрим (34) как однопараметрическое семейство двухпараметрических характеристических уравнений (11) третьего рода, где β — параметр семейства, $p_1 = \zeta$, $p_2 = \nu$, тогда $f_1(z) = \text{sh } z$, $f_2(z) = z$ и $f_0(z) = z^2 e^z + \beta$.

Имеем $\Delta(\varphi) \equiv 0$, $\mathbf{u}(\varphi) = (f(\varphi) - \beta)\{\varphi, -\sin \varphi\}$, поэтому θ_n — последовательность положительных корней уравнения $\beta = f(\varphi)$, $n \geq 0$.

Если $\beta \leq 0$, то $F(0, \mathbf{r}) \leq 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, \mathbf{r}) > 0$ ($x \in \mathbb{R}$) при любом $\mathbf{r} \in \mathbb{R}_2$, следовательно, $\rho(\mathbf{r}) > 0$, то есть область устойчивости пуста.

Далее будем полагать $\beta > 0$.

Прямая L_n задается уравнением $r_2 = \sin \theta_n (\theta_n - r_1 / \theta_n)$. Пусть $\theta_n \neq \varphi_m$ для любого $m \in \mathbb{N}_0$, тогда L_n — нестационарная прямая. Найдем описание для полуплоскости $\mathcal{H}_n$, пользуясь (25). Имеем

$$F(i\theta_n, \mathbf{r})f_2(-i\theta_n) = \theta_n((r_1 - \theta_n^2) \sin \theta_n + r_2 \theta_n)$$

и $u'_1(\theta_n) = \theta_n f'(\theta_n)$, поэтому $\mathcal{H}_n$ задается неравенством

$$(48) \quad ((r_1 - \theta_n^2) \sin \theta_n + r_2 \theta_n) f'(\theta_n) > 0.$$

Покажем, что неравенство

$$(49) \quad \sin \theta_n f'(\theta_n) \geq 0$$

может выполняться только для $n = 0$.

Предположим, что $n \geq 1$, тогда существует натуральное m такое, что $\theta_n \in (\pi(m - 1/2), \pi(m + 1/2))$ и $\theta_{n-1} \in (\pi(m - 5/2), \pi(m - 3/2))$. Следовательно, $\beta < f(\varphi_{m-2})$.

Далее, если выполняется (49), то $\theta_n \in [\pi m, \varphi_m]$, поэтому

$$\beta > f(\pi m) = \pi^2 m^2 > \varphi_{m-2}^2 > f(\varphi_{m-2}) > \beta.$$

Полученное противоречие доказывает, что при $n \geq 1$ полуплоскость $\mathcal{H}_n$ задается неравенством $r_1 < \theta_n^2 - r_2 \theta_n / \sin \theta_n$.

Рассмотрим точку $\mathbf{a}^n = (\theta_n^2, 0)$, принадлежащую L_n . Легко видеть, что $\mathbf{a}^0 \in \mathcal{H}_n$ при любом $n \geq 1$.

Если $\beta = f(\varphi_n)$ при некотором $n \in \mathbb{N}_0$, тогда через $\mathbf{a}^0$ проходит единственная стационарная прямая L_0 (регулярность несложно установить воспользовавшись (16)). Эта точка принадлежит оси r_1 , состоящей из точек с положительным индексом (теорема 11); согласно пункту 2) теоремы 7 область устойчивости пуста.

Пусть β положительно, но не совпадает со значением $f(\varphi_n)$ ни при каком $n \in \mathbb{N}_0$. Согласно теореме 5 область устойчивости либо пуста, либо представляет собой многоугольник, границе которого принадлежит точка $\mathbf{a}^0$.

Из теоремы 11 вытекает, что при любом $r_1 \in \mathbb{R}$, $\beta > f(\varphi_0)$ и $r_2 = 0$ у характеристического уравнения (34) существуют корни с положительной вещественной частью. Следовательно, $\rho(\mathbf{a}^0) > 2$, поэтому абсолютный индекс указанного выше многоугольника положителен и область устойчивости пуста.

Остается рассмотреть случай $\beta \in (0, f(\varphi_0))$. Из теоремы 11 вытекает, что область устойчивости не пуста, поэтому согласно теореме 5 она совпадает с пересечением всех $\mathcal{H}_n$.

Докажем, что в системе неравенств, описывающих область устойчивости, независимыми являются только неравенства (48) при $n = 0, 1$ и 2 . Для этого достаточно показать, что $L_n \cap T = \emptyset$ при $n \geq 3$, где T — треугольник, образованный отрезками прямых L_0, L_1 и L_2 . На рисунках 17, 18 стороны данного треугольника выделены жирными линиями.

Рис. 17. Области D-разбиения уравнения (34) при $\beta = 0.1$

Рис. 18. Области D-разбиения уравнения (34) при $\beta = 0.4$

Обозначим через $\mathbf{b}^n$ точку пересечения прямой L_n с осью r_2 .

Пусть n — четное число, большее трех, тогда $b_2^n = \theta_n \sin \theta_n < 0$. Угловой коэффициент прямых L_2 и L_n положительный. В силу $\cos \theta_n = \beta/\theta_n^2$ имеем $|b_2^n| > |b_2^2|$, а прямая L_n имеет меньший по абсолютной величине коэффициент наклона, чем прямая L_2 , следовательно, прямые L_n и L_2 пересекаются в третьем квадранте, то есть прямая L_n не пересекает T .

Пусть n — нечетное число, не меньшее трех. Обозначим через c проекцию на ось r_2 точки пересечения прямых L_0 и L_1 .

Докажем, что $c < b_2^n$.

Из неравенств $\beta < f(\varphi_0) = \varphi_0^2 \cos \varphi_0 < \pi^2/4$ и $2\pi < \theta_n < 5\pi/2$ вытекает $\cos \theta_n = \beta/\theta_n^2 < 1/16$, следовательно, $\sin \theta_n > 15/16$ и $\theta_n > 7\pi/3$, поэтому $b_2^n = \theta_n \sin \theta_n > 2\pi > 6$.

Неравенство $c < 6$ эквивалентно неравенству

$$(50) \quad -\theta_0^2 + \frac{6\theta_0}{\sin \theta_0} < -\theta_1^2 + \frac{6\theta_1}{\sin \theta_1}.$$

Рассмотрим на интервале $\varphi \in (0, \pi/2)$ неравенство

$$(51) \quad 5 \sin \varphi + 2\varphi \cos \varphi > 0.$$

Проинтегрировав (51), получаем

$$3 - 3 \cos \varphi + 2\varphi \sin \varphi > 0.$$

Еще раз проинтегрируем последнее неравенство, предварительно домножив его на $\sin \varphi$:

$$-\varphi \sin^2 \varphi + \sigma(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) > 0.$$

Домножив полученное неравенство на $2/\sin^2 \varphi$, получаем:

$$\left(-\varphi^2 + \frac{6\varphi}{\sin \varphi} \right)' > 0,$$

откуда и вытекает неравенство (50).

Остается указать на то, что $\nu \in (0, f(\varphi_0))$ и принадлежность точки $\{\zeta, \nu\}$ внутренности T эквивалентны тому, что $\{\zeta, \nu, \beta\} \in \mathcal{D}_4$. $\square$

4.5. Уравнение (35): $\chi \operatorname{ch} z + \beta + \zeta \operatorname{sh} z + z^2 e^z = 0$. Рассмотрим область $\mathcal{S}_0$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, содержащую точки $\mathbf{r}$ такие, что

$$(52) \quad \begin{cases} 0 < r_3 < \pi^2, \\ r_2 + (r_1 - r_3) \cos \sqrt{r_3} < 0, \\ \pi^2 < r_1 + r_2 < 4\pi^2, \\ r_1 - r_2 < \pi^2, \end{cases}$$

и области $\mathcal{S}_n (n \geq 1)$, содержащие такие точки $\mathbf{r}$, что

$$(53) \quad \begin{cases} \pi^2 n^2 < r_3 < \pi^2 (n+1)^2, \\ (r_2 + (r_1 - r_3) \cos \sqrt{r_3}) (-1)^n < 0, \\ \pi^2 n^2 < r_1 + (-1)^n r_2 < \pi^2 (n+2)^2, \\ \pi^2 (n-1)^2 < r_1 - (-1)^n r_2 < \pi^2 (n+1)^2. \end{cases}$$

Эти области связны, ограничены и попарно не пересекаются. Области $\mathcal{S}_n$ и $\mathcal{S}_{n+1}$ стыкуются по отрезкам. При $|n - m| > 1$ замыкания областей $\mathcal{S}_n$ и $\mathcal{S}_m$ не пересекаются. Первые две области изображены на рис. 19 и 20. Обозначим $\mathcal{D}_5 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$. Область $\mathcal{D}_5$ не является ни связной, ни ограниченной и частично изображена на рис. 21 и 22.

Рис. 19. Область $\mathcal{S}_0$ Рис. 20. Область $\mathcal{S}_1$

Теорема 18. Для того чтобы все корни уравнения (35) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы точка $\{\chi, \beta, \zeta\}$ принадлежала области $\mathcal{D}_5$.

Доказательство. Будем рассматривать (35) как однопараметрическое семейство характеристических уравнений 11 третьего рода, где $p_1 = \chi$, $p_2 = \beta$, а ζ — параметр семейства.

В случае $\zeta = 0$ область устойчивости пуста (теорема 9).

Далее, $f_1(z) = \operatorname{ch} z$, $f_2(z) \equiv 1$, $f_0(z) = z^2 e^z + \zeta \operatorname{sh} z$, следовательно, $\mathbf{u} = (\zeta - \varphi^2) \sin \varphi \{1, -\cos \varphi\}$, поэтому прямым D-разбиения соответствуют следующие частоты: πn и $\sqrt{\zeta}$.

Если $\zeta < 0$, то $f_1(0)u'_2(0) = -\zeta > \zeta = f_2(0)u'_1(0)$, поэтому область устойчивости пуста согласно пункту 3) теоремы 7.

Далее удобно будет упорядочить прямые D-разбиения следующим образом. Обозначим через L_n прямую, соответствующую частоте πn . Эта прямая описывается уравнением $r_1 + r_2(-1)^n = \pi^2 n^2$. Если $\zeta \neq \pi^2 n^2$, то L_n — нестационарная прямая. Обозначим через H_n полуплоскость, в которую направлен $-\nabla \operatorname{Re} Z_{\pi n}$.

Из (25) и неравенства

$$F(i\pi n, \zeta, 0)f_2(-i\pi n)u'_1(i\pi n) = (\pi^2 n^2 - \zeta)^2 > 0$$

вытекает, что точка $\mathbf{a} = \{\zeta, 0\}$ принадлежит H_n для любого $n \in \mathbb{N}_0$ при $\zeta \neq \pi^2 n^2$.

Если $\zeta = \pi^2 m^2$, то L_m — проекция стационарной прямой и содержит точку $\mathbf{a}$, а все остальные прямые D-разбиения нестационарны. Имеем

$$F'(i\pi m, \pi^2 m^2, 0) = 2\pi m i(-1)^m,$$

$$F''(i\pi m, \pi^2 m^2, 0) = (4\pi m i + 2)i(-1)^m,$$

следовательно, $W(\pi m, \pi^2 m^2, 0) = 1$ по формуле 18. Таким образом, согласно пункту 1) теоремы 7 область устойчивости пуста.

Рис. 21. Область $\mathcal{D}_5$ Рис. 22. Область $\mathcal{D}_5$

Пусть $\zeta > 0$ и $\sqrt{\zeta}/\pi \notin \mathbb{N}$, тогда через L^* обозначим прямую, соответствующую частоте $\varphi = \sqrt{\zeta}$. Эта прямая описывается уравнением $r_2 = (\zeta - r_1) \cos \zeta$. Заметим, что $\mathbf{a} \in L^*$.

Прямая L^* нестационарна. Через H^* обозначим полуплоскость, в которую направлен $-\nabla \operatorname{Re} Z_{\sqrt{\zeta}}$. Явное описание данной полуплоскости: $(r_2 + (r_1 - \zeta) \cos \zeta) \sin \sqrt{\zeta} < 0$.

Обозначим $D_0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} H_n$. Поскольку $\mathbf{a} \in D_0 \cap L^*$, то согласно теореме 5 область устойчивости либо пуста, либо совпадает с $D_1 = D_0 \cap H^*$. На рис. 23–26 изображены области D-разбиения, а границы области D_1 выделена жирной линией.

Рис. 23. Области D-разбиения уравнения (35) при $\zeta = 1$

Рис. 24. Области D-разбиения уравнения (35) при $\zeta = 4$

Рис. 25. Области D-разбиения уравнения (35) при $\zeta = 15$

Рис. 26. Области D-разбиения уравнения (35) при $\zeta = 22$

Докажем, что область устойчивости не пуста. Имеем $\rho(\mathbf{a}) = 2$ в силу $F(z, \zeta, 0) = e^z(z^2 + 2\zeta)$. По определению H^* вектор $\nabla Z_{\sqrt{\zeta}}(\zeta, 0)$ направлен извне области D_1 , следовательно, $\rho(D_1) = 0$.

Все прямые L_n одинаковой четности параллельны. Следовательно, при $\zeta \in (0, \pi^2)$ область D_0 образована отрезком прямой L_1 и лучей прямых L_0 и L_2 , поэтому принадлежность точки $\{\chi, \beta\}$ области D_1 равносильна принадлежности точки $\{\chi, \beta, \zeta\}$ области S_0 .

При $n \geq 1$ и $\zeta \in (\pi^2 n^2, \pi^2(n+1)^2)$ область D_0 — внутренность прямоугольника, образованного прямыми L_{n-1} , L_n , L_{n+1} и L_{n+2} , поэтому $\{\chi, \beta\} \in D_1$ в том и только том случае, если $\{\chi, \beta, \zeta\} \in \mathcal{S}_n$. $\square$

4.6. **Уравнение (36):** $\chi \operatorname{ch} z + \zeta \operatorname{sh} z + \nu z + z^2 e^z = 0$. Рассмотрим область $\mathcal{O}_0$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, содержащую точки $\mathbf{r}$ такие, что

$$(54) \quad \begin{cases} 0 < r_3 < \frac{\pi^2}{4}, \\ \sin \sqrt{r_3}(r_3 - r_1) < r_2 \sqrt{r_3}, \\ \frac{2r_1}{3\pi} - \frac{3\pi}{2} < r_2 < \frac{\pi}{2} - \frac{2r_1}{\pi}, \end{cases}$$

область $\mathcal{O}_1$, содержащую такие точки $\mathbf{r}$ что

$$(55) \quad \begin{cases} \frac{\pi^2}{4} < r_3 < \frac{9\pi^2}{4}, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{2r_1}{\pi} < r_2 < \frac{5\pi}{2} - \frac{2r_1}{5\pi}, \\ \frac{2r_1}{3\pi} - \frac{3\pi}{2} < r_2 < \frac{\sin \sqrt{r_3}(r_3 - r_1)}{\sqrt{r_3}}, \end{cases}$$

и области $\mathcal{O}_n (n \geq 2)$, содержащие такие точки $\mathbf{r}$, что

$$(56) \quad \begin{cases} \pi^2(n-1/2)^2 < r_3 < \pi^2(n+1/2)^2, \\ \pi\left(n - \frac{3}{2}\right) - \frac{r_1}{\pi(n-3/2)} < (-1)^n r_2 < \pi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{r_1}{\pi(n+1/2)}, \\ \frac{r_1}{\pi(n+3/2)} - \pi\left(n + \frac{3}{2}\right) < (-1)^n r_2 < \frac{r_1}{\pi(n-1/2)} - \pi\left(n - \frac{1}{2}\right), \\ (r_2 \sqrt{r_3} - \sin \sqrt{r_3}(r_3 - r_1))(-1)^n > 0. \end{cases}$$

Рис. 27. Область $\mathcal{O}_0$ (внутри)

Рис. 28. Область $\mathcal{O}_1$

Эти области связны, ограничены и попарно не пересекаются. Области $\mathcal{O}_n$ и $\mathcal{O}_{n+1}$ стыкуются по отрезкам. При $|n - m| > 1$ замыкания областей $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{O}_m$ не пересекаются. Области $\mathcal{O}_0$, $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ изображены на рис. 27–29.

Обозначим $\mathcal{D}_6 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_n$. Область $\mathcal{D}_6$ несвязна, неограниченна и частично изображена на рис. 31 и 32.

Рис. 29. Область $\mathcal{O}_2$ Рис. 30. Области
D-разбиения при $\chi \rightarrow 0+$

Теорема 19. Для того чтобы все корни уравнения (36) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы точка $\{\zeta, \nu, \chi\}$ принадлежала области $\mathcal{D}_6$.

Доказательство. Будем рассматривать (36) как семейство характеристических уравнений 11 третьего типа, где $p_1 = \zeta$, $p_2 = \nu$, а χ — параметр семейства.

Имеем $f_1(z) = \operatorname{sh} z$, $f_2(z) = z$, $f_0(z) = z^2 e^z + \chi \operatorname{ch} z$, следовательно

$$\mathbf{u} = (\varphi^2 - \chi) \cos \varphi \{\varphi, -\sin \varphi\}.$$

Если $\chi \leq 0$, то характеристическое уравнение имеет неотрицательный вещественный корень, поэтому область устойчивости пуста.

Пусть далее $\chi > 0$. Тогда θ_n — упорядоченная последовательность значений $\pi(n + 1/2)$ и $\sqrt{\chi}$. Обозначим проекции прямых D-разбиения следующим образом.

Обозначим через L_n прямую, соответствующую частоте $\varphi = \pi(n + 1/2)$. Эта прямая задается уравнением $r_1 + (-1)^n \pi(n + 1/2)r_2 = \pi^2(n + 1/2)^2$. Если $\chi \neq \pi^2(n + 1/2)^2$, то эта прямая нестационарна. Обозначим через H_n полуплоскость, в которую направлен $-\nabla \operatorname{Re} Z_{\pi(n+1/2)}$. Эта полуплоскость задается неравенством

$$\left(r_1 + (-1)^n \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) r_2 - \pi^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \left(\chi - \pi^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right) > 0.$$

Если $\sqrt{\chi}/\pi - 1/2 \notin \mathbb{Z}$, то через L^* обозначим прямую, соответствующую частоте $\varphi = \sqrt{\chi}$. Эта прямая нестационарна и задается уравнением $r_1 \sin \sqrt{\chi} + r_2 \sqrt{\chi} = \chi \sin \sqrt{\chi}$. Обозначим через H^* полуплоскость, в которую направлен $-\nabla \operatorname{Re} Z_{\sqrt{\chi}}$. Эта полуплоскость задается неравенством

$$(r_1 \sin \sqrt{\chi} + r_2 \sqrt{\chi} - \chi \sin \sqrt{\chi}) \cos \sqrt{\chi} > 0.$$

Рассмотрим точку $\mathbf{a} = \{\chi, 0\}$. Из неравенства

$$-F(i\pi(n + 1/2), \chi, 0) f_1(-i\pi(n + 1/2)) u'_2(i\pi(n + 1/2)) = \pi^2(n + 1/2)^2 - \chi > 0$$

вытекает, что $\mathbf{a} \in H_n$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$ такого что $\chi \neq \pi^2(n + 1/2)^2$.

Пусть $\chi = \pi^2(m + 1/2)^2$, тогда прямые L^* и L_m совпадают, причем $\mathbf{a} \in H_n$ для любого $n \neq m$. Прямая L_m стационарна, в чем несложно убедиться. Далее,

$$F'(i\pi(m + 1/2), \pi^2(m + 1/2)^2, 0) = (-1)^{m-1} \pi(2m + 1),$$

$$F''(i\pi(m + 1/2), \pi^2(m + 1/2)^2, 0) = 2(-1)^{m-1} \pi(-\pi(2m + 1) + 1),$$

Рис. 31. Область $\mathcal{D}_6$ Рис. 32. Область $\mathcal{D}_6$

$$f_1(i\pi(m+1/2)) + f_2(i\pi(m+1/2)) = i(\pi/2 + \pi m + (-1)^m),$$

$$f'_1(i\pi(m+1/2)) + f'_2(i\pi(m+1/2)) = 1,$$

поэтому, воспользовавшись (18), находим, что

$$W(\pi(m+1/2), \pi^2(m+1/2)^2, 0) = \frac{\pi(2m+1) + (-1)^m}{\pi^3(2m+1)^3} > 0,$$

следовательно, согласно пункту 1) теоремы 7 область устойчивости пуста.

Пусть $\sqrt{\chi}/\pi - 1/2 \notin \mathbb{Z}$. Обозначим $D_0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} H_n$.

Поскольку $\mathbf{a} \in D_0 \cap L^*$, то существует область $D_1 = D_0 \cap H^*$.

Согласно теореме 5 область устойчивости либо пуста, либо совпадает с D_1 . Докажем, что область устойчивости не пуста. Имеем $\rho(\mathbf{a}) = 2$ в силу $F(z, \sqrt{\chi}, 0) = e^z(\chi + z^2)$. По определению H^* вектор $\nabla Z_{\sqrt{\chi}}(\sqrt{\chi}, 0)$ направлен извне области D_1 , следовательно, $\rho(D_1) = 0$.

Теперь уточним описание областей D_0 и D_1 .

Обозначим через $\mathbf{p}^{n,m}$ точку пересечения различных прямых L_m и L_n . Имеем $p_2^{n,m} = (-1)^n \pi(n+m+1)$ в случае, если n и m одинаковой четности, и $p_2^{n,m} = (-1)^n \pi(n-m)$, если n и m различной четности. Кроме того, $p_1^{n,m} = (-1)^{n-m+1} \pi^2(n+1/2)(m+1/2)$.

Обозначим через $\mathbf{b}^n$ точку пересечения прямых L^* и L_n . Имеем

$$b_2^n = \frac{\pi^2(n+1/2)^2 - \chi}{(-1)^n \pi(n+1/2) - \sqrt{\chi}/\sin \sqrt{\chi}}.$$

Если $\chi \in (0, \pi^2/4)$, то D_1 является областью, расположенной левее прямых L_n при всех $n \geq 0$, но правее прямой L^* . Докажем, что $D_1 = T_1$. Поскольку при $n \geq 2$ точка пересечения прямой L_n с осью r_1 находится правее вершины $\mathbf{p}^{0,1}$, то невозможно, чтобы прямая L_n пересекала обе стороны $[\mathbf{p}^{0,1}, \mathbf{b}^0]$ и $[\mathbf{p}^{0,1}, \mathbf{b}^1]$ одновременно. Остается показать, что ни одна проекция прямой D-разбиения не пересекает отрезок $[\mathbf{b}^0, \mathbf{b}^1]$. В силу того, что $\operatorname{sgn} b_2^n = (-1)^n$, для этого достаточно показать, что при четных n имеем $b_2^n > b_2^0$, а при нечетных n имеем $b_2^n < b_2^1$.

Пусть n — четное число, не меньшее двух, тогда

$$b_2^n > \frac{\pi^2(n+1/2)^2 - \chi}{\pi(n+1/2) - \sqrt{\chi}} = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\chi} > \frac{5\pi}{2}.$$

Используя $\sqrt{\chi} < \sqrt{\chi}/\sin \sqrt{\chi} < \pi/2 - \sqrt{\chi}$, получим

$$b_2^0 < \frac{\pi(\pi^2 - 4\chi)}{2(\pi - 2)(\pi - 2\sqrt{\chi})} < \frac{\pi^2}{\pi - 2} < \frac{5\pi}{2}.$$

Пусть n — нечетное число, не меньшее трех, тогда

$$|b_2^n| > \frac{\pi^2(n+1/2)^2 - \pi^2/4}{\pi(n+1)} = \pi n \geq 3\pi,$$

$$|b_2^1| < \frac{\pi(9\pi^2 - 4\chi)}{4(\pi - 2)(3\pi + 2\sqrt{\chi})} < \frac{3\pi}{2}.$$

При условии $0 < \chi < \pi^2/4$ принадлежность точки $\{\zeta, \nu\}$ треугольнику $\mathbf{p}^{0,1}\mathbf{b}^0\mathbf{b}^1$ равносильна принадлежности точки $\{\zeta, \nu, \chi\}$ области O_0 .

Пусть $\chi \in (\pi^2/4, 9\pi^2/4)$. Рассмотрим треугольник $\mathbf{p}^{0,1}\mathbf{p}^{0,2}\mathbf{p}^{1,2}$. Очевидно, этот треугольник не пересекается прямой L_m ни при каком m , содержит точку $\mathbf{a}$ и, следовательно, совпадает с D_0 . Принадлежности точки $\{\zeta, \nu, \chi\}$ области O_1 эквивалентна тому, что точка $\{\zeta, \nu\}$ находится внутри этого треугольника и принадлежит H^* .

Теперь пусть $\chi \in (\pi^2(n-3/2)^2, \pi^2(n-1/2)^2)$, где $n \geq 3$. Рассмотрим четырехугольник $\mathbf{p}^{n-2,n-1}\mathbf{p}^{n,n-1}\mathbf{p}^{n,n+1}\mathbf{p}^{n-2,n+1}$. Легко показать, что внутренность этого четырехугольника совпадает с D_0 . Принадлежности точки $\{\zeta, \nu, \chi\}$ области $\mathcal{O}_n$ эквивалентна тому, что точка $\{\zeta, \nu\}$ находится внутри этого четырехугольника и принадлежит $\mathbf{H}^*$.

Рис. 33. Области D-разбиения уравнения (36) при $\chi = 1$

Рис. 34. Области D-разбиения уравнения (36) при $\chi = 1$

На рис. 34–37 изображены области D-разбиения, а границы области D_1 выделены жирными линиями. При $\chi = 0$ область устойчивости пуста, однако, если χ стремится к нулю, то область D_1 является стремится к треугольнику, изображенному на рис. 30. $\square$

Рис. 35. Области D-разбиения уравнения (36) при $\chi = 7$

Рис. 36. Области D-разбиения уравнения (36) при $\chi = 16$

4.7. Уравнение (37): $\beta + \mu ze^z + \nu z + z^2 e^z = 0$. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ область $\mathcal{D}_7$, состоящую из точек $\mathbf{r}$, удовлетворяющих условиям: $r_3 > -1$, $r_2 \in (-r_3, \psi \sin \psi - r_3 \cos \psi)$, где ψ — единственный корень уравнения $\psi^2 \cos \psi = -r_3 \sin \psi$, и $r_1 \in (0, \eta^2 \cos \eta + r_3 \sin \eta)$, где η — корень уравнений $r_2 + r_3 \cos \eta = \eta \sin \eta$ из интервала $(0, \psi)$. Эта область неограниченна, связна и изображена на рис. 38.

Теорема 20. Для того чтобы все корни уравнения (37) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы точка $\{\beta, \nu, \mu\}$ принадлежала области $\mathcal{D}_7$.

Рис. 37. Области D-разбиения уравнения (36) при $\chi = 36$

Рис. 38. Область $\mathcal{D}_7$ (внутри)

Доказательство. Рассмотрим (37) как однопараметрическое семейство двухпараметрических характеристических уравнений (11) первого рода, где μ — параметр семейства, $p_1 = \beta$, $p_2 = \nu$, тогда $f_1(z) \equiv 1$, $f_2(z) = z$ и $f_0(z) = z^2 e^z + \mu z e^z$.

Имеем $\Delta(\varphi) = \varphi$, $\mathbf{u}(\varphi) = \{\varphi^3 \cos \varphi + \mu \varphi^2 \sin \varphi, \varphi^2 \sin \varphi - \mu \varphi \cos \varphi\}$. Следовательно, существует единственная кривая C_0 , которая задается отображением $\mathbf{S}(\varphi) = \{\varphi^2 \cos \varphi + \mu \varphi \sin \varphi, \varphi \sin \varphi - \mu \cos \varphi\}$, и единственная прямая L_0 . Эта прямая задается уравнением $r_1 = 0$ и является проекцией нестационарной прямой с центральной точкой, которая совпадает с единственной концевой точкой кривой C_0 и имеет координаты $\{0, -\mu\}$.

Для любого вещественного φ выполняется тождество

$$\varphi^4 + (\mu^2 - S_2^2(\varphi))\varphi^2 - S_1^2(\varphi) = 0.$$

Следовательно, если φ — решение уравнений $\mathbf{r} = \mathbf{S}(\varphi)$ при фиксированном $\mathbf{r}$, то оно является решением биквадратного уравнения

$$\varphi^4 + (\mu^2 - r_2^2)\varphi^2 - r_1^2 = 0,$$

которое имеет не больше одного положительного решения при любых вещественных r_1, r_2 и μ . Следовательно, каждая точка плоскости $\mathbb{R}^2$ является проекцией не более, чем одной точки кривой D-разбиения, то есть C_0 — простая кривая.

Обозначим через $\{a_n\}$ упорядоченную по возрастанию последовательность положительных корней уравнения $\mu = \varphi \operatorname{tg} \varphi$, $n \in \mathbb{N}$. Через $\{b_n\}$ обозначим упорядоченную по возрастанию последовательность положительных корней уравнения $\mu = -\varphi \operatorname{ctg} \varphi$, $n \in \mathbb{N}$. Точка $\mathbf{S}(a_n)$ является пересечением кривой C_0 с осью r_1 , а точка $\mathbf{S}(b_n)$ является пересечением кривой C_0 с осью r_2 . Корни уравнений $\mu = \varphi \operatorname{tg} \varphi$, $\mu = -\varphi \operatorname{ctg} \varphi$ чередуются, следовательно точки пересечения C_0 с координатными осями чередуются, иными словами C_0 изоморфна спирали. Далее, $S_1(a_n) = a_n^2 / \cos a_n$ и $S_2(b_n) = b_n / \sin b_n$, поэтому C_0 изоморфна спирали, раскручивающейся против часовой стрелки.

Найдем индекс точек оси r_2 . Согласно теореме 12 точка $\{c, 0\}$ имеет нулевой индекс в том и только том случае, если $\mu > 0$ и $c \in (0, \mathbf{S}_1(a_1))$.

Рассмотрим три случая.

Пусть $\mu > 0$, тогда $a_n \in (\pi(n-1), \pi(n-1/2))$ и $b_n \in (\pi(n-1/2), \pi n)$, поэтому первое пересечение кривой с координатными осями происходит с полуосью $r_1 > 0$, а центральная точка принадлежит полуоси $r_2 < 0$. Следовательно, каждая область D-разбиения пересекает ось r_1 . Обозначим через D область, границей которой служит отрезок прямой L_0 и участок кривой $C_0^{(0, a_1)}$. Эта и только эта область содержит точки оси r_1 с нулевым абсолютным индексом. Области D-разбиения для случая $\mu = 1$ изображены на рис. 39; граница области D выделена жирной линией.

Пусть $\mu \in (-1, 0]$, тогда $a_n \in (\pi(n-1/2), \pi n]$ и $b_n \in (\pi(n-1), \pi(n-1/2)]$ и, поэтому и первая точка пересечения C_0 с координатными осями, и центральная точка прямой L_0 принадлежит полуоси $r_2 > 0$, поэтому существует область D , граница которой состоит из отрезка прямой L_0 и кривой $C_0^{(0, a_1)}$. Области D-разбиения для случая $\mu = -0.5$ изображены на рис. 41, 40; граница области D выделена жирной линией. Очевидно, любая область за исключением D , пересекает ось r_1 , поэтому имеет положительный абсолютный индекс. При $r_1 = 0$ характеристическое уравнение принимает вид $z(ze^z + r_2) = 0$. При условии $r_2 \in (-\mu, S_2(b_1))$ второй квазиполином-множитель устойчив (теорема 8), поэтому $\rho(\{0, r_2\}) = 1$. Имеем $\Delta'(0) > 0$, поэтому ∇Z_0 направлен против часовой стрелки относительно центральной точки прямой L_0 , следовательно, $\rho(D) = 0$.

Если $\mu \leq -1$, то $a_n \in (\pi(n-1/2), \pi n)$ и $b_n \in (\pi n, \pi(n+1/2))$, поэтому первое пересечение C_0 с координатными осями происходит с полуосью $r_1 < 0$, но конечная точка кривой принадлежит полуоси $r_2 > 0$, поэтому каждая область имеет точку пересечения с осью r_1 , которая состоит из точек с положительным абсолютным индексом.

Остается показать, что при $\mu > -1$ область D является сечением области $\mathcal{D}_7$. Для этого достаточно указать на то, что $\psi = b_1$, и на тот элементарно проверяемый факт, что на множестве $(0, b_1)$ функция S_2 монотонно возрастает и, следовательно, обратима. $\square$

Рис. 39. Области D-разбиения уравнения (37) при $\mu = 1$.

Рис. 40. Области D-разбиения уравнения (37) при $\mu = 0$.

4.8. Уравнение (38): $\chi \operatorname{ch} z + \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z + z^2 e^z = 0$. Умножим уравнение (38) на e^{-z} и будем рассматривать характеристическое уравнение для этой трехпараметрической системы в виде:

$$(57) \quad z^2 + \alpha + \gamma e^{-2z} + \mu z.$$

Рис. 41. Области D-разбиения уравнения (37) при $\mu = -0.5$.

Рис. 42. Область $\mathcal{D}_8$ (выше)

Впервые некоторые сечения области устойчивости уравнения (57) при $\mu = \text{const} > 0$ были получены в работе [4]. В работе, состоящей из двух статей [11], [12] построена область устойчивости по сечениям $\mu = \text{const}$.

При $\mu \neq 0$ уравнение (57) представляет собой двупараметрическое характеристическое уравнение первого рода, поэтому для описания областей D-разбиения требуется найти точки пересечения счетного множества кривых.

Ниже мы приведем построение области устойчивости в иных параметрах: если фиксировать не коэффициент μ , а отношение γ/μ , то (57) можно интерпретировать уравнение (57) как семейство двупараметрических характеристических уравнений второго рода. Таким образом, для описания любого сечения области устойчивости потребуется найти точки пересечения счетного множества прямых, что существенно упрощает описание области.

Обозначим $w = r_3/r_2$ и рассмотрим функцию $f(\varphi) = \sin 2\varphi/\varphi$. При $w \neq 0$ множество корней уравнения $w = f(\varphi)$ конечно: обозначим через $M = M(w)$ количество положительных корней этого уравнения. Через $\eta_n = \eta_n(w)$ обозначим упорядоченные по возрастанию корни уравнения $w = f(\varphi)$ ($n = \overline{1, M}$). Определим $\eta_0 = \eta_0(w) \equiv 0$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ область $\mathcal{D}_8$, состоящую из таких точек $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, r_3\}$, что

$$\begin{cases} r_1, r_3 > 0, & \text{если } r_2 = 0, \\ (-1)^n r_2 < 0 \text{ и } \pi^2 n^2/4 + |r_2| < r_1 < \pi^2 (n+1)^2/4 - |r_2|, & \text{если } r_3 = 0, \\ \text{где } n - \text{целая часть числа } 2\sqrt{r_1}/\pi, \\ \exists n \leq M(w): \forall m < n: r_1 > \eta_m^2(w) - r_2 \cos \eta_m(w) \text{ и} \\ \begin{cases} (-1)^n r_2 > 0 \text{ и } r_1 < \eta_n^2(w) - r_2 \cos \eta_n, & \text{если } n < M(w), \\ wr_2 > 0, & \text{если } n = M(w), \end{cases} & \text{если } w \neq 0. \end{cases}$$

Область $\mathcal{D}_8$ неограниченна, связна и частично изображена на рис. 42. Сечение области $\mathcal{D}_8$ плоскостью $r_2 = 0$ — квадрант $r_1, r_3 > 0$. Сечение области $\mathcal{D}_8$ плоскостью $r_3 = 0$ представляет собой объединение внутренностей счетного множества непересекающихся равнобедренных треугольников (рис. 4), примыкающих к положительной полуоси r_1 .

В плоскости $w = \text{const} \neq 0$ сечение области $\mathcal{D}_8$ представляет собой объединение внутренностей M ограниченных многоугольников, примыкающих к положительной полуоси r_1 , и одного неограниченного многоугольника. Границы данных многоугольника при различных значениях w выделены жирными линиями на рис. 43–46.

Рис. 43. Области D-разбиения уравнения (57) при $\omega = 0.1$

Рис. 44. Области D-разбиения уравнения (57) при $\omega = 0.2$

Рис. 45. Области D-разбиения уравнения (57) при $\omega = -0.1$

Рис. 46. Области D-разбиения уравнения (57) при $\omega = -0.2$

Теорема 21. Для того чтобы все корни уравнения 57 имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы точка $\{\alpha, \gamma, \mu\}$ принадлежала области $\mathcal{D}_8$.

Доказательство. Критерий устойчивости данного уравнения при условии $\gamma = 0$ очевиден: $\alpha > 0$ и $\mu > 0$.

Пусть $\gamma \neq 0$. Перепишем уравнение (57) в виде

$$(58) \quad \alpha + \gamma e^{-2z} + w\gamma z + z^2 = 0.$$

Положим $p_1 = \alpha$ и $p_2 = \gamma$, тогда (58) можно рассматривать как семейство двухпараметрических характеристических уравнений (11) второго рода, где w — параметр семейства.

Случай $w = 0$ сводится к теореме 13. Зафиксируем $w \neq 0$ и применим лемму 1.

Имеем $f_1(z) \equiv 1$, $f_2(z) = e^{-2z} + wz$, $f_0(z) = z^2$, следовательно,

$$\Delta(\varphi) = w\varphi - \sin 2\varphi, \quad \mathbf{u}(\varphi) = \{\varphi^2(w\varphi - \sin 2\varphi), 0\}.$$

Имеем $\mathbb{M} = \overline{0, M}$ и $\theta_n = \xi_n = \eta_n(w)$ при $n \in \mathbb{M}$.

Во-первых, докажем, что $|f_2(i\theta_n)|$ убывает. Действительно, $f_2(\theta_n) = \cos \theta_n$, поэтому $|f_2(i\theta_n)| = \sqrt{1 - k^2 \eta_n^2}$. Следовательно, если выбрать $\delta = f_2(i\theta_M)$, то $|f_2(i\theta_n)| > \delta$ для любого $n = \overline{0, M-1}$.

Теперь покажем, что $\operatorname{Re} f_2'(i\theta_n)f_2(i\theta_n) < 0$ для любого $n = \overline{1, M-1}$. Предположим обратное, тогда либо $\theta_n \in [0, \pi/4]$, либо $\theta_n \in [\varphi_k, \pi(2k+1)/4]$ при некотором $k \geq 1$.

Из элементарно проверяемых неравенств

$$\left| f\left(\frac{\pi(2n-1)}{4}\right) \right| < |f(\varphi_n)| < \frac{1}{\varphi_n} < \left| f\left(\frac{\pi(2n+1)}{4}\right) \right|$$

вытекает, что если уравнение $f(\varphi) = w$ неразрешимо при $\varphi > \pi(k+1)/4$, то θ_n — наибольший корень уравнения $\Delta(\varphi) = 0$ (иными словами, $n = M$).

Остается показать, что из $\operatorname{Re} f_2'(0)f_2(0) > 0$ вытекает, что $M = 0$. Действительно, если $\operatorname{Re} f_2'(0)f_2(0) = 2 - w > 0$, то уравнение $f(\varphi) = w$ неразрешимо ни при каком $\varphi \in \mathbb{R}$.

Итак, выполняются условия леммы 1, следовательно, область устойчивости состоит из конечного числа областей Q_n , удовлетворяющим условиям (20)–(22) ($n = \overline{0, M}$).

Если $n > t$, то точка пересечения прямой L_n лежит правее прямой L_m , а коэффициент наклона по абсолютной величине у первой прямой больше, чем у второй. Следовательно, при $n < M+1$ (то есть если Q_n является ограниченным многоугольником) условие (20) эквивалентно неравенству

$$r_1 < \theta_{n+1}^2 - r_2 f_2(i\theta_{n+1}).$$

Если же $n = M+1$ (то есть если Q_n является последним, неограниченным многоугольником), то условие (20) выполняется тождественно.

В случае, если $n < M+1$, то $\Delta'(\theta_n) \neq 0$, поэтому неравенство (22) эквивалентно следующему неравенству: $(-1)^n r_2 > 0$. Объединяя полученные условия, получаем утверждение теоремы. $\square$

Трёхпараметрические системы, характеристический функции которых имеют вид (39), (40), рассмотрены во второй части данной работы [28].

REFERENCES

- [1] N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatullina, *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations, Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations*, World Federation Publishers Company, Atlanta, 1995. MR1422013
- [2] N.V. Azbelev, P.M. Simonov, *Stability of Differential Equations with Aftereffect*, Taylor&Francis, London, 2003. Zbl 1049.34090
- [3] N.V. Azbelev, P.M. Simonov, *Russ. Math. (Iz. VUZ)* **41**:6 (1997), 1–14. MR1485931
- [4] A.A. Andronov, A.G. Mayer, *The simplest linear systems with delay*, *Automation and Remote Control*, **7**:2–3 (1946), 95–106. MR0020199
- [5] J.J. Batzel, H.T. Tran, *Stability of the human respiratory control system*, *J. Math. Biol.*, **41** (2000), 45–79. MR1779268
- [6] R. Bellman, K. L. Cooke, *Differential-Difference Equations*, Mir, Moscow, 1967. (in Russian) MR0221045.
- [7] K.L. Cooke, Z. Grossman, *Discrete delay, distributed delay and stability switches*, *J. Math. Anal. Appl.*, **86**:2 (1982), 592–627. MR652197
- [8] K.L. Cooke, J. Turi, *Stability, instability in delay equations modeling human respiration*, *J. Math. Biol.*, **32**:6 (1994), 535–543. MR1290256
- [9] L.Je. Jel'sgol's, S.B. Norkin, *Introduction to the theory of differential equations with deviating argument*, Nauka, Moscow, 1971. (in Russian) Zbl 0224.34053

- [10] J. Hale, *Theory of Functional-Differential Equations*, Mir, Moscow, 1984. (Russian) Zbl 0662.34064
- [11] C.S. Hsu, S.J. Bhatt, *Stability charts for second-order dynamical systems with time lag*, J. Appl. Mech., **33**:1 (1966), 113–118. Zbl 0143.10503
- [12] C.S. Hsu, S.J. Bhatt, *Stability charts for second-order dynamical systems with time lag*, J. Appl. Mech., **33**:1 (1966), 119–124. Zbl 0143.10601
- [13] Ju.S. Kolesov, *Mathematical models of ecology*, Issledovaniya po ustojchivosti i teorii kolebanij, JarGU, Jaroslavl', (1979), 3–40. Zbl 0478.92016
- [14] V.B. Kolmanovskii, V.R. Nosov, *Stability and periodic modes of a controlled systems with aftereffect*, Nauka, Moscow, 1981. MR0641554
- [15] E. Malakhovskii, L. Mirkin, *On stability of second-order quasi-polynomials with a single delay*, Automatica, **42**:6 (2006), 1041–1047. Zbl 1135.93025
- [16] A. Martin, S. Ruan, *Predator-prey models with delay and prey harvesting*, J. Math. Biol., **43**:3 (2001), 247–267. Zbl 1008.34066
- [17] H. Matsunaga, *Stability switches in a system of linear differential equations with diagonal delay*, Appl. Math. Comput., **212**:1 (2009), 145–152. Zbl 1171.34346
- [18] H. Matsunaga, *Exact stability criteria for delay differential and difference equations*, Appl. Math. Lett., **20**:2 (2007), 183–188. Zbl 1114.34057
- [19] H. Matsunaga, *Stability regions for linear delay differential equations with four parameters*, Int. J. Qual. Theory Differ. Equ. Appl., **3**:1-2 (2009), 99–107. Zbl 1263.34104
- [20] M.V. Mulyukov, *Stability of one-parameter systems of linear autonomous differential equations with bounded delay*, Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki, **23**:123 (2018), 488–502. (in Russian)
- [21] M.V. Mulyukov, *On factorization of the characteristic quasipolynomial of a system of linear differential equations with delay*, Russ. Math. (Iz. VUZ), **57**:9 (2013), 31–36. Zbl 1287.34060
- [22] M.V. Mulyukov, *Stability of two-parameter systems of linear autonomous differential equations with bounded delay*, Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ., **51** (2018), 79–122. (in Russian) Zbl 07124540
- [23] M.V. Mulyukov, *Asymptotic stability of two-parameter systems of delay differential equations*, Russ. Math. (Iz. VUZ), **58**:6 (2014), 44–50. Zbl 1317.34155
- [24] M.V. Mulyukov, *The stability of the linear autonomous differential equation with distributed and concentrated delay*, Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences, **20**:5 (2015), 1325–1331. (in Russian)
- [25] M.V. Mulyukov, *Stability of inverted pendulum with delayed feedback*, Applied Mathematics and Control Sciences, **2017**:4 (2017), 73–87. (in Russian)
- [26] M.V. Mulyukov, *Asymptotic stability of the system of autonomous differential equations of delayed type with degenerate matrices*, Proceedings of VII international conference «Modern methods of applied mathematics, control theory and computer technology», Voronej (2014), 268–270. (in Russian)
- [27] M.V. Mulyukov, *On stability of three-parameter system of two autonomous linear delay differential equations*, Proceedings of 2015 international conference «stability and control processes» in memory of V.I. Zubov (scp) joined with 21st international workshop on beam dynamics and optimization (bdo). Saint-Petersburg, 05-09 october 2015.
- [28] M.V. Mulyukov, *Stability of three-parameter systems of two linear differential equations with delay. Part II*, Siberian Electronic Mathematical Reports. (Russian, in print).
- [29] A.D. Myshkis, *Linear Differential Equations with Delayed Argument*, Nauka, Moscow, 1972. (in Russian) Zbl 0261.34040
- [30] Ju.I. Nejmark, *On the determination of the values of the parameters for which a system of automatic regulation is stable*, Automation and Remote Control, **9**:3 (1948), 190–203. (in Russian)
- [31] Ju.I. Neimark, *Stability of linearized systems (discrete and distributed)*, LKVVIA, Leningrad, 1949. (in Russian)
- [32] Ju.I. Nejmark, *Dynamic systems and controlled processes*, Nauka, Moscow, 1978. (in Russian) Zbl 0509.93001
- [33] G. Stepan, *Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions*, Longman Scientific & Technical, New York, 1989. Zbl 0686.34044
- [34] V.A. Trenogin, *Functional analysis*, Nauka, Moscow, 1993. (in Russian) Zbl 0804.46001
- [35] P. Wangersky, W. Cunningham. *Time lag in prey-predator population models*, Ecology, **38**:1 (1957), 136–139.
- [36] V.V. Zajcev, A.V. Karlov-mladshij, S.S. Telegin, *Predator-prey DV-model*, Vestn. SamGU - Estestvennonauchnaja serija, **6(72)** (2009), 139–148. (in Russian)

- [37] H. Zhao, Y. Lin, Y. Dai *Stability and global Hopf bifurcation analysis on a ratio-dependent predator-prey model with two time delays*, Abstract and Applied Analysis, **2013** (2013), ID. 321930.
- [38] V.I. Zubov, *On the theory of linear stationary systems with lagging arguments*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., **1958**:6(7) (1958), 86–95. Zbl 0122.11201

MIKHAIL VADIMOVICH MULYUKOV
PERM NATIONAL RESEARCH POLYTECHNIC UNIVERSITY,
29, KOMSOMOLSKIY AVE.,
PERM, 614990, RUSSIA
PERM STATE NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY,
15, BUKIREVA STR.,
PERM, 614990, RUSSIA
E-mail address: Mulykoff@gmail.com